PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
2^{O} Ing. Telecomunicaciones
CURSO 2009–2010

6 Función de Green II. Dominios no acotados

6.1 Transformada de Fourier

Problema 6.1.1 Sea $F(\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{i\xi x}\, dx$ la transformada de Fourier de f.

i) Demostrar que la transformada de Fourier es un operador lineal.

ii) Demostrar que la transformada de Fourier de $f(x-\beta)$ es $e^{i\xi\beta} F(\xi)$. Esto se denomina el *Teorema de Traslación*.

iii) Demostrar que la transformada de Fourier de $x f(x)$ es $-iF'(\xi)$.

Problema 6.1.2 Sea $F(\vec{\xi}) = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\, \mathrm{e}^{i\vec{\xi}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x}$ la transformada de Fourier de $f(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

i) Calcular la transformada de Fourier de $x_j f(\vec{x})$, $j = 1, \cdots, n$.

ii) Calcular la transformada de Fourier de $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})$.

iii) Calcular la transformada de Fourier de $\Delta f(\vec{x})$.

Problema 6.1.3 Obtener una expresión para la transformada de Fourier del producto $f(x)\, g(x)$.

Problema 6.1.4

i) Si $f(x)$ es una función con integral uno en $\mathbb{R}$, demostrar que la función rescalada $g(x) = \alpha^{-1} f(x/\alpha)$ también tiene integral uno.

ii) Si $F(\xi)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, demostrar que la transformada de Fourier de $g(x)$ es $F(\alpha\xi)$. Interpretar esta propiedad en el sentido de que las funciones "anchas" tienen transformadas de Fourier con un pico estrecho cerca de $\xi = 0$ y viceversa.

iii) Si $f(\vec{x})$ es una función con integral uno en $\mathbb{R}^n$, calcular el cambio de escala $g(\vec{x}) = \beta\, f(\vec{x}/\alpha)$ análogo al apartado $i)$ para que g tenga también integral uno.

iv) Calcular en ese caso la transformada de Fourier de g en términos de la transformada de Fourier de f.

Problema 6.1.5

i) ¿Para qué valores de α tiene área unidad la función $g(x) = \alpha\, e^{-\beta(x-x_0)^2}$ definida para $x \in \mathbb{R}$?

ii) Demostrar el límite

$$\lim_{\beta\to\infty} g(x) = 0 \qquad \forall\, x \neq x_0.$$

iii) Calcular la transformada de Fourier de $g(x)$ y tomar el límite $\beta \to \infty$.

iv) Usar las propiedades de integración de $\delta(x-x_0)$ para calcular su transformada de Fourier.

Problema 6.1.6 Evaluar $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-k\xi^2 t}\cos\xi x\, d\xi$ calculando primero $\partial I/\partial x$ e integrando después por partes.

6.2 Transformación de ecuaciones

Problema 6.2.1

i) Usando los teoremas de convolución y de traslación resolver mediante transformada de Fourier la ecuación de difusión con convección

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} & x \in I\!R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

ii) Sea $f(x) = \delta(x)$. Dibujar la solución correspondiente para distintos valores de $t > 0$. Discutir el significado de la convección $c\,\partial u/\partial x$.

iii) ¿Sugiere la forma de la solución un cambio de variables que simplifique la ecuación?

Problema 6.2.2

i) Resolver la ecuación de difusión con absorción

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u & x \in I\!R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

ii) ¿Sugiere la forma de la solución un cambio de variables que simplifique la ecuación?

Problema 6.2.3

i) Calcular, para $a > 0$ fijo, la transformada de Fourier de la función $f(x) = (a - |x|)_+$.

ii) Resolver mediante transformada de Fourier el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x) & x \in I\!R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in I\!R \end{cases}$$

Problema 6.2.4 Resolver mediante transformada de Fourier el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in I\!R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \delta(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

Problema 6.2.5 La función de Airy, $y = \mathrm{Ai}(x)$, es la única solución del problema

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 & x \in I\!R \\ y(0) = A & \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} y(x) = 0 & \end{cases}$$

donde $A = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \cos(\xi^3/3)\, d\xi = 1/[3^{2/3}\Gamma(2/3)]$. Determinar una representación de la solución de este problema en términos de su transformada de Fourier.

