APUNTES DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
PARA INGENIEROS DE TELECOMUNICACIONES

Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

3. Problemas de autovalores de Sturm-Liouville

3.1. Introducción

Un problema de autovalores de Sturm-Liouville regular consiste en una ecuación diferencial de Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right)+q(x)\varphi+\lambda\sigma(x)\varphi=0, \qquad a<x<b, \tag{3.18}$$

con condiciones de contorno del tipo

$$\begin{cases} \beta_1\varphi(a)+\beta_2\dfrac{d\varphi}{dx}(a) &= 0, \\ \beta_3\varphi(b)+\beta_4\dfrac{d\varphi}{dx}(b) &= 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

y coeficientes β_i dados. Además, los coeficientes p, q y σ deben ser continuos, con $p>0$ y $\sigma>0$ en todo el intervalo $[a,b]$. Las incógnitas son la función solución u y el parámetro λ, denominados *autofunción* y *autovalor*, respectivamente.

Teorem de Sturm-Liouville. Los siguientes resultados son válidos para todos los problemas de Sturm-Liouville regulares.

1. Todos los autovalores λ son reales.

2. Existe una cantidad infinita de autovalores:

$$\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\lambda_{n+1}<\ldots$$

con un autovalor mínimo, y verificando $\lambda_n\to\infty$ cuando $n\to\infty$.

3. A cada autovalor λ_n le corresponde una autofunción, denotada por $\varphi_n(x)$ (que es única salvo constantes multiplicativas), que tiene exactamente $n-1$ ceros en el intervalo $a<x<b$.

4. Las autofunciones $\varphi_n(x)$ forman un conjunto "completo", es decir, cualquier función suave a trozos $f(x)$ se puede representar en serie de Fourier generalizada de las autofunciones:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x),$$

para ciertos coeficientes generalizados de Fourier a_n. Más aún, esta serie converge al valor medio $[f(x+)+f(x-)]/2$ en $a<x<b$.

5. Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales respecto a la función peso $\sigma(x)$, es decir

$$\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)\sigma(x)\,dx=0, \qquad \text{si } \lambda_n\neq\lambda_m.$$

6. Cada autovalor está relacionado con su autofunción correspondiente mediante el *cociente de Rayleigh*:

$$\lambda = \mathcal{CR}(\varphi) \equiv \frac{-p\varphi\, d\varphi/dx|_a^b + \displaystyle\int_a^b \left[p(d\varphi/dx)^2 - q\varphi^2\right]\, dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi^2\sigma\, dx}.$$

Algunos de estos resultados pueden ser válidos también para problemas de autovalores de Sturm-Liouville que no son regulares, es decir, con condiciones de contorno más generales, de periodicidad o de no singularidad. Las condiciones de periodicidad son $\varphi(a) = \varphi(b)$, $p(a)\dfrac{d\varphi}{dx}(a) = p(b)\dfrac{d\varphi}{dx}(b)$; las condiciones de no singularidad imponen φ acotado siempre que la función $p(x)$ se anule, de manera que el producto $p\varphi$ se anule en ese punto.

3.2. Ejemplo e ilustración del teorema de Sturm-Liouville

Podemos ver el significado de estos resultados usando el ejemplo más sencillo de problema de Sturm-Liouville regular:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi & = & 0, \\ \varphi(0) & = & 0, \\ \varphi(L) & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.20}$$

En este caso la ecuación diferencial con coeficientes constantes tiene condiciones de contorno nulas en ambos extremos. Como ya sabemos, los autovalores y sus correspondientes autofunciones son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

lo que da lugar a una serie de Fourier de senos.

Vemos que los autovalores son reales, forman una sucesión con un primer autovalor $\lambda_1 = (\pi/L)^2$, y que se tiene $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Las autofunciones $\varphi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x/L$, una para cada autovalor, tienen exactamente $(n-1)$ ceros cada una en el intervalo $(0, L)$: la función $\operatorname{sen} \pi x/L$ no tiene ceros, $\operatorname{sen} 2\pi x/L$ se anula una única vez en $(0, L)$, $\operatorname{sen} 3\pi x/L$ tiene dos ceros, etc.

Las autofunciones se pueden utilizar siempre para representar cualquier función suave a trozos $f(x)$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Reconocemos en este desarrollo una serie de Fourier de senos.

De hecho estas autofunciones son ortogonales con peso $\sigma = 1$, como sabemos de las series de Fourier. Los coeficientes a_n son aquí los coeficientes de Fourier del desarrollo en serie de senos.

