APUNTES DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
PARA INGENIEROS DE TELECOMUNICACIONES

Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

2. Método de separación de variables

2.1. Separación de variables

2.1.1. Introducción

Un *operador lineal* es una aplicación que satisface

$$L(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 L(v_1) + k_2 L(v_2)$$

para todas las funciones v_1, v_2 y constantes k_1, k_2. Una *ecuación lineal* en u es una ecuación de la forma

$$L(u) = f, \tag{2.1}$$

donde L es un operador lineal y f es conocida. Si $f = 0$, entonces (2.1) se transforma en $L(u) = 0$, que se denomina *ecuación lineal homogénea.*

2.1.2. El problema de la conducción del calor en una varilla con temperatura cero en los extremos

El método de separación de variables permite tratar ecuaciones en derivadas parciales lineales homogéneas, cuyas condiciones iniciales y de contorno sean lineales. Vamos a ilustrar dicho método mediante un ejemplo. Consideremos la ecuación del calor en una varilla unidimensional $0 \leq x \leq L, t \geq 0$, con todos los coeficientes constantes y datos de contorno cero, es decir, la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0, \tag{2.2}$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L, \tag{2.3}$$

y con las condiciones de contorno nulas

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.4}$$

El método de separación de variables consiste en buscar soluciones que sean de la forma

$$u(x,t) = \varphi(x) T(t), \tag{2.5}$$

donde $\varphi(x)$ es una función que depende sólo de x y $T(t)$ es una función que depende sólo de t. La función definida en (2.5) debe cumplir la ecuación en derivadas parciales lineal homogénea (2.2) y las condiciones de contorno homogéneas (2.4). No impondremos de momento la condición inicial (2.3) a $u(x,t) = \varphi(x)T(t)$. Sustituyendo esta $u(x,t) = \varphi(x)T(t)$ en la ecuación del calor (2.2) se obtiene:

$$\varphi(x) \frac{dT}{dt} = k \frac{d^2 \varphi}{dx^2} T(t). \tag{2.6}$$

Si dividimos los dos miembros de (2.6) por $k\varphi(x)T(t)$, obtenemos:

$$\frac{1}{kT}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Podemos ver que las variables están *separadas* en el sentido de que el lado izquierdo es una función que depende sólo de t y el lado derecho es una función que depende sólo de x. Por tanto, ambos lados de la fórmula deben ser constantes, y escribiremos:

$$\frac{1}{kT}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\lambda, \tag{2.7}$$

donde λ es una constante arbitraria. Por supuesto, podríamos haber elegido escribir λ en lugar de $-\lambda$, pero así quedarán los cálculos más "bonitos".

La ecuación (2.7) se desglosa en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para $\varphi(x)$ y la otra para $T(t)$:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\lambda\varphi, \tag{2.8}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda kT. \tag{2.9}$$

Tengamos presente que λ es una constante y que es la misma en las dos ecuaciones (2.8) y (2.9). Como las soluciones $u(x,t) = \varphi(x)T(t)$ deben cumplir también las dos condiciones de contorno homogéneas, de $u(0,t) = 0$ deducimos que $\varphi(0)T(t) = 0$. Si $T(t)$ es idénticamente cero para todo t, llegaremos a la solución trivial $u(x,t) \equiv 0$ que no nos interesa; por tanto, tendremos que pedir:

$$\varphi(0) = 0. \tag{2.10}$$

La otra condición de contorno $u(L,t) = 0$, permite obtener de forma similar:

$$\varphi(L) = 0. \tag{2.11}$$

La función $\varphi(x)$ debe cumplir la ecuación diferencial ordinaria (2.8) y las condiciones de contorno (2.10) y (2.11). La función $T(t)$ debe cumplir la ecuación diferencial ordinaria (2.9).

La ecuación diferencial ordinaria (EDO) de $T(t)$, dependiente del tiempo t, es:

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda kT,$$

cuya solución es:

$$T(t) = ce^{-\lambda kt}, \tag{2.12}$$

donde c es una constante arbitraria.

La función $\varphi(x)$, dependiente de la variable espacial x, satisface lo que se denomina un *problema de contorno*, es decir, una EDO de segundo orden con dos condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = -\lambda\varphi, \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi(L) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Veremos ahora que no existen soluciones no triviales (no idénticamente cero) de (2.13) para todos los valores de λ, sino que sólo hay algunos valores de λ, llamados *autovalores*, para los que existen soluciones no triviales. Esta solución no trivial $\varphi(x)$, que existe solamente para algunos valores de λ, se llama *autofunción* correspondiente al autovalor λ.