Problema 6.2.6

i) Resolver la ecuación de Korteweg-de Vries linealizada

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} & x \in I\!R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

ii) Simplificar por medio del teorema de convolución y del resultado del problema anterior.

iii) Especializar el resultado al caso de dato inicial una función de Heaviside.

6.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson

Problema 6.3.1 Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace en $I\!R^n$, es decir, hallar $G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \Gamma(r)$, $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$, tal que

$$r^{1-n}\left(r^{n-1}\Gamma'\right)' = \delta(\vec{x}) \qquad \vec{x} \in I\!R^n$$

para $n = 1$, 2 y 3.

Problema 6.3.2

i) Resolver la ecuación de Laplace en el semiplano mediante transformada de Fourier en la variable $x \in I\!R$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in I\!R,\ y > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

ii) Identificar el núcleo de Poisson $P(x, y, x_0)$.

iii) Calcular la función de Green asociada, es decir, resolver el problema, para $(x_0, y_0) \in I\!R^2_+$ fijo,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x - x_0, y - y_0) & x \in I\!R,\ y > 0 \\ G(x, 0, x_0, y_0) = 0 & x \in I\!R \end{cases}$$

Utilizar el método de las imágenes.

iv) Comprobar que se tiene

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \nu_0}\right|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial G}{\partial y_0}(x, y, x_0, 0) = P(x, y, x_0)$$

Problema 6.3.3 Calcular mediante el método de las imágenes la función de Green para la ecuación de Laplace en el semiplano con dato Neumann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x - x_0, y - y_0) & x \in I\!R,\ y > 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y}(x, 0, x_0, y_0) = 0 & x \in I\!R \end{cases}$$

Problema 6.3.4 Resolver la ecuación de Laplace en una banda infinita mediante transformada de Fourier en la variable $y \in I\!R$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < L,\ y \in I\!R \\ u(0,y) = g_1(y), \quad u(L,y) = g_2(y) & y \in I\!R \end{cases}$$

Problema 6.3.5 Sea el problema para la ecuación de Laplace en un cuadrante

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x > 0,\ y > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ u(0,y) = 1 & y > 0 \end{cases}$$

i) Resolverlo por el método de las imágenes.

ii) Escribir la solución en coordenadas polares e interpretar el resultado.

Problema 6.3.6 Usar el método de las imágenes múltiples para obtener la función de Green para la ecuación de Laplace en los dominios y con los datos frontera que se indican:

i) el rectángulo $[0,L] \times [0,H]$ si $\begin{cases} G = 0 & \text{en } x = 0,\ x = L \\ \partial G/\partial y = 0 & \text{en } y = 0,\ y = H \end{cases}$

ii) la banda infinita $[0,L] \times I\!R$ si $\begin{cases} G = 0 & \text{en } x = 0 \\ \partial G/\partial x = 0 & \text{en } x = L \end{cases}$

iii) la banda semi-infinita $[0,L] \times [0,\infty)$ si $G = 0$ sobre todas las fronteras.

Problema 6.3.7 Encontrar la distribución de potencial electrostático en el espacio entre dos electrodos planos infinitos situados en $z = \pm a$, si están conectados a tierra y hay una carga puntual q situada en el origen. Es decir, resolver el problema en $I\!R^3$

$$\begin{cases} -\Delta u(\vec{x}) = 4\pi q \delta(\vec{x}) & \vec{x} = (x,y,z),\ |z| < a \\ u(x,y,\pm a) = 0 \end{cases}$$

Problema 6.3.8 Hallar el potencial electrostático dentro de una región limitada por placas conductoras $y = 0$, $y = b$, $x = 0$, si la placa $x = 0$ está cargada a un potencial V, las placas $y = 0$, $y = b$ están unidas a tierra y no hay cargas en la región estudiada. Es decir, resolver el problema en $I\!R^3$

$$\begin{cases} \Delta u(\vec{x}) = 0 & \vec{x} = (x,y,z), \quad x > 0,\ 0 < y < b \\ u(0,y,z) = V \\ u(x,0,z) = u(x,b,z) = 0 \end{cases}$$

6.4 Ecuación del calor

Problema 6.4.1 Sea el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & x \in I\!R,\ t > 0, \\ v(x,0) = f(x) & x \in I\!R, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} v(x,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

i) Escribir el problema que satisface la nueva variable $u(x,t) = e^{\beta t} v(x - \gamma t, t)$.

ii) Resolverlo mediante transformada de Fourier e interpretar el resultado obtenido.

