PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
2^{O} Ing. Telecomunicaciones
CURSO 2009–2010

3 Problemas de Sturm-Liouville

3.1 Autovalores y autofunciones

Problema 3.1.1 Determinar los autovalores y autofunciones de los problemas de Sturm-Liouville obtenidos con la ecuación $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ en el intervalo $0 < x < 1$, con las condiciones de contorno siguientes:

i) $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

ii) $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$.

iii) $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$.

Problema 3.1.2 Determinar los autovalores y autofunciones de los problemas siguientes:

i) $y'' + y' + (1+\lambda)y = 0,\ \ y(0) = y(1) = 0$.

ii) $y'' + 2y' + (1-\lambda)y = 0,\ \ y(0) = y'(1) = 0$.

iii) $y'' - 3y' + 3(1+\lambda)y = 0,\ \ y'(0) = y'(1) = 0$.

Problema 3.1.3 Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' = 0 & 1 < x < 3 \\ y(1) = 0 & \\ y(3) + y'(3) = 0 & \end{cases}$$

Problema 3.1.4 Demostrar que los autovalores del problema

$$\begin{cases} \phi'' + (\lambda - x^2)\phi = 0 & 0 < x < 1 \\ \phi'(0) = \phi'(1) = 0 & \end{cases}$$

son estrictamente positivos.

Problema 3.1.5 Usar el cociente de Rayleigh para obtener una cota superior razonablemente precisa para el primer autovalor de los siguientes problemas:

i) $\varphi'' + (\lambda - x^2)\varphi = 0,\ \ \varphi'(0) = \varphi(1) = 0$.

ii) $\varphi'' + (\lambda - x)\varphi = 0,\ \ \varphi'(0) = 2\varphi(1) + \varphi'(1) = 0$.

iii) $\varphi'' + \lambda\varphi = 0,\ \ \varphi(0) = \varphi(1) + \varphi'(1) = 0$.

Problema 3.1.6 Para el problema de autovalores del laplaciano se verifica la siguiente propiedad: si $\lambda_1(\Omega)$ es el primer autovalor del laplaciano en el dominio Ω y $\lambda_1(\Omega')$ es el primer autovalor del laplaciano en el dominio Ω', entonces $\Omega \subset \Omega'$ implica $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega')$. Utilizando esta propiedad, acotar el primer autovalor del laplaciano en la elipse $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

Problema 3.1.7 Considerar el operador diferencial lineal de cuarto orden $\mathcal{L} = \dfrac{d^4}{dx^4}$.

i) Demostrar que $u\mathcal{L}v - v\mathcal{L}u$ es una diferencial exacta.

ii) Evaluar $A(u,v) = \displaystyle\int_0^1 [u\mathcal{L}v - v\mathcal{L}u]\,dx$ en función de las condiciones de contorno para dos funciones cualesquiera u y v, regulares a trozos.

iii) Demostrar que $A(u,v) = 0$ si u y v son dos funciones cualesquiera que cumplen las condiciones de contorno:

$$\phi(0) = \phi(1) = \phi'(0) = \phi''(1) = 0$$

iv) Dar otro ejemplo de condiciones de contorno tales que $A(u,v) = 0$.

v) Para el problema de autovalores

$$\mathcal{L}(\phi) + \lambda\, e^x\, \phi = 0$$

con las condiciones de contorno de la parte *iii*), demostrar que las autofunciones correspondientes a diferentes autovalores son ortogonales. ¿Cuál es la función peso?

vi) Demostrar que los autovalores de la parte *v*) son $\lambda \leq 0$. ¿Es $\lambda = 0$ autovalor?

3.2 Series generalizadas de Fourier

Problema 3.2.1 Considerar el problema del flujo de calor con convección

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

i) Demostrar que la EDO espacial obtenida por separación de variables no es de tipo Sturm-Liouville.

ii) Resolver el problema.