Intentemos determinar los autovalores λ. Para ello procedamos a resolver (2.13). Como la EDO de segundo orden es lineal, homogénea y con coeficientes constantes, consideramos su polinomio característico $r^2 = -\lambda$. Distinguimos ahora tres casos diferentes (en función de los valores de λ):

(1) Si $\lambda < 0$, entonces las dos raíces son reales y distintas $r = \pm\sqrt{-\lambda}$.

(2) Si $\lambda = 0$, entonces $r = 0$ es una raíz doble.

(3) Si $\lambda > 0$, entonces existen dos raíces imaginarias puras $r = \pm i\sqrt{\lambda}$.

En el caso (1) las soluciones son de la forma

$$\varphi(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x},$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

En el caso (2) las soluciones son de la forma

$$\varphi(x) = c_1 + c_2 x,$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

En el caso (3) las soluciones son de la forma

$$\varphi(x) = c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right),$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Es fácil comprobar que, en los casos (1) y (2), las condiciones de contorno (2.10) y (2.11) implican $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, por lo que sólo se obtiene la solución trivial $\varphi(x) \equiv 0$. Por tanto, no existen autovalores $\lambda \leq 0$.

Tratemos ahora el caso (3): si $\lambda > 0$, entonces como ya hemos visto $\varphi(x) = c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)$. La condición de contorno $\varphi(0) = 0$ implica que $c_2 = 0$. La otra condición de contorno $\varphi(L) = 0$ implica que

$$0 = c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,L\right).$$

Esta igualdad se verifica si $c_1 = 0$ ó bien si $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) = 0$. Si $c_1 = 0$, entonces $\varphi(x) \equiv 0$ ya que tambien tenemos $c_2 = 0$, y obtenemos la solución trivial, que no nos interesa. Por tanto, los autovalores deben cumplir

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) = 0.$$

Es decir, $\sqrt{\lambda}\,L$ debe ser un cero de la función seno y, por tanto, $\lambda = n\pi$, donde n es un entero positivo ya que $\sqrt{\lambda} > 0$. Los *autovalores* λ son, por tanto,

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La autofunción correspondiente al autovalor $\lambda = \lambda_n = (n\pi/L)^2$ es

$$\varphi(x) = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\,x = c_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

donde c_1 es una constante arbitraria.

Por tanto, hemos conseguido soluciones en forma de producto $u(x,t) = \varphi(x)T(t)$ para la ecuación del calor $\partial u/\partial t = k\partial^2 u/\partial x^2$, y las condiciones de contorno $u(0,t) = 0$ y $u(L,t) = 0$, con $T(t) = ce^{-\lambda k t}$ y $\varphi(x) = c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,x$, siendo $\lambda = (n\pi/L)^2$ y n un entero positivo. Por tanto, para cada n las soluciones obtenidas de la ecuación del calor son

$$u(x,t) = C \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

donde C es una constante arbitraria ($C = cc_1$). Por el *principio de superposición* (es decir, la suma de soluciones de una ecuación lineal homogénea también es solución de dicha ecuación), sabemos que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{M} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

resuelve la ecuación del calor con condiciones de contorno cero para cualesquiera números reales C_n y cualquier entero positivo M. De hecho, si la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

converge "apropiadamente", también será solución de la ecuación del calor con condiciones de contorno cero.

Ocupémonos ahora de la condición inicial. Fourier afirmó que "cualquier" condición inicial $f(x)$ puede escribirse como una combinación lineal infinita de funciones $\operatorname{sen} n\pi x/L$, lo que se conoce como *serie de Fourier*:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\,. \tag{2.14}$$

Si ahora imponemos la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\,,$$

por lo que se verificará la condición inicial si y sólo si $C_n = B_n$ para todo n, donde B_n son los *coeficientes de Fourier* de $f(x)$. Por tanto, para resolver nuestro problema sólo necesitamos saber cómo calcular los coeficientes de Fourier de cualquier función.