Problema 6.4.2

i) Resolver el problema de difusión del calor con convección en un intervalo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x} & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \mathrm{e}^x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

ii) Resolver el problema de difusión del calor con convección en la recta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x} & x \in I\!R,\ t > 0 \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2} & x \in I\!R \end{cases}$$

Problema 6.4.3 Resolver la ecuación del calor en la semirrecta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x > 0,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x > 0 \end{cases}$$

reflejando a $x < 0$.

Problema 6.4.4 Sea la ecuación del calor en la semirrecta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = A(t) & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x > 0 \end{cases}$$

Resolverlo en los siguientes casos:

i) $Q = f = 0,\ A$ constante.

ii) $A = f = 0,\ Q$ constante.

iii) $Q = A = 0,\ f$ constante.

Problema 6.4.5 Consideremos el problema para la ecuación del calor en la semirrecta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = 1 & t > 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

La ecuación del calor es invariante frente a la transformación $x \to ax$, $t \to a^2 t$. En este problema los datos iniciales y de contorno son invariantes frente a esa transformación. Por consiguiente $u(x,t) = u(ax, a^2 t)$ para cualesquiera valores positivos de x, a y t. Si ponemos $a = 1/\sqrt{t}$, entonces $u(x,t) = u(x/\sqrt{t}, 1) = f(\eta)$, donde $\eta = x/\sqrt{t}$. Se dice que u es *autosemejante* y que φ es su perfil.

i) Encontrar la ecuación que debe satisfacer $f(\eta)$ y las correspondientes condiciones de contorno para $\eta = 0$ y $\eta \to \infty$.

ii) Encontrar explícitamente el perfil φ y explicar qué relación existe con la solución del problema anterior de difusión en la semirrecta, dibujando $u(x,t)$ para distintos valores de $t > 0$.

Problema 6.4.6 Encontrar la función de Green para la ecuación del calor en un intervalo, donde $0 < x_0 < L$ y $t_0 > 0$ están fijos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(x - x_0)\,\delta(t - t_0) & 0 < x < L,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(0,t,x_0,t_0) = \dfrac{\partial G}{\partial x}(L,t,x_0,t_0) = 0 & t > 0 \\ G(x,x_0,t,t_0) = 0 & 0 < x < L,\ t \le t_0 \end{cases}$$

i) Mediante desarrollo en autofunciones.

ii) Aproximar esta función de Green. ¿Bajo qué condiciones vale la aproximación?

iii) Mediante el método de las imágenes.

iv) Aproximar esta función de Green. ¿Bajo qué condiciones vale esta aproximación?

6.5 Ecuación de ondas

Problema 6.5.1 Resolver el problema para la ecuación unidimensional de ondas no homogénea

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 & x \in I\!R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x^2 & x \in I\!R \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 4x & x \in I\!R \end{cases}$$

Problema 6.5.2 Sea la ecuación de ondas en una dimensión

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in I\!R,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x \in I\!R \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

donde $g(x) = \chi_{[10,12]}(x) = \begin{cases} 1 & 10 \le x \le 12 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

i) Describir el conjunto $A = \{x \in I\!R \,:\, u(x,2) > 0\}$.

ii) Obtener el conjunto $B = \{t > 0 \,:\, u(0,t) > 0\}$.

Problema 6.5.3 Sea el problema para la ecuación de ondas en la semirrecta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) & x > 0, \quad t > 0 \\ u(0,t) = h(t) & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & x > 0 \end{cases}$$

i) Encontrar la función de Green asociada mediante el método de las imágenes.

ii) Usar la representación de Green para encontrar la solución del problema con $Q = f = g = 0$.

iii) ¿Para qué valores de t influye $h(t)$ en $u(x_1, t_1)$? Dar una interpretación física.