Finalmente cada autovalor se relaciona con su autofunción de la siguiente manera,

$$\lambda_n = \mathcal{CR}(\varphi_n) = \frac{\displaystyle\int_0^L (d\varphi_n/dx)^2\, dx}{\displaystyle\int_0^L (\varphi_n)^2\, dx} = \frac{(n\pi/L)^2 \displaystyle\int_0^L (\cos(n\pi x/L))^2\, dx}{\displaystyle\int_0^L (\operatorname{sen}(n\pi x/L))^2\, dx} = (n\pi/L)^2\,.$$

Demostraremos en lo que sigue parte del teorema; no demostraremos la existencia de la sucesión de autovalores, excepto en los casos en los que podremos calcularlos de manera explícita, ni tampoco probaremos la propiedad de los ceros de las autofunciones. Para la demostración del resto de propiedades utilizaremos las llamadas *identidad de Lagrange* y *fórmula de Green*.

3.3. Demostración del teorema de Sturm-Liouville

3.3.1. Identidad de Lagrange.

En la mayoría de las demostraciones que siguen será fundamental el uso de la fórmula conocida como *identidad de Lagrange*. Calculemos la expresión $uL(v) - vL(u)$ para dos funciones u y v cualesquiera, no necesariamente autofunciones. Recordemos que

$$L(u) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu \quad \text{y} \quad L(v) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + qv,$$

y que entonces

$$uL(v) - vL(u) = u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) - v\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right).$$

El miembro derecho se puede escribir como una diferencial exacta:

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx}\left[p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right], \tag{3.21}$$

expresión que se conoce como *forma diferencial de la identidad de Lagrange.*

3.3.2. Fórmula de Green.

La forma integral de la identidad de Lagrange también se conoce como *fórmula de Green*. Se obtiene integrando la expresión (3.21),

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)]dx = p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_a^b \tag{3.22}$$

para funciones u y v regulares.

Si $p = 1$ y $q = 0$ (en cuyo caso $L = d^2/dx^2$, como el ejemplo anterior), la identidad (3.21) nos dice que

$$\int_a^b \left(u\frac{d^2v}{dx^2} - v\frac{d^2u}{dx^2}\right)\,dx = \left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_a^b.$$

3.3.3. Operadores autoadjuntos.

Como caso importante de la fórmula de Green, supongamos que u y v son dos funciones cualesquiera, pero con la restricción adicional de que los términos de contorno se anulan,

$$p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_a^b = 0.$$

Entonces, (3.22) se convierte en $\displaystyle\int_a^b [uL(v) - vL(u)]\,dx = 0$.

Por ejemplo podemos tomar funciones u y v tales que ambas cumplan las mismas condiciones de contorno homogéneas (3.19). Pero también condiciones de periodicidad anulan el término frontera. Por tanto, para estas funciones u y v, tenemos que

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)]\ dx = 0. \tag{3.23}$$

Cuando se cumple (3.23) decimos que el operador L, con sus correspondientes condiciones de contorno, es *autoadjunto*.

3.3.4. Ortogonalidad.

Demostraremos ahora la utilidad de la fórmula de Green. Comenzaremos probando la importante relación de ortogonalidad de los problemas de autovalores de Sturm-Liouville. Para muchos tipos de condiciones de contorno, las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales respecto al peso $\sigma(x)$. Para probar esta afirmación, sean λ_n y λ_m los autovalores correspondientes a las autofunciones $\varphi_n(x)$ y $\varphi_m(x)$. Usando la notación de operadores, las ecuaciones diferenciales que cumplen estas autofunciones son

$$\begin{aligned} L(\varphi_n) + \lambda_n \sigma(x)\varphi_n &= 0, \\ L(\varphi_m) + \lambda_m \sigma(x)\varphi_m &= 0. \end{aligned}$$

Además, tanto φ_n como φ_m cumplen las mismas condiciones de contorno homogéneas. Podemos tomar pues $u = \varphi_m$ y $v = \varphi_n$ en la fórmula de Green, obteniendo:

$$\int_a^b [\varphi_m L(\varphi_n) - \varphi_n L(\varphi_m)]\ dx = p\left(\varphi_m \frac{d\varphi_n}{dx} - \varphi_n \frac{d\varphi_m}{dx}\right)\Bigg|_a^b.$$

Así tenemos

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \varphi_n \varphi_m \sigma\ dx = p\left(\varphi_m \frac{d\varphi_n}{dx} - \varphi_n \frac{d\varphi_m}{dx}\right)\Bigg|_a^b.$$

Como u y v son autofunciones, esto implica que

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \varphi_n \varphi_m \sigma\ dx = 0.$$

Si $\lambda_m \neq \lambda_n$, entonces se sigue inmediatamente que

$$\int_a^b \varphi_n \varphi_m \sigma\ dx = 0. \tag{3.24}$$

En otras palabras, las autofunciones (φ_n y φ_m) que corresponden a autovalores diferentes ($\lambda_n \neq \lambda_m$) son ortogonales con peso $\sigma(x)$.