Usando el siguiente hecho, que se obtiene por integración elemental:

$$\int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L/2 & m = n, \end{cases} \tag{2.15}$$

donde m y n son enteros positivos, podemos calcular los coeficientes B_n. Fijado un número natural m, basta multiplicar los dos lados de (2.14) por $\operatorname{sen} m\pi x/L$ para obtener:

$$f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\,. \tag{2.16}$$

Si integramos (2.16) en el intervalo $[0, L]$ y suponemos que podemos cambiar el orden en la integral y la sumación, deducimos:

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\, dx.$$

Usando ahora (2.15), deducimos:

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\, dx = B_m \int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{L}\, dx.$$

Finalmente, despejando B_m:

$$B_m = \frac{\displaystyle\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\ dx}{\displaystyle\int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{L}\ dx} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\ dx.$$

Por tanto, recapitulando todo lo que hemos hecho, la solución de nuestro problema de conducción del calor es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\ e^{-k(n\pi/L)^2 t},$$

con

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\ dx.$$

Dado que $(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)\,dx$ define un producto escalar en el espacio de funciones de cuadrado integrable, decimos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son *ortogonales* en $[a,b]$ si $\int_a^b u(x)v(x)\,dx = 0$. Un conjunto de funciones $\{\varphi_n(x)\}_n$ se denomina *conjunto ortogonal de funciones* si $\varphi_m(x)$ es ortogonal a $\varphi_n(x)$ para todo $m \neq n$. Por tanto, (2.15) nos dice que $\{\operatorname{sen} n\pi x/L\}_{n=1}^{\infty}$ es ortogonal en $[0,L]$. A las fórmulas (2.15) se las conoce como *relaciones de ortogonalidad*.

2.1.3. El problema de la conducción del calor en una varilla con extremos aislados

Consideremos la ecuación del calor en una varilla unidimensional $0 \leq x \leq L, t \geq 0$, con extremos aislados, es decir, la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0,$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L,$$

y con las condiciones de contorno nulas

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Siguiendo un razonamiento similar al del caso anterior, buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = \varphi(x)T(t)$. Todos los cálculos son iguales, salvo que las dos condiciones de contorno homogéneas ahora implican $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(L) = 0$. Por tanto, $\varphi(x)$ satisface el problema de contorno:

$$\begin{cases} \varphi'' = -\lambda\varphi, \\ \varphi'(0) = 0, \\ \varphi'(L) = 0. \end{cases}$$

Los cálculos permiten probar que los autovalores son también:

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

pero las autofunciones correspondientes son cosenos en vez de senos:

$$\varphi(x) = c_1 \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Por tanto, si

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \,,$$

entonces

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \, e^{-(n\pi/L)^2 kt}.$$

Para hallar los coeficientes A_n en este caso, debemos usar las fórmulas:

$$\int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{L}{2} & n = m \neq 0 \\ L & n = m = 0 \end{cases}$$

para n y m enteros no negativos. Si $n = 0$ ó $m = 0$, estamos considerando la autofunción $\varphi_0(x) = 1$. Usando estas relaciones de ortogonalidad, pueden obtenerse los valores de A_n:

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, dx, \qquad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx,$$

para $n \geq 1$.

2.1.4. Ecuación de Laplace en un disco

Queremos resolver la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en el disco de centro $(0,0)$ y radio a. Como el dominio presenta una simetría circular, es razonable plantear el problema en coordenadas polares:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \qquad u(a,\theta) = f(\theta).$$

Conviene darse cuenta de que tenemos condiciones implícitas en el problema; está la *condición de acotación*:

$$|u(0,\theta)| < \infty,$$

y las *condiciones de periodicidad* propias de las coordenadas polares:

$$u(r,-\pi) = u(r,\pi), \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,-\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi).$$

Si buscamos soluciones de la EDP (y de las condiciones implícitas) en forma de producto $u(r,\theta) = \varphi(\theta) R(r)$, el problema que obtenemos para la función angular es:

$$\varphi'' = -\lambda \varphi, \qquad \varphi(-\pi) = \varphi(\pi), \qquad \varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi).$$

Los autovalores son:

$$\lambda = n^2,$$

y las correspondientes autofunciones:

$$\operatorname{sen} n\theta \quad \text{y} \quad \cos n\theta.$$

En el caso $n = 0$ obtenemos la autofunción 1. El problema radial es la ecuación de Euler:

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0,$$

con la condición de acotación $|R(0)| < \infty$. Los cálculos muestran que la solución es:

$$R(r) = c_1 r^n \quad n \geq 0,$$

que es una constante arbitraria cuando $n = 0$. Por tanto, la solución de la ecuación de Laplace en un círculo es:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \operatorname{sen} n\theta,$$

si

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n a^n \operatorname{sen} n\theta.$$

