Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

4. Problemas no homogéneos

4.1. Problemas de Sturm-Liouville no homogéneos: Alternativa de Fredholm

Sea el problema

$$L(u) = f(x) \tag{4.31}$$

donde L es un operador diferencial de tipo Sturm-Liouville sujeto a condiciones de contorno homogéneas que hagan que L sea autoadjunto. Para resolver el problema por el método de desarrollo en autofunciones introducimos un problema de autovalores "asociado"

$$L(\varphi) + \lambda\sigma\varphi = 0 \tag{4.32}$$

donde el peso σ se elige de modo que la solución de (4.32) sea conocida. Buscamos ahora una solución de (4.31) desarrollando la solución buscada en serie de Fourier generalizada de autofunciones del problema (4.32):

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(x).$$

Puede probarse usando la fórmula de Green que se puede diferenciar esta serie término a término, obteniendo que:

$$f(x) = L(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, L(\varphi_n)(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma(x) \varphi_n(x)\,.$$

Como las autofunciones φ_n son ortogonales respecto del peso σ tenemos que debe ser

$$-a_n\lambda_n = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b (\varphi_n(x))^2\sigma(x)\,dx}\,. \tag{4.33}$$

Concluimos, por tanto, que si todos los autovalores son no nulos, entonces la solución de (4.31) es única:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(x)\,, \qquad a_n = -\frac{1}{\lambda_n}\,\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b (\varphi_n(x))^2\sigma(x)\,dx}\,.$$

Ahora bien, si $\lambda_{n_0} = 0$ para algún n_0, puede ocurrir que no haya soluciones de (4.31), ya que (4.33) sería imposible si

$$\lambda_{n_0} = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi_{n_0}(x)\,dx \neq 0\,.$$

Pero también puede ocurrir, si $\lambda_{n_0} = 0$ para algún n_0, que (4.31) tenga infinitas soluciones si:

$$\lambda_{n_0} = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi_{n_0}(x)\,dx = 0\,,$$

puesto que, en este caso, el coeficiente a_{n_0} estaría indeterminado.

Esta dicotomía se conoce como la *Alternativa de Fredholm*: se cumple uno de los dos siguientes hechos:

- 1. Si $u = 0$ es la única solución del problema homogéneo $L(u) = 0$ (es decir, si $\lambda = 0$ no es autovalor de (4.32)), entonces el problema no homogéneo (4.31) tiene solución única.

- 2. Si existen soluciones homogéneas no triviales (es decir, si $\lambda = 0$ es autovalor de (4.32)), entonces el problema no homogéneo (4.31) puede no tener solución o puede tener infinitas soluciones dependiendo de que sea
$$\int_a^b f(x)\,\varphi_h \neq 0\,,$$
para alguna solución no trivial φ_h de la ecuación $L(\varphi) = 0$, ó
$$\int_a^b f(x)\,\varphi_h = 0$$
para toda solución no trivial φ_h de la ecuación $L(\varphi) = 0$.

4.2. Problemas de EDP's no homogéneos: el método de desarrollo en autofunciones.

En esta sección vamos a ver cómo resolver problemas de EDP's que tienen condiciones de contorno no homogéneas. Para resolverlo usamos el método de desarrollo en autofunciones. A modo de ejemplo, consideremos el siguiente problema para la ecuación del calor en un intervalo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + Q(x,t)\,, \\ u(0,t) = A(t)\,,\ u(L,t) = B(t) \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Consideramos el problema homogéneo asociado,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_n}{dx^2}(x) + \lambda_n \varphi_n(x) = 0\,, \\ \varphi_n(0) = 0\,,\ \varphi_n(L) = 0\,, \end{cases}$$

cuyas autofunciones y autovalores son $\varphi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x/L$, y $\lambda_n = (n\pi/L)^2$. Podemos desarrollar cualquier función suave a trozos en términos de estas autofunciones. Por tanto,

$$u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\varphi_n(x).$$

Para derivar respecto de t, podemos derivar la serie término a término:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt}\,\varphi_n(x). \tag{4.34}$$

Consideremos ahora dos casos:

Caso 1: Si el problema inicial es homogéneo, es decir, si $A(t) = B(t) = 0$ para todo t, entonces como la solución buscada $u(x,t)$ verifica las mismas condiciones homogéneas que las autofunciones $\varphi_n(x)$, se puede derivar la serie término a término respecto de x:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt}(t)\,\varphi_n(x)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\frac{d^2\varphi_n}{dx^2}(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\lambda_n\varphi_n(x).$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{db_n}{dt}(t) + \lambda_n k b_n(t)\right)\varphi_n(x) \sim Q(x,t).$$

lo que significa que la serie del lado izquierdo debe ser la serie de Fourier de $Q(x,t)$. Por tanto, si

$$Q(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\varphi_n(x)\,,$$

tenemos usando la ortogonalidad de las autofunciones, que

$$\frac{db_n}{dt}(t) + \lambda_n k b_n(t) = q_n(t) = \frac{\displaystyle\int_0^L Q(x,t)\,\varphi_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^L \varphi_n^2(x)\,dx} = \frac{2}{L}\int_0^L Q(x,t)\,\varphi_n(x)\,dx\,.$$

Esta ecuación es una EDO lineal no homogénea de primer orden. Para resolverla usamos la condición inicial que se obtiene de la condición inicial de la EDP:

$$f(x) = u(x,0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)\varphi_n(x)$$

por lo que, nuevamente por la ortogonalidad de las autofunciones,

$$b_n(0) = \frac{\displaystyle\int_0^L f(x)\,\varphi_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^L \varphi_n^2(x)\,dx} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\,. \tag{4.35}$$

La solución de este problema de valor inicial, es:

$$b_n(t) = a_n(0)\,e^{-\lambda_n kt} + e^{-\lambda_n kt}\int_0^t q_n(\tau)\,e^{\lambda_n kt}\,d\tau\,.$$

Caso 2: Si el problema inicial no es homogéneo, entonces no podemos derivar la serie de $u(x,t)$ con respecto a x término a término, pero a partir de (4.34) tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt}(t)\,\varphi_n(x) \sim k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + Q(x,t),$$

con lo que, usando la ortogonalidad de las autofunciones,

$$\frac{db_n}{dt} = \frac{\displaystyle\int_0^L \left(k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) \right) \varphi_n(x)\, dx}{\displaystyle\int_0^L \varphi_n^2\, dx} = q_n(t) + k\, \frac{\displaystyle\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, \varphi_n(x)\, dx}{\displaystyle\int_0^L \varphi_n^2\, dx}. \qquad (4.36)$$

donde $q_n(t)$ son los coeficientes de Fourier de $Q(x,t)$

$$q_n(t) = \frac{\displaystyle\int_0^L Q(x,t)\, \varphi_n(x)\, dx}{\displaystyle\int_0^L \varphi_n^2\, dx} = \frac{2}{L} \int_0^L Q(x,t)\, \varphi_n(x)\, dx\, .$$

Para evaluar la integral que aparece en (4.36) usamos la fórmula de Green para el operador de Sturm-Liouville $L = d^2/dx^2$:

$$\int_0^L \left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)\, dx = \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} \right)\Bigg|_0^L .$$

Poniendo en esta fórmula $u =$ la solución de nuestro problema, y $v = \varphi_n$, se obtiene que:

$$\int_0^L \varphi_n\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx = -\lambda_n \int_0^L u\, \varphi_n\, dx - \frac{n\pi}{L}[B(t)(-1)^n - A(t)].$$

Además como los $b_n(t)$ son los coeficientes de Fourier generalizados de $u(x,t)$, debido a la ortogonalidad de las autofunciones, tenemos que

$$b_n(t) = \frac{\displaystyle\int_0^L u\, \varphi_n\, dx}{\displaystyle\int_0^L \varphi_n^2\, dx}.$$

Por tanto, la ecuación (4.36) se reduce a

$$\frac{db_n}{dt} + k\lambda_n b_n = q_n(t) + \frac{k(n\pi/L)[A(t) - (-1)^n B(t)]}{\displaystyle\int_0^L \varphi_n^2(x)\, dx} = q_n(t) + \frac{2kn\pi}{L^2}\, [A(t) - (-1)^n B(t)].$$

