PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
2^{O} Ing. Telecomunicaciones
CURSO 2009–2010

2 Método de separación de variables

2.1 Separación de variables

Problema 2.1.1 Para cada una de las siguientes EDP, determinar la EDO que se obtiene al aplicar el método de separación de variables:

i) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{k}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$

ii) $r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$

iii) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v_0\dfrac{\partial u}{\partial x}$

iv) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

v) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{k}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$

vi) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$

vii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(k, v_0 y c son constantes).

Problema 2.1.2 Resolver por separación de variables el problema en el cuadrado $\{0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \\ u(x, \pi) = 0 \\ u(x, 0) = 2\operatorname{sen} 3x \end{cases}$$

Problema 2.1.3 Resolver el problema en el cuadrado $\{0 < x < L,\ 0 < y < L\}$:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(0, y) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(L, y) = 0 \\ \varphi(x, 0) = 0 \\ \varphi(x, L) = f(x) \end{cases}$$

Problema 2.1.4 Se considera la ecuación de Laplace en un rectángulo $\{0 < x < L, 0 < y < H\}$ con las condiciones de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = f(x).$$

i) Obtener la condición de compatibilidad.

ii) Resolver el problema por el método de separación de variables. Demostrar que el método proporciona una solución solamente bajo la condición derivada en *i*).

iii) La solución de la parte *ii*) contiene una constante arbitraria. Determinarla considerando la relación del problema propuesto con el de conducción del calor en el rectángulo partiendo de la condición inicial $u(x, y, 0) = g(x, y)$.

Problema 2.1.5 Sea el problema en el triángulo $\{0 < x < 1,\ 0 < y < x\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(1, y) = u(x, x) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

i) Comprobar que el método de separación de variables no es aplicable.

ii) Utilizando algún tipo de simetría transformarlo de manera que sea separable y resolverlo. Suponer $f(0) = f(1) = 0$.

Problema 2.1.6 Sea el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & 0 < y < \pi \\ u(x, 0) = 0 & 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} nx & 0 < x < \pi \end{cases}$$

i) Resolverlo por separación de variables.

ii) Estudiar la dependencia continua respecto del dato inicial para $n \to \infty$. Deducir que el problema está mal propuesto y explicar por qué.

iii) La misma cuestión para el problema retrógrado del calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} nx & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Problema 2.1.7 Sea el problema correspondiente a la temperatura en un cilindro unidimensional con absorción si la temperatura exterior es 0 grados centígrados:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

i) ¿Cuáles son las posibles distribuciones de temperatura en equilibrio si $\alpha > 0$?

ii) Resolver el problema dependiente del tiempo. Analizar la temperatura para tiempos grandes ($t \to \infty$) y comparar con la solución del apartado anterior.

Problema 2.1.8 Rehacer el problema anterior si $\alpha < 0$. Tener especial cuidado en el caso $-\alpha/k = (n\pi/L)^2$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2.1.9 Se considera el problema de vibración de una cuerda sujeta por los extremos

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

donde $\rho > 0$ es la densidad constante de la cuerda y $T_0 > 0$ es la tensión de la misma.

i) Resolver el problema por separación de variables y comprobar que se puede escribir como suma de *armónicos*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos[\omega_n(t-\delta_n)] \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\, x)$$

identificando λ_n, ω_n, α_n y δ_n.

ii) Calcular los puntos de máxima amplitud de cada armónico, llamados *antinodos*.

iii) Calcular la *energía* de cada armónico

$$E_n = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial U_n}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{T_0}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^2 dx$$

y comprobar que es constante en el tiempo.

iv) La situación de una cuerda estirada una longitud $A > 0$ por el centro y soltada posteriormente corresponde a los datos iniciales

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2A}{L}\, x & 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2A}{L}\,(L-x) & \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \qquad g(x) = 0$$

Calcular la energía del *armónico fundamental*, es decir, calcular E_1.

v) Esta energía se corresponde con la intensidad del sonido, o volumen, producido por la vibración de la cuerda. Estudiar su dependencia de los datos del problema: densidad, longitud, tensión y estiramiento inicial.

Problema 2.1.10

i) Demostrar que, dada cualquier solución del problema de Cauchy-Dirichlet anterior asociado a la ecuación de ondas, su energía total

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{T_0}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

es constante en el tiempo. Para ello multiplicar la ecuación de ondas por $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, integrar en $[0,L]$ y deducir que $E'(t) = 0$.

ii) Demostrar que este resultado implica unicidad de solución para dicho problema, pues la energía debe ser igual a la energía inicial.