Usando las relaciones de ortogonalidad (para n y m enteros no negativos):

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\ dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \\ 2L & n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\ dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\ dx = 0\,,$$

y tomando $L = \pi$, se sigue que:

$$\begin{aligned} & A_0 &=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\ d\theta, \\ (n \geq 1) \quad & A_n &=& \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\ d\theta, \\ & B_n &=& \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\ d\theta. \end{aligned}$$

2.2. Series de Fourier

2.2.1. Introducción

Si tenemos una función $f(x)$ en el intervalo $[-L, L]$, su serie de Fourier es:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,,$$

donde los coeficientes de Fourier se definen por medio de las fórmulas:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\ dx, \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\ dx, \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\ dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ahora nos plantearemos un problema crucial: la convergencia de la serie. Se dice que una función $f(x)$ es C^1 *a trozos* en $[-L, L]$ si el intervalo se puede dividir en subintervalos, tales que en cada uno de ellos la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ sean continuas en el siguiente sentido: $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en cada subintervalo abierto, y existen sus correspondientes límites laterales en los extremos de los subintervalos; es decir, en los extremos de los intervalos tanto $f(x)$ como $f'(x)$ pueden presentar discontinuidades de salto. Decimos que $f(x)$ tiene una *discontinuidad de salto* en el punto $x = a$, si existen tanto el límite por la izquierda $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a^-)$ como el límite por la derecha $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$, y son distintos.

La serie de Fourier de $f(x)$ en $[-L, L]$ es $2L$-periódica (es decir, periódica de periodo $2L$), pero como $f(x)$ no es necesariamente periódica, para estudiar la convergencia de la serie es necesario considerar la *extensión periódica* de $f(x)$.

2.2.2. Teorema de convergencia

En principio, una función $f(x)$ puede ser diferente de su serie de Fourier en el intervalo $[-L, L]$, con los coeficientes definidos por (2.17), ya que la serie puede no converger y si converge, puede que no converja a $f(x)$. Por tanto, usaremos la notación

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\ ,$$

donde el símbolo $\sim$ significa que la serie es la serie de Fourier de $f(x)$, aunque la serie diverja o converja en algún punto x a un valor que no sea $f(x)$.

Teorema de convergencia de las series de Fourier. Si $f(x)$ es C^1 a trozos en el $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge

- a la extensión periódica de $f(x)$, en aquellos puntos x para los que la extensión periódica de f sea continua,
- a la media de los dos límites laterales

$$\frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big),$$

  en aquellos puntos x para los que la extensión periódica de f tenga una discontinuidad de salto.

2.2.3. Series de Fourier de senos y de cosenos

Consideremos ahora las series que sólo contienen senos y las que sólo contienen cosenos, que son casos especiales de series de Fourier.

Series de Fourier de senos

Una función $f(x)$ es *impar* si $f(-x) = -f(x)$. Los coeficientes de Fourier de una función impar verifican $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$, dado que el integrando $f(x) \cos n\pi x/L$ que aparece en la definición de dichos coeficientes es una función impar. Por tanto, las funciones coseno no aparecen en la serie de Fourier de una función impar. La serie de Fourier de una función impar es una serie de senos (que son funciones impares):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

donde los coeficientes verifican:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Si $f(x)$ está definida en el intervalo $[0, L]$, como sucedía al estudiar la propagación del calor en una varilla con temperatura cero en los extremos, podemos definir su extensión impar periódica como la función $2L$-periódica que vale $f(x)$ si $x \in [0, L]$, y que vale $f(x) = -f(-x)$ si $x \in (-L, 0)$. Entonces, está claro que la serie de Fourier de senos de $f(x)$ en $[0, L]$ que hallábamos en el capítulo anterior es igual a la serie de Fourier de la extensión impar de $f(x)$ en $[-L, L]$.