Esta ecuación es nuevamente una EDO lineal no homogénea de primer orden. Para resolverla usamos como en el caso anterior los valores iniciales (4.35). Esta ecuación es bastante similar a la que se obtuvo en el caso anterior, ya que sólo ha cambiado el término no homogéneo. La solución, es por tanto,

$$b_n(t) = a_n(0)\, e^{-\lambda_n kt} + e^{-\lambda_n kt} \int_0^t \left(q_n(\tau) + \frac{2kn\pi}{L^2}\, [A(\tau) - (-1)^n B(\tau)] \right) e^{\lambda_n kt}\, d\tau\, .$$

4.2.1. Otro ejemplo: Vibraciones forzadas de una membrana

A modo de ejemplo, dado $\Omega \subset \mathbf{R^2}$ abierto, consideremos el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \Delta u + Q(x,y,t)\, , & (x,y) \in \Omega, t > 0, \\ u(x,y,t) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,y,0) = \alpha(x,y)\, , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \beta(x,y)\, , & (x,y) \in \Omega, \end{cases}$$

donde $Q(x,y,t)$ representa una fuerza externa y $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ la posición y velocidad inicial de una membrana cuya forma viene descrita por la función $u(x,y,t)$.

El problema de autovalores asociado es

$$\begin{cases} c^2\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0\,, & (x,y)\in\Omega, \\ \varphi(x,y) = 0 & (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases}$$

Las autofunciones de este problema forman un conjunto completo y son ortogonales con peso 1. Usando los cocientes de Rayleigh se prueba que $\lambda > 0$. Sin embargo, las autofunciones específicas del problema dependen de la forma geométrica de la región Ω. Sólo podemos escribirlas explícitamente cuando Ω tiene una geometría simple. Designemos a las autofunciones del problema homogéneo asociado por $\varphi_n(x,y)$. Cualquier función suave a trozos, puede desarrollarse en serie de las autofunciones. Por tanto,

$$u(x,y,t) \sim \sum_n a_n(t)\,\varphi_n(x,y).$$

Resolveremos el problema encontrando los coeficientes $a_n(t)$ que verificarán una EDO lineal no homogénea de segundo orden. Para encontrarla, podemos proceder de dos modos. O bien diferenciamos término a término la serie o bien hacemos uso de la fórmula de Green para el operador de Laplace. Aquí, puesto que tanto u como las autofunciones φ_n verifican condiciones de contorno homogéneas en la frontera de Ω, podemos diferenciar la serie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \sim \sum_n \frac{d^2 a_n}{dt^2}(t)\,\varphi_n(x,y) = -\sum_n c^2\lambda_n\varphi_n(x,y).$$

Desarrollando también $Q(x,y,t)$ en serie de autofunciones

$$Q(x,y,t) \sim \sum_n q_n(t)\varphi_n(x,y), \qquad q_n(t) = \frac{\displaystyle\iint Q\varphi_n\,dx\,dy}{\displaystyle\iint \varphi_n^2\,dx\,dy},$$

e igualando los coeficientes en la EDP de nuestro problema, obtenemos la EDO para los a_n's:

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2}(t) + c^2\lambda_n a_n(t) = q_n(t).$$

Usando ahora las condiciones iniciales y la ortogonalidad de las autofunciones, tenemos

$$\alpha(x,y) = u(x,y,0) \sim \textstyle\sum_n a_n(0)\varphi_n(x,y) \quad\Longrightarrow\quad a_n(0) = \frac{\displaystyle\iint \alpha(x,y)\varphi_n(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint \varphi_n^2\,dx\,dy},$$

$$\beta(x,y) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) \sim \sum_n \frac{da_n}{dt}(0)\,\varphi_n(x,y) \quad\Longrightarrow\quad \frac{da_n}{dt}(0) = \frac{\displaystyle\iint \beta(x,y)\varphi_n(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint \varphi_n^2\,dx\,dy},$$

que son las condiciones iniciales para $a_n(t)$. La solución general de esta EDO se obtiene sumando una solución general de la ecuación homogénea y una solución particular de la EDO completa. Esta última puede calcularse por el método de variación de los parámetros. Como $\operatorname{sen} c\sqrt{\lambda_n}t$ y $\cos c\sqrt{\lambda_n}t$ son soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea se prueba que

$$a_n(t) = c_1\cos c\sqrt{\lambda_n}t + c_2\operatorname{sen} c\sqrt{\lambda_n}t + \int_0^t q_n(\tau)\frac{\operatorname{sen} c\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)}{c\sqrt{\lambda_n}}d\tau.$$