Problema 3.2.2 Sea la EDO

$$\phi'' + \alpha(x)\,\phi' + [\lambda\,\beta(x) + \gamma(x)]\,\phi = 0.$$

Determinar el factor $H(x)$ por el que hay que multiplicar esta ecuación de tal modo que quede reducida a la forma de Sturm-Liouville

$$\left[p(x)\,\phi'\right]' + [\lambda\,\sigma(x) + q(x)]\,\phi = 0.$$

Problema 3.2.3 Aplicar el problema anterior a

$$\begin{cases} x^2\,\phi'' + x\,\phi' + \lambda\,\phi = 0, \quad 1 < x < b, \\ \phi(1) = 0, \quad \phi(b) = 0. \end{cases}$$

i) ¿Cuál es el factor integrante?

ii) Demostrar que $\lambda \geq 0$.

iii) Puesto que la EDO es equidimensional (Euler), determinar todos los autovalores positivos. ¿Es $\lambda = 0$ autovalor?

iv) ¿Son ortogonales las autofunciones? ¿Con qué función peso? Verificar la ortogonalidad haciendo las integrales correspondientes.

v) Comprobar que la n-ésima autofunción tiene $n-1$ ceros en el intervalo $(1, b)$.

Problema 3.2.4 Resolver el problema para la ecuación del calor radial en un disco

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{k}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) & 0 < r < a,\ t > 0 \\ u(a,t) = 0 & t > 0 \\ u(r,0) = f(r) & 0 < r < a \end{cases}$$

Problema 3.2.5 Considérese la EDP asociada al operador de ondas unidimensional

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial t}.$$

i) Dar una breve interpretación física. ¿Qué signos deben tener α y β de acuerdo con esta interpretación?

ii) Suponer que ρ, α, β son funciones de x. Demostrar que el método de separación de variables se aplica solo si $\beta = c\rho$, donde c es una constante.

iii) Si $\beta = c\rho$, demostrar que la ecuación espacial es de Sturm-Liouville. Resolver la ecuación temporal.

Problema 3.2.6 Resolver el problema del telegrafista

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial u}{\partial t} + bu = 0 & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < L \end{cases}$$

Problema 3.2.7 Sea el problema de autovalores en un rectángulo

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 & 0 < x < L,\ 0 < y < H \\ \phi(x,0) = \phi(x,H) = 0 & 0 < x < L \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(L,y) = 0 & 0 < y < H \end{cases}$$

i) Descomponerlo en dos problemas unidimensionales de autovalores y calcular así los autovalores y autofunciones.

ii) Demostrar que la mayor parte de los autovalores llevan asociadas más de una autofunción linealmente independiente en los casos $L = H$ y $L = 2H$.

iii) Demostrar que las autofunciones son ortogonales sobre la región bidimensional dada usando dos relaciones de ortogonalidad unidimensionales.

Problema 3.2.8 El desplazamiento vertical de una membrana no uniforme $\Omega \subset I\!R^2$ satisface la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u$$

donde $c = c(x, y)$, y se impone la condición $u = 0$ sobre la frontera de la membrana, que tiene forma irregular. Al separar variables se obtiene un problema de autovalores para el laplaciano en Ω.

i) Probar que las autofunciones pertenecientes a autovalores distintos son ortogonales. ¿Con qué peso?

ii) Probar que $\lambda \geq 0$. ¿Puede ser $\lambda = 0$ autovalor?

iii) Suponiendo conocidos estos autovalores, determinar las frecuencias de vibración.

Problema 3.2.9 Sea una membrana vibrante que ocupa un sector circular recto, $\{0 < r < a,\ 0 < \theta < \pi/2\}$, con $u = 0$ sobre toda su frontera.

i) Determinar las frecuencias de vibración.

ii) Resolver el problema de valores iniciales si

$$u(r, \theta, 0) = g(r, \theta), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0.$$

Problema 3.2.10 Resolver la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\, \Delta u$$

en un cilindro de radio a y altura H, con la condición inicial $u(r, \theta, z, 0) = f(r, z)$ (independiente de θ), si las condiciones de contorno son

$$u(r, \theta, 0, t) = u(r, \theta, H, t) = 0, \qquad u(a, \theta, z, t) = 0.$$

Problema 3.2.11 Resolver la ecuación del calor en un cuarto de cilindro $\{0 < \theta < \pi/2,\ 0 < r < a,\ 0 < z < H\}$, con la condición inicial $u(r, \theta, z, 0) = f(r, \theta, z)$, si las condiciones de contorno son Neumann homogéneas, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, H, t) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0, z, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi/2, z, t) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, z, t) = 0$$

Explicar qué distribución de temperatura se espera alcanzar cuando $t \to \infty$.