Series de Fourier de cosenos

Una función $f(x)$ es *par* si $f(-x) = f(x)$. Los coeficientes de Fourier de una función par verifican $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$, dado que el integrando $f(x) \operatorname{sen} n\pi x/L$ que aparece en la definición de dichos coeficientes es una función impar. Por tanto, las funciones seno no aparecen en la serie de Fourier de una función par. La serie de Fourier de una función par es una serie de cosenos (que son funciones pares):

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

donde los coeficientes verifican:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x)\, dx.$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Si $f(x)$ está definida en el intervalo $[0, L]$, como sucedía al estudiar la propagación del calor en una varilla con extremos aislados, podemos definir su extensión par periódica como la función $2L$-periódica que vale $f(x)$ si $x \in [0, L]$, y que vale $f(x) = f(-x)$ si $x \in (-L, 0)$. Entonces, está claro que la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ en $[0, L]$ que hallábamos en el capítulo anterior es igual a la serie de Fourier de la extensión par de $f(x)$ en $[-L, L]$.

Continuidad de las series de Fourier

Como consecuencia de todo lo anterior se tienen los tres siguientes resultados.

Teorema de continuidad de las series de Fourier. Si $f(x)$ es C^1 a trozos en $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ es continua si y sólo si $f(x)$ es continua en $[-L, L]$ y $f(-L) = f(L)$.

Teorema de continuidad de las series de cosenos. Si $f(x)$ es C^1 a trozos en $[0, L]$, entonces la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ es continua si y sólo si $f(x)$ es continua en $[0, L]$.

Teorema de continuidad de las series de senos. Si $f(x)$ es C^1 a trozos en $[0, L]$, entonces la serie de Fourier de senos de $f(x)$ es continua si y sólo si $f(x)$ es continua en $[0, L]$, $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$.

2.2.4. Otros resultados sobre series de Fourier

Al considerar series de Fourier para resolver EDP, son necesarios algunos resultados que se incluyen a continuación.

Proposición.

- Si la serie de Fourier de $f(x)$ es continua y $f'(x)$ es C^1 a trozos, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ se puede derivar término a término, y la serie obtenida es la serie de Fourier de $f'(x)$ (que converge a $f'(x)$ en los puntos de continuidad de $f'(x)$).
- Si $f(x)$ es continua en $[0, L]$ y $f'(x)$ es C^1 a trozos en $[0, L]$, entonces la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ se puede derivar término a término, y la serie obtenida es la serie de Fourier de senos de $f'(x)$ (que converge a $f'(x)$ en los puntos de continuidad de $f'(x)$).
- Si $f(x)$ es continua en $[0, L]$ y $f'(x)$ es C^1 a trozos en $[0, L]$, entonces se puede derivar término a término la serie de Fourier de senos de $f(x)$ si y sólo si $f(0) = f(L) = 0$. En el caso de que se pueda derivar término a término, la serie obtenida es la serie de Fourier de cosenos de $f'(x)$ (que converge a $f'(x)$ en los puntos de continuidad de $f'(x)$).

En general, para el tercer caso de la proposición anterior puede probarse que:

Si $f(x)$ es continua en $[0, L]$ y $f'(x)$ es C^1 a trozos, entonces la serie de Fourier de senos de $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} ,$$

no se puede derivar término a término en general, pero se tiene

$$f'(x) \sim \frac{1}{L}\big(f(L) - f(0)\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} B_n + \frac{2}{L}\big((-1)^n f(L) - f(0)\big) \right) \cos \frac{n\pi x}{L} ,$$

que, como puede verse directamente, coincide con la derivada término a término de la serie de Fourier de senos de $f(x)$ si y sólo si $f(0) = f(L) = 0$.

Proposición. Si $u(x, t)$ es una función continua en $[-L, L] \times [0, \infty)$ y además $\partial u/\partial t$ es C^1 a trozos como función de $x \in [-L, L]$ para cada $t \in [0, \infty)$, entonces su serie de Fourier

$$u(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} ,$$

se puede derivar término a término con respecto al parámetro t, obteniendo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sim a_0'(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} .$$

Proposición. Si $f(x)$ es C^1 a trozos, entonces sus tres series de Fourier se pueden integrar término a término, y el resultado es una serie que converge para todo $x \in [-L, L]$ a la integral de $f(x)$.

Sin embargo, la serie obtenida puede **no** ser una serie de Fourier:
Si $f(x)$ es C^1 a trozos en $[-L, L]$, entonces tiene una serie de Fourier en dicho intervalo:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} ,$$

y la integración término a término da:

$$\int_{-L}^{x} f(t)\ dt \sim a_0(x+L) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} + \frac{b_n L}{n\pi} \left((-1)^n - \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

que, como puede verse directamente, es una serie de Fourier si y sólo si $a_0 = 0$.