PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
2^{O} Ing. Telecomunicaciones
CURSO 2009–2010

1 Problemas de valores iniciales y de contorno

1.1 Clasificación de EDP de segundo orden

Problema 1.1.1 Clasificar y determinar las características de las ecuaciones siguientes:

i) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ii) $$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

iii) $$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$$

Problema 1.1.2 Transformar las siguientes ecuaciones a su forma canónica:

i) $$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u = 0$$

ii) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 5 = 0$$

iii) $$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$$

iv) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

v) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 17\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$$

vi) $$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 12\frac{\partial u}{\partial x} - 8\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Problema 1.1.3 Obtener la EDP cuya solución general es

i) $u(x,y) = f(x+y)$

ii) $u(x,y) = f(xy)$

iii) $u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$

iv) $u(x,y) = x^n f(y/x)$

1.2 Problemas bien propuestos

Problema 1.2.1 Comprobar que el siguiente problema no está bien propuesto en ningún caso:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 & x > 0,\ y > 0 \\ u(0,y) = f(y) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y) & \end{cases}$$

Problema 1.2.2 Considérese el problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \vec{\nu}$, siendo $\vec{\nu}(\vec{x})$ el vector normal exterior a la frontera en $\vec{x}$.

i) Si se entiende u como una distribución estacionaria del calor en Ω, explicar las condiciones físicas que se debe cumplir para que exista solución.

ii) Obtener esta condición de compatibilidad mediante el Teorema de la divergencia.

Problema 1.2.3 Sea $\Omega \subset I\!R^n$, $n \geq 1$ un dominio acotado regular.

i) Por medio del teorema de la divergencia determinar una expresión alternativa para

$$\int_\Omega u\, \Delta u$$

para $u \in C^2(\Omega)$.

ii) Demostrar, usando esta expresión, que la única solución $u \in C^2(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

es $u \equiv 0$.

iii) Demostrar que la solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

es única aplicando linealidad.

iv) Modificar los apartados anteriores para el problema con dato frontera tipo Neumann,

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

¿Qué resultado de unicidad se obtiene?

v) Modificar los apartados ii) y iii) para el problema con dato frontera mixto $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + hu = 0$ en $\partial\Omega$: demostrar que se obtiene unicidad de solución si $h > 0$, que corresponde a la *Ley de enfriamiento de Newton*.

Problema 1.2.4 Sea $\Omega \subset I\!R^n$, $n \geq 1$ un dominio acotado regular.

i) Demostrar la siguiente versión del *Principio del Máximo*: si $u \in C^2(\Omega)$ verifica

$$\begin{cases} \Delta u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

entonces el máximo de u se alcanza en la frontera,

$$\max_{\vec{x} \in \overline{\Omega}} u(\vec{x}) = \max_{\vec{x} \in \partial\Omega} g(\vec{x})$$

(Obtener una contradicción si u tiene un máximo interior) *ii)* Aplicar este resultado a la función $v(\vec{x}) = u(\vec{x}) + \varepsilon|\vec{x}|^2$ y pasando al límite $\varepsilon \to 0$ deducir el Principio del Máximo si $\Delta u \geq 0$.

iii) Deducir de este resultado (de nuevo) la unicidad de solución trivial para el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Problema 1.2.5

i) Obtener el Principio del Máximo para la ecuación del calor: si $u \in C^2(\Omega \times [0,T])$ verifica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0 & \vec{x} \in \Omega,\ t > 0 \\ u = g & \vec{x} \in \partial\Omega \\ u = h & t = 0 \end{cases}$$

entonces el máximo se alcanza en la frontera o en el tiempo inicial,

$$\max_{\vec{x} \in \overline{\Omega},\, t \in [0,T]} u(\vec{x}, t) = \max \left\{ \max_{\vec{x} \in \partial\Omega,\, t \in [0,T]} g(\vec{x}, t),\ \max_{\vec{x} \in \overline{\Omega}} h(\vec{x}) \right\}$$

ii) Obtener unicidad de solución para el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f & \vec{x} \in \Omega,\ t > 0 \\ u = g & \vec{x} \in \partial\Omega \\ u = h & t = 0 \end{cases}$$

Problema 1.2.6

i) Escribir el operador laplaciano en dimensión $n = 2$ en coordenadas polares.

ii) Escribir el operador laplaciano en dimensión $n \geq 1$ para funciones radiales.

iii) Encontrar las soluciones radiales del problema en el disco $B_R = \{x^2 + y^2 < R^2\}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{en } B_R \\ u = 0 & \text{en } \partial B_R \end{cases}$$

iv) La misma cuestión si el dominio es $B_R = \{x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Problema 1.2.7 Se considera el problema para la ecuación del calor en una barra unidimensional con flujo prescrito en la frontera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \beta & t > 0 \\ u(x,0) = 1 & 0 < x < L \end{cases}$$

i) Calcular la energía

$$E(t) = \int_0^L u(x,t)\, dx$$

ii) Hallar el valor de β para que exista solución estacionaria.

iii) Obtener esta solución estacionaria suponiendo que es el límite de $u(x,t)$ para $t \to \infty$.

iv) La misma cuestión para el problema con fuente de calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 & 0 < x < L,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \beta & t > 0 \\ u(x,0) = x & 0 < x < L \end{cases}$$