Como

$$a_n(0) = c_1\,, \qquad \frac{da_n}{dt}(0) = c_2 c\sqrt{\lambda_n}.$$

tenemos que

$$c_1 = \frac{\displaystyle\iint \alpha(x,y)\varphi_n(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint \varphi_n^2\,dx\,dy}\,, \qquad c_2 = \frac{1}{c\sqrt{\lambda_n}}\,\frac{\displaystyle\iint \beta(x,y)\varphi_n(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint \varphi_n^2\,dx\,dy}.$$

4.2.2. El fenómeno de la resonancia

Supongamos ahora que la fuerza externa $Q(x,y,t)$ es oscilatoria en el tiempo, es decir por ejemplo,

$$Q(x,y,t) = Q(x,y)\cos\omega t\,.$$

Es claro que entonces los coeficientes del desarrollo en autofunciones de $Q(x,y,t)$ son:

$$q_n(t) = \gamma_n\cos\omega t\,, \qquad \gamma_n = \frac{\displaystyle\iint Q(x,y)\varphi_n(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint \varphi_n^2\,dx\,dy}.$$

Por tanto, en este caso, los coeficientes de la serie de Fourier generalizada de $u(x,y,t)$ verifican:

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + c^2\lambda_n a_n = \gamma_n\cos\omega t.$$

Como el lado derecho de esta ecuación es sencillo, podemos obtener una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados. Buscamos una solución de la forma

$$a_n(t) = A_n\cos\omega t.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$A_n(c^2\lambda_n - \omega^2) = \gamma_n \qquad \Longrightarrow \qquad A_n = \frac{\gamma_n}{c^2\lambda_n - \omega^2},$$

pero este cociente solamente es válido si $\omega^2 \neq c^2\lambda_n$ para todo n. Esto significa que *si la frecuencia de forzamiento ω es diferente de una frecuencia natural*, entonces tenemos la solución particular

$$a_n(t) = \frac{\gamma_n\cos\omega t}{c^2\lambda_n - \omega^2}, \tag{4.37}$$

y la solución general es

$$a_n(t) = \frac{\gamma_n\cos\omega t}{c^2\lambda_n - \omega^2} + c_1\cos c\sqrt{\lambda_n}t + c_2\operatorname{sen} c\sqrt{\lambda_n}t.$$

Sin embargo, *si la frecuencia de forzamiento ω coincide con una de las frecuencias naturales $c\sqrt{\lambda_n}$*, entonces tiene lugar el fenómeno conocido como **resonancia**. Si $\omega^2 = c^2\lambda_n$, para algún n, entonces para aquellos modos $\varphi_n(x,y)$ tales que $\omega^2 = c^2\lambda_n$, (4.37) no puede ser la solución buscada puesto que el miembro derecho de (4.37) es entonces una solución homogénea. En este caso es fácil ver que una solución particular es

$$a_n(t) = \frac{\gamma_n}{2\omega}\,t\operatorname{sen}\omega t,$$

y, por tanto, la solución general es

$$a_n(t) = \frac{\gamma_n}{2\omega}\, t \operatorname{sen} \omega t + c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t,$$

donde $\omega = c\sqrt{\lambda_n}$, para cualquier modo que resuene. Vemos que en este caso, la solución no es periódica en el tiempo ya que la amplitud de las oscilaciones crece proporcionalmente a t. Por tanto si hay resonancia, los modos resonantes, es decir, los correspondientes a la frecuencia de forzamiento crecen en el tiempo y no están acotados. En cambio, los otros modos de oscilación permanecen acotados y, después de un cierto tiempo, los modos resonantes dominarán. Por tanto, la estructura espacial de la solución se deberá principalmente a las autofunciones de los modos resonantes.