3.3.5. Autovalores reales.

Podemos usar la ortogonalidad de las autofunciones para probar también que los autovalores son reales. Supongamos que λ es un autovalor complejo y $\varphi(x)$ la correspondiente autofunción (que también puede ser compleja, ya que la ecuación diferencial que define la autofunción sería compleja en ese caso). Tenemos pues:

$$L(\varphi) + \lambda\sigma\varphi = 0.$$

Tomando el conjugado complejo en los dos miembros de la ecuación obtenemos

$$\overline{L(\varphi)} + \overline{\lambda}\sigma\overline{\varphi} = 0.$$

Como el coeficiente σ es real, se tiene $\overline{\sigma} = \sigma$. El conjugado de $L(\varphi)$ es exactamente L actuando sobre el conjugado de φ, es decir, $\overline{L(\varphi)} = L(\overline{\varphi})$, porque los coeficientes del operador diferencial lineal son también reales. Por tanto,

$$L(\overline{\varphi}) + \overline{\lambda}\sigma\overline{\varphi} = 0.$$

Por otro lado, si φ cumple unas ciertas condiciones de contorno con coeficientes reales, entonces $\overline{\varphi}$ cumple las mismas condiciones de contorno. La ecuación anterior y las condiciones de contorno muestran que $\overline{\varphi}$ verifica el problema de autovalores de Sturm-Liouville con autovalor $\overline{\lambda}$. Hemos probado el siguiente resultado: si λ es un autovalor complejo y su autofunción correspondiente es φ, entonces $\overline{\lambda}$ es también un autovalor y su autofunción correspondiente es $\overline{\varphi}$.

Si $\lambda \neq \overline{\lambda}$, se tendría que φ y $\overline{\varphi}$ deberían ser ortogonales, cosa que resulta en una contradicción, pues $\varphi\overline{\varphi} = |\varphi|^2 > 0$. Así pues $\lambda = \overline{\lambda}$, y λ es real.

3.3.6. Desarrollo generalizado de Fourier.

Al igual que con las series de Fourier de senos, usamos la condición de ortogonalidad para calcular los coeficientes de Fourier generalizados. Escribimos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

y multiplicamos por $\varphi_m(x)$ y $\sigma(x)$. Integrando desde $x = a$ hasta $x = b$, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\sigma(x)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\sigma(x)\ dx,$$

y como las autofunciones son ortogonales, con respecto al peso $\sigma(x)$, todas las integrales del miembro derecho se anulan excepto la correspondiente a n igual a m:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\sigma(x)\ dx = a_m \int_a^b \varphi_m^2(x)\sigma(x)\ dx.$$

La integral de la derecha no es nula porque el peso debe ser positivo (por la definición de problema de Sturm-Liouville regular) y φ_n no puede ser idénticamente nula por ser autofunción. Podemos, por tanto, dividir por la integral para calcular el coeficiente de Fourier generalizado a_m:

$$a_m = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\sigma(x)\ dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi_m^2(x)\sigma(x)\ dx}. \tag{3.25}$$

3.3.7. Unicidad de las autofunciones en los casos regular y singular.

Probemos a continuación que a cada autovalor le corresponde una única autofunción (excepto en el caso de condiciones de contorno periódicas). Supongamos que hubiera dos autofunciones distintas, φ_1 y φ_2, asociadas al mismo autovalor λ. Diremos entonces que λ es un autovalor "múltiple" con multiplicidad al menos dos. En este caso se verificarán a la vez las dos identidades

$$\begin{aligned} L(\varphi_1) + \lambda\sigma\varphi_1 &= 0, \\ L(\varphi_2) + \lambda\sigma\varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Como λ es el mismo en ambas expresiones, tenemos

$$\varphi_2 L(\varphi_1) - \varphi_1 L(\varphi_2) = 0.$$

Utilizando la forma diferencial de la identidad de Lagrange tenemos

$$\varphi_2 L(\varphi_1) - \varphi_1 L(\varphi_2) = \frac{d}{dx}\left[p\left(\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} - \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx}\right)\right].$$

De la expresión anterior se sigue

$$p\left(\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} - \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx}\right) = \text{ constante.} \tag{3.26}$$

Podemos ahora calcular la constante a partir de las condiciones de contorno: esta constante es nula si *al menos una de las condiciones de contorno es de tipo Sturm-Liouville regular (o de tipo singular)*. Para cualesquiera de estas condiciones de contorno se sigue que

$$\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} - \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} = 0.$$

Esto es equivalente a $\dfrac{d}{dx}(\varphi_2/\varphi_1) = 0$, y de aquí deducimos que para estas condiciones de contorno

$$\varphi_2 = c\varphi_1.$$

Esto demuestra que con las condiciones de contorno anteriores, dos autofunciones cualesquiera, φ_1 y φ_2, correspondientes al mismo autovalor, deben ser una un múltiplo de la otra.