Problema 6.5.4 Resolver el problema siguiente mediante transformada de Fourier

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \dfrac{\partial u}{\partial t} & x \in I\!R,\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-2x^2} & x \in I\!R \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in I\!R \end{cases}$$

Problema 6.5.5 Demostrar que toda solución de la ecuación de ondas unidimensional verifica la *Fórmula del paralelogramo*, es decir, si

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

entonces, para todo α, $\beta \in I\!R$, se verifica la igualdad

$$u(x,t) + u(x + c\alpha - c\beta, t + \alpha + \beta) = u(x + c\alpha, t + \alpha) + u(x - c\beta, t + \beta).$$

Problema 6.5.6 Se considera el problema para la ecuación de ondas en un intervalo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -1 < x < 1,\ t > 0 \\ u(-1,t) = t & t > 0 \\ u(1,t) = t^2 & t > 0 \\ u(x,0) = 1 - |x| & -1 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

Aplicar la fórmula del paralelogramo para calcular el valor de $u(1/2, 2)$ y de $u(0, 5/4)$.

Problema 6.5.7 Sea el problema para la ecuación de ondas en un intervalo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -4 < x < 4,\ t > 0 \\ u(-4,t) = u(4,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & -4 < x < 4 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 16 - x^2 & -4 < x < 4 \end{cases}$$

Calcular los tiempos en que la solución es idénticamente nula.

Problema 6.5.8 Sea el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = t^3 & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 1 & t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < L \end{cases}$$

i) Encontrar la función de Green correspondiente mediante el método de las imágenes múltiples.

ii) Reducir el problema a un problema con condiciones homogéneas en la frontera.

iii) Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales que satisfacen los coeficientes del desarrollo en autofunciones de la solución.

Problema 6.5.9 Resolver el problema para la ecuación de ondas en la semirrecta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x > 0,\, t > 0 \\ u(0,t) = t^2 & t > 0 \\ u(x,0) = x & x > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

Problema 6.5.10 Sea el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x > 0,\, t > 0 \\ u(0,t) = h(t) & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

i) Encontrar la función de Green.

ii) Expresar la solución mediante la fórmula de representación de Green.

iii) Calcular $u(1,3)$.

Problema 6.5.11 Sea el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x > 0,\, t > 0 \\ u(0,t) = h(t) & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & x > 0 \end{cases}$$

i) Sea $g = 0$ y $h(t) > 0$ si $2 < t < 5$, $h(t) = 0$ en el resto. Obtener los siguientes conjuntos

$$A = \{t > 0 \,:\, u(7,t) > 0\}, \qquad B = \{x > 0 \,:\, u(x,7) > 0\}$$

ii) Hallar la solución del problema si $g(x) = x^2$, $h(t) = 1 - t$.

Problema 6.5.12 Resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + Q(\vec{x},t) & \vec{x} \in I\!R^3,\, t > 0 \\ u(\vec{x},0) = 0 & \vec{x} \in I\!R^3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = 0 & \vec{x} \in I\!R^3 \end{cases}$$

con la fuente $Q(\vec{x},t) = \chi_{\{|\vec{x}|\le 1\}} H(t-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\vec{x}| \le 1,\ t \ge 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

Problema 6.5.13 Se considera el problema de la ecuación de ondas en dimensión tres:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u & \vec{x} \in I\!R^3,\ t > 0 \\ u(\vec{x}, 0) = 0 & \vec{x} \in I\!R^3, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, 0) = |\vec{x}|^2 & \vec{x} \in I\!R^3, \end{cases}$$

Utilizando la fórmula de representación, calcular el valor de $u(0, t)$.

Problema 6.5.14 Se considera el mismo problema anterior con velocidad inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, 0) = \chi_{\{|\vec{x}| \leq 1\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } |\vec{x}| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\vec{x}| > 1 \end{cases}$$

i) Dado un observador situado en un punto a dos unidades del origen, estudiar durante cuánto tiempo escucha el sonido producido. Es decir, encontrar el soporte de $u(\vec{x}_0, \cdot)$ para $|\vec{x}| = 2$.

ii) Comprobar que la fórmula de la solución de la ecuación de ondas en dimensión tres representa en este caso el área de la porción de esfera de radio ct centrada en $\vec{x}$ contenida en la bola unidad centrada en el origen.

iii) Calcular este área como área de revolución, igualmente para $|\vec{x}| = 2$.

iv) Calcular la solución en general.