Problema 2.1.11 Resolver el problema para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 8\operatorname{sen}^2 x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Problema 2.1.12 Resolver el problema para la ecuación amortiguada de ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} 2x & 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Problema 2.1.13

i) Demostrar, separando variables en coordenadas polares, que la solución de la ecuación de Laplace en un disco, $D = \{0 < r < a,\ -\pi \leq \theta \leq \pi\}$,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & D \\ u = f & \partial D \end{cases}$$

es

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \phi) \right] d\phi.$$

ii) Usando la relación $\cos z = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{iz})$, sumar la serie geométrica resultante hasta obtener la *Fórmula Integral de Poisson*.

iii) Calcular el valor de u en el origen, obteniendo lo que se denomina *Teorema de la Media para funciones armónicas*.

Problema 2.1.14 Resolver la ecuación de Laplace en el disco unidad con dato frontera $u(1,\theta) = \operatorname{sen}^3 \theta$.

Problema 2.1.15 Resolver la ecuación de Laplace en un semicírculo $\{0 < r < a,\ 0 < \theta < \pi\}$, con las condiciones de contorno siguientes:

i) $u = 0$ sobre el diámetro y $u(a,\theta) = g(\theta)$.

ii) El diámetro está aislado y $u(a,\theta) = g(\theta)$.

Problema 2.1.16 Resolver la ecuación de Laplace en una cuña de 60°, $\{0 < r < a,\ 0 < \theta < \pi/3\}$, con las condiciones de contorno siguientes:

i) $u(r,0) = 0, \quad u(r,\pi/3) = 0, \quad u(a,\theta) = f(\theta).$

ii) $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r,0) = 0, \quad u(r,\pi/3) = 0, \quad u(a,\theta) = f(\theta).$

Problema 2.1.17 Resolver la ecuación de Laplace en un anillo circular $\{a < r < b\}$, con las condiciones de contorno siguientes:

i) $u(a, \theta) = f(\theta), \quad u(b, \theta) = g(\theta)$.

ii) $\dfrac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = 0, \quad u(b, \theta) = g(\theta)$.

iii) $\dfrac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = f(\theta), \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}(b, \theta) = 0$.

Si hay que imponer alguna condición de solubilidad, enunciarla y explicarla físicamente.

Problema 2.1.18 Resolver la ecuación de Laplace en un cuarto de anillo $\{a < r < b,\ 0 < \theta < \pi/2\}$, con las condiciones de contorno siguientes:

$$u(r, 0) = u(r, \pi/2) = 0, \quad u(a, \theta) = 0, \quad u(b, \theta) = f(\theta).$$

2.2 Series de Fourier

Problema 2.2.1 Dibujar la serie de Fourier de $f(x)$ sobre el intervalo $[-L, L]$ para las funciones siguientes y compararla con la función $f(x)$:

i) $f(x) = x^2$.

ii) $f(x) = e^x$.

iii) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$

Problema 2.2.2 Determinar la serie de Fourier en senos de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \pi - x,\ 0 \leq x \leq \pi$.

ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 2 & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$

iii) $f(x) = x^2,\ 0 \leq x \leq \pi$.

iv) $f(x) = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi$.

Problema 2.2.3 Sea $f(x)$ una función par alrededor de $x = L/2$.

i) Demostrar que los coeficientes impares (n impar) de su serie de Fourier en cosenos sobre el intervalo $[0, L]$ son cero.

ii) Explicar el resultado de la parte anterior considerando la serie de Fourier en cosenos de $f(x)$ sobre el intervalo $[0, L/2]$.

Problema 2.2.4 Sea f una función impar y de periodo 2 tal que $f(x) = 1 - x$ si $0 \leq x \leq 1$. ¿Podemos derivar término a término la serie de Fourier en senos de $f(x)$ y obtener la serie de Fourier en cosenos de $f'(x)$? Explicar la respuesta.

Problema 2.2.5 En este problema intentamos obtener los coeficientes de la serie de Fourier en cosenos de e^x. Encontrar los errores cometidos en el siguiente argumento:
Sea la serie de Fourier en cosenos

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Derivando tenemos la serie de Fourier en senos

$$\mathrm{e}^x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Derivando otra vez resulta

$$e^x = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Igualando las series de Fourier en cosenos deducimos $A_n = 0$ para todo $n \geq 0$, resultado que es *obviamente erróneo.*
Corregir los errores cometidos y como consecuencia obtener A_n.

Problema 2.2.6 Suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x/L$ es el desarrollo en serie de senos de la función $\cosh x$ en $[0, L]$.

i) Determinar b_n derivando correctamente la serie dos veces.

ii) Determinar b_n integrando la serie dos veces.