PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
2^{O} Ing. Telecomunicaciones
CURSO 2009–2010

5 Función de Green I. Dominios acotados

5.1 Función de Green para EDO

Problema 5.1.1 Dar una representación de la solución de los siguientes problemas en términos de la función de Green.

i) $u'' = f,\ u(0) = A,\ u'(L) = B.$

ii) $u'' + u = f,\ u(0) = A,\ u(L) = B \qquad (\ L \neq n\pi).$

iii) $u'' = f,\ u(0) = A,\ u'(L) + hu(L) = 0.$

Problema 5.1.2 Considerar el problema

$$\begin{cases} u'' = f & 0 < x < L \\ u(0) = u'(L) = 0 \end{cases}$$

i) Resolverlo integrando directamente.

ii) Resolverlo por el método de variación de los parámetros.

iii) Deducir la función de Green $G(x, x_0)$ mediante la representación de Green de la solución y el apartado anterior.

iv) Calcular la función de Green directamente, es decir, resolver el problema, para $0 < x_0 < L$ fijo,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x - x_0) & 0 < x < L \\ G(0, x_0) = \dfrac{\partial G}{\partial x}(L, x_0) = 0 \end{cases}$$

Problema 5.1.3 Se considera el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' = f & 0 < x < 1 \\ y(0) = y'(0) \\ y(1) = y'(1) \end{cases}$$

i) Demostrar que el operador asociado a este problema es autoadjunto.

ii) Escribir la fórmula de representación de la solución en términos de la función de Green.

iii) Hallar la función de Green correspondiente.

Problema 5.1.4 Sea el problema

$$\begin{cases} u'' + u = x & 0 < x < \pi \\ u(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

i) Estudiar la existencia de soluciones aplicando la alternativa de Fredholm.

ii) Encontrar la función de Green correspondiente y a partir de ella la solución.

iii) Resolverlo directamente y obtener a partir de la solución la función de Green.

Problema 5.1.5 Sea el problema

$$\begin{cases} u'' - u' + ku = f & 0 < x < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

i) Indicar los valores de $k \in I\!R$ para los que tiene solución única.

ii) Mediante un factor integrante convertirlo en un problema de Sturm-Liouville.

iii) Encontrar la función de Green correspondiente si $k = 1/4$, y escribir la solución en términos de ésta.

Problema 5.1.6 Sea el problema

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = f & 0 < x < \pi/2 \\ y(0) = y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

i) Escribirlo en forma de Sturm-Liouville.

ii) Encontrar la función de Green correspondiente.

iii) Resolver el problema para el caso $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

Problema 5.1.7 Sea el problema

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' + Ay = x^3 & 1 < x < 2 \\ y(1) = y'(1) \\ y(2) = 2y'(2) \end{cases}$$

i) Escribirlo en forma de Sturm-Liouville.

ii) Justificar si existe solución en los casos $A = 0$ y $A = 1$.

iii) Encontrar la función de Green correspondiente en los casos anteriores en que exista.

iv) Resolver el problema en estos casos.

Problema 5.1.8 Sea el problema

$$\begin{cases} u'' = \mathrm{e}^{-(x-1)^2} & 0 < x < 1 \\ \alpha u(0) + (1-\alpha)u'(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

i) Hallar los valores de α para los que existe solución.

ii) Determinar la función de Green correspondiente en los casos anteriores en que exista.

Problema 5.1.9 Resolver los problemas siguientes calculando previamente la función de Green correspondiente

i)

$$\begin{cases} (xu')' = f(x) & 1 < x < \mathrm{e} \\ u(1) = u(\mathrm{e}) = 0 \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} (xu')' - \dfrac{u}{x} = f(x) & 1 < x < 2 \\ u(1) + u'(1) = u(2) = 0 \end{cases}$$

iii)

$$\begin{cases} u'' + u' - 2u = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) - u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Problema 5.1.10

i) Resolver el problema, para $0 < x_0 < L$ fijo,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 G}{\partial x^4} = \delta(x - x_0) & 0 < x < L \\ G(0, x_0) = G(L, x_0) = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(0, x_0) = \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(L, x_0) = 0 \end{cases}$$

ii) Usar la función de Green obtenida para resolver el problema no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 u}{dx^4} = f & 0 < x < L \\ u(0) = u(L) = 0 \\ \dfrac{du}{dx}(0) = \dfrac{d^2 u}{dx^2}(L) = 0 \end{cases}$$

5.2 Función de Green para EDP

Problema 5.2.1 Encontrar la función de Green para el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de Poisson en el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$.

Problema 5.2.2

i) Resolver por desarrollo en autofunciones el problema de la ecuación del calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t) & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

ii) Encontrar una expresión de la solución relacionándola con la función de Green y dar como consecuencia una fórmula para ésta como serie de autofunciones.

Problema 5.2.3 La misma cuestión para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t) & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

Problema 5.2.4 Sea el problema de valores iniciales y de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + k\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u & -L < x < L,\ t > 0 \\ u(-L,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -L < x < L \end{cases}$$

con α y k constantes positivas.

i) Encontrar un cambio de variables que convierta la ecuación anterior en la ecuación del calor.

ii) Deducir que la energía

$$E(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\alpha t}\int_{-L}^{L} u^2(x,t)\,dx$$

decrece con el tiempo.

iii) Encontrar la función de Green del problema anterior por el método del desarrollo en autofunciones.