Cuando las condiciones de contorno son periódicas, *no* obtenemos que la constante de (3.26) sea necesariamente cero. Por ejemplo, consideremos el problema de autovalores con condiciones de contorno periódicas,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi &= 0, \\ \varphi(-L) &= \varphi(L), \\ \frac{d\varphi}{dx}(-L) &= \frac{d\varphi}{dx}(L). \end{aligned} \right. \tag{3.27}$$

Sabemos que el autovalor $\lambda = 0$ tiene por autofunción la función $\varphi = 1$. Los otros autovalores, $(n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, tienen asociadas, cada uno, dos autofunciones linealmente independientes, $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ y $\cos(n\pi x/L)$, lo que, según hemos visto, da lugar a una serie de Fourier completa, en senos y cosenos.

3.3.8. Cociente de Rayleigh

El cociente de Rayleigh se puede obtener a partir de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] + q(x)\varphi + \lambda\sigma(x)\varphi = 0, \tag{3.28}$$

multiplicando esta igualdad por φ e integrando,

$$\int_a^b \left[\varphi\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right) + q\varphi^2\right] \, dx + \lambda\int_a^b \varphi^2\sigma \, dx = 0.$$

Como $\displaystyle\int_a^b \varphi^2\sigma \, dx > 0$, podemos despejar λ, e integrando por partes obtenemos la expresión final del cociente de Rayleigh,

$$\lambda = \mathcal{CR}(\varphi) = \frac{-p\varphi\dfrac{d\varphi}{dx}\Big|_a^b + \displaystyle\int_a^b \left[p\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - q\varphi^2\right] \, dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi^2\sigma \, dx}. \tag{3.29}$$

3.3.9. Autovalores no negativos.

A menudo, en los problemas físicos el signo de λ es bastante importante. Por ejemplo, en ciertos problemas de flujo de calor la parte temporal de la solución separada verifica la ecuación $dh/dt + \lambda h = 0$. Así, λ positivo corresponde a un decaimiento exponencial en el tiempo, mientras que λ negativo corresponde a un crecimiento exponencial. Por otro lado, en ciertos problemas de vibración, la parte temporal verifica la ecuación $d^2h/dt^2 = -\lambda h$. En ese caso, sólo los valores positivos de λ corresponden a las oscilaciones esperables. Por tanto, en los dos tipos de problemas es normal esperar que $\lambda \geq 0$. Ahora bien, el cociente de Rayleigh prueba directamente que $\lambda \geq 0$ si, por ejemplo, se cumplen las dos condiciones :

$$\text{(a)} \quad -p\varphi\frac{d\varphi}{dx}\Big|_a^b \geq 0 \qquad \text{y} \quad \text{(b)} \;\; q \leq 0.$$

Las condiciones (a) y (b) son razonables físicamente en el caso de autovalores λ no negativos. Por ejemplo los tipos más simples de condiciones de contorno homogéneas, $\varphi = 0$ y $d\varphi/dx = 0$, no contribuyen a este término de frontera, luego cumplen (a). La condición $d\varphi/dx = h\varphi$, que aparece por ejemplo en los casos físicos de la ley de enfriamiento de Newton o de condición de contorno elástica, contiene una constante $h > 0$ en el extremo izquierdo $x = a$, y por tanto proporcionará una contribución positiva en ese punto. Las condiciones de contorno periódicas tampoco contribuyen al término de frontera. Por tanto, en todos estos casos el término $-p\varphi \, d\varphi/dx|_a^b \geq 0$.

En cuanto a la condición (b), por ejemplo, en los problemas de flujo de calor, se tiene $q = \alpha$, puesto que $Q = \alpha u$, y la condición $q \leq 0$ corresponde al caso de una reacción que absorbe energía (endotérmica), mientras que para problemas de vibración, esta misma condición corresponde a una fuerza de recuperación.

3.3.10. Principio de minimización.

El cociente de Rayleigh no se puede utilizar para calcular explícitamente el autovalor, porque φ es desconocida, pero puede ser bastante útil para estimar los autovalores. Para ello usamos el siguiente *principio de minimización*: el valor mínimo del cociente de Rayleigh evaluado sobre todas las funciones continuas que cumplen las condiciones de contorno es igual al primer autovalor, esto es:

$$\lambda_1 = \min_u \mathcal{CR}(u). \tag{3.30}$$

El mínimo se calcula sobre todas las funciones continuas que cumplen las condiciones de contorno y se alcanza solamente para $u = \varphi_1(x)$, la autofunción correspondiente al autovalor mínimo. En problemas como el del calor, el autovalor mínimo es de gran importancia.