PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
2^{O} Ing. Telecomunicaciones
CURSO 2009–2010

4 Problemas no homogéneos

4.1 Alternativa de Fredholm

Problema 4.1.1 Se considera el problema

$$\begin{cases} u'' + u = \beta + x & -\pi < x < \pi \\ u(-\pi) = u(\pi) \\ u'(-\pi) = u'(\pi) \end{cases}$$

Estudiar los valores de β para los que existe solución.

Problema 4.1.2 Se considera la EDO $u'' + u = 1$.

i) Encontrar la solución general. Determinar todas las soluciones que cumplen $u(0) = u(\pi) = 0$. Relacionar este resultado con la alternativa de Fredholm.

ii) Las mismas cuestiones para los datos de Neumann $u'(0) = u'(\pi) = 0$.

iii) Idem para los datos periódicos $u(-\pi) = u(\pi)$, $u'(-\pi) = u'(\pi)$.

Problema 4.1.3 Se considera la EDO $u'' + u = \cos x$, que tiene como solución particular $u_p(x) = Ax \operatorname{sen} x$.

i) Obtener todas las soluciones que verifiquen los datos $u(-\pi) = u(\pi) = 0$. Relacionar este resultado con la alternativa de Fredholm.

ii) Las mismas cuestiones para las condiciones de contorno periódicas, $u(-\pi) = u(\pi)$, $u'(-\pi) = u'(\pi)$.

Problema 4.1.4 Se considera el problema

$$\begin{cases} y'' + Ay + 4\pi^2 x = 0 & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

i) Convertirlo en un problema con condiciones de contorno homogéneas.

ii) Estudiar los valores de A para los que existe solución y si ésta es única.

4.2 EDP no homogéneas

Problema 4.2.1 Resolver por desarrollo en autofunciones el problema no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < L \end{cases}$$

para los casos

i) $F(x,t) = \phi(x)$

ii) $F(x,t) = \phi(x) \operatorname{sen} t$

Problema 4.2.2 Resolver el problema no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ae^{-ax} & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Problema 4.2.3 Resolver el problema no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} + e^{-2t} \cos \dfrac{3\pi x}{L} & 0 < x < L,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

Suponer $k\,(3\pi/L)^2 \neq 2$.

Problema 4.2.4 Resolver el problema no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Problema 4.2.5 Resolver el problema no homogéneo de difusión del calor radial en un círculo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial u}{\partial r} \right) + r & 0 < r < a,\ t > 0 \\ u(a,t) = 0 & t > 0 \\ u(r,0) = 0 & 0 < r < a \end{cases}$$

Problema 4.2.6 Considérese el siguiente problema de difusión del calor en un círculo con una fuente de calor en la frontera

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial u}{\partial r} \right) & 0 < r < a,\ t > 0 \\ u(a,t) = t^3 & t > 0 \\ u(r,0) = 0 & 0 < r < a \end{cases}$$

i) Descomponer $u = u_e + v$, de manera que v satisfaga una ecuación del calor no homogénea pero con condición de contorno homogénea.

ii) Resolver el problema para v como en el problema anterior.

Problema 4.2.7 Considérese el problema de la vibración de una membrana circular sujeta a una vibración forzada periódica en la frontera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right] & 0 < r < a,\ -\pi < \theta < \pi,\ t > 0 \\ u(a,\theta,t) = \cos t & -\pi < \theta < \pi,\ t > 0 \\ u(r,\theta,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = \cos\theta & 0 < r < a,\ -\pi < \theta < \pi \end{cases}$$

i) Resolver como en el problema anterior.

ii) ¿Para qué valores de c hay resonancia?

Problema 4.2.8 Resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \operatorname{senh} x & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < L \end{cases}$$

Problema 4.2.9 Resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h\dfrac{\partial u}{\partial t} + b^2 u & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = A, \quad u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < L \end{cases}$$

Problema 4.2.10 Resolver el problema para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + y\cos\omega t & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ t > 0 \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0 & 0 < y < \pi,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\pi,t) = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,y,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \end{cases}$$

indicando para qué valores de ω hay resonancia.

Problema 4.2.11 Sea el problema para la ecuación de Poisson en un anillo

$$\begin{cases} \Delta u = c & \sqrt{x^2+y^2} \equiv r \in (2,3) \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = 1 & r = 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = 3 & r = 3 \end{cases}$$

donde $c \in I\!R$ es una constante.

i) Demostrar que existe solución sólo si $c = 14/5$.

ii) Calcular las soluciones radiales en ese caso.

Problema 4.2.12 Sea el problema para la ecuación de Poisson en un anillo

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \sqrt{x^2+y^2} \equiv r \in (2,3) \\ u = \cos\theta & r = 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = 0 & r = 3 \end{cases}$$

i) Descomponer $u = v + w$ de manera que v y w verifiquen determinados problemas más sencillos.

ii) Resolver el problema original.

Problema 4.2.13 Sea el operador definido en $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$,

$$\mathcal{L}(u) = \Delta u + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + ku, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

i) Resolver por separación de variables el problema de autovalores

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) + \lambda u = 0 & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \partial Q \end{cases}$$

ii) Demostrar que $H(x,y) = \mathrm{e}^{2(x+y)}$ es un factor integrante que transforma $\mathcal{L}$ en un operador de Sturm-Liouville, es decir,

$$H\mathcal{L}(u) = \operatorname{div}(p \cdot \nabla u) + qu$$

iii) Escribir el cociente de Rayleigh para $k = 0$.

iv) Aplicar el Teorema de Alternativa de Fredholm para el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) = f & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \partial Q \end{cases}$$

para $k = 5$ y $k = 7$.