PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
2º Ing. Telecomunicación
CURSO 2009–2010
SOLUCIONES

1 Problemas de valores iniciales y de contorno

1.1 Clasificación de EDP de segundo orden

Problema 1.1.1

i) Es hiperbólica pues $D = 1 + 3 = 4 > 0$. (También porque la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es indefinida). Las soluciones de la ecuación $r^2 + 2r - 3 = 0$ son $r = 1$, $r = -3$; las características son entonces las familias de rectas $x + y = cte$, $3x - y = cte$.

ii) $D = 4 > 0 \rightsquigarrow$ hiperbólica. Características $3x + y = cte$, $x - y = cte$.

iii) $D = 0 \rightsquigarrow$ parabólica. Características $3x - 2y = cte$.

Problema 1.1.2

i) Mediante el cambio $\xi = x + y$, $\eta = 3x - y$, $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, obtenemos la ecuación $16\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + v = 0$.

ii) $\xi = 2x + y$, $\eta = 4x - y \rightsquigarrow 36\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + 2\dfrac{\partial v}{\partial\xi} + 4\dfrac{\partial v}{\partial\eta} + 5 = 0$.

iii) $\xi = x$, $\eta = x - 2y \rightsquigarrow 4\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + 2\dfrac{\partial v}{\partial\xi} + 2\dfrac{\partial v}{\partial\eta} + v = 0$.

iv) $\xi = x$, $\eta = 3x + y \rightsquigarrow \dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} - \dfrac{\partial v}{\partial\eta} = 0$.

v) $\xi = x$, $\eta = (x - y)/4 \rightsquigarrow \dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + v = 0$.

vi) $\xi = x$, $\eta = (3x + y)/\sqrt{5} \rightsquigarrow 3(\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}) + 12\dfrac{\partial v}{\partial\xi} - \dfrac{24}{\sqrt{5}}\dfrac{\partial v}{\partial\eta} = 0$.

Problema 1.1.3

i) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = f' \rightsquigarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

ii) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yf'$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xf' \rightsquigarrow x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

iii) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f' + g'$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = f' - g'$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' + g''$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'' + g'' \rightsquigarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

iv) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1}f - x^{n-2}yf'$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^{n-1}f' \rightsquigarrow x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} - nu = 0$.

1.2 Problemas bien propuestos

Problema 1.2.1 $0 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g'(y)$, luego no hay solución si g no es constante; si $g(y) = \alpha$ hay infinitas soluciones, cualquiera de la forma $u(x,y) = a(x) + f(y)$, con $a(0) = 0$, $a'(0) = \alpha$.

Problema 1.2.2

i) Para que exista solución, la cantidad de calor generado en el interior del dominio debe ser igual al flujo total de calor a través de la frontera, es decir

$$\int_\Omega f = \int_{\partial\Omega} g$$

ii) Se obtiene el mismo resultado aplicando el teorema de la divergencia al campo ,

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{F} = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu} \Rightarrow \int_\Omega \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Rightarrow \int_\Omega f = \int_{\partial\Omega} g$$

Problema 1.2.3

i) Poniendo $\vec{F} = u\nabla u$, el teorema de la divergencia implica

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\nu} = \int_\Omega \mathrm{div}(u\nabla u) = \int_\Omega (u\Delta u + |\nabla u|^2) \Rightarrow \int_\Omega u\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\nu} - \int_\Omega |\nabla u|^2$$

ii) $0 = \displaystyle\int_\Omega u\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\nu} - \int_\Omega |\nabla u|^2 = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \Rightarrow u = \text{ const. en } \Omega \Rightarrow u \equiv 0 \text{ en } \Omega$

iii) Sean u_1 y u_2 dos soluciones y pongamos $w = u_1 - u_2$. Entonces w verifica

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Por el apartado anterior es $w = 0$, es decir, $u_1 = u_2$.

iv) Si w verifica el dato frontera tipo Neumann $\dfrac{\partial w}{\partial\nu} = 0$ en $\partial\Omega$, el cálculo del apartado *i)* implica $w =$ constante en Ω; así dos soluciones cualesquiera se diferencian en una constante.

v) Si w verifica

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial\nu} + hw = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

el cálculo del apartado *i)* implica

$$0 = \int_\Omega w\Delta w = \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial w}{\partial\nu} - \int_\Omega |\nabla w|^2 = -\int_{\partial\Omega} hw^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq 0$$

si $h > 0$, por lo que $w = 0$ y se obtiene de nuevo unicidad de solución.

Problema 1.2.4

i) Si $\vec{x}_0$ es un punto de máximo interior, entonces la matriz hessiana $D^2u(\vec{x}_0)$ es semidefinida negativa, lo que en particular implica que su traza $\Delta u(\vec{x}_0) \leq 0$, en contradicción con la ecuación.

ii) Sea $v(\vec{x}) = u(\vec{x}) + \varepsilon|\vec{x}|^2$. Entonces $\Delta v = \Delta u + 2\varepsilon N > 0$. Por tanto

$$\max_{\vec{x}\in\overline{\Omega}}(u(\vec{x}) + \varepsilon|\vec{x}|^2) = \max_{\vec{x}\in\partial\Omega}(g(\vec{x}) + \varepsilon|\vec{x}|^2)$$

Pasando al límite $\varepsilon \to 0$ se deduce el principio del máximo para u.

iii) Si $\Delta u = 0$ aplicamos el principio del máximo a u y a $-u$.

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta u \geq 0 & \Rightarrow \displaystyle\max_{\vec{x}\in\overline{\Omega}} u(\vec{x}) = 0 & \Rightarrow u \leq 0 \\ \Delta(-u) \geq 0 & \Rightarrow \displaystyle\max_{\vec{x}\in\overline{\Omega}}(-u(\vec{x})) = 0 & \Rightarrow u \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u = 0$$

Problema 1.2.5

i) Como en el problema anterior podemos empezar suponiendo la desigualdad estricta y después considerar la función $v(\vec{x}, t) = u(\vec{x}, t) + \varepsilon|\vec{x}|^2$. Supongamos que existe un punto $(\vec{x}_0, t_0)$, con $\vec{x}_0 \in \Omega$, $0 < t_0 < T$, donde u alcanza el máximo. Entonces $\Delta u(\vec{x}_0, t_0) \leq 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}_0, t_0) = 0$. Se obtiene una contradicción con la ecuación. Si ahora $t_0 = T$, se obtiene la misma contradicción, pues $\dfrac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}_0, t_0) \geq 0$.

ii) La unicidad se obtiene ahora por linealidad. Si u_1 y u_2 son dos soluciones, la función $w = u_1 - u_2$ verifica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \Delta w & \vec{x} \in \Omega,\ t > 0 \\ w = 0 & \vec{x} \in \partial\Omega \\ w = 0 & t = 0 \end{cases}$$

Se tiene que el máximo de w es cero, lo mismo que el máximo de $-w$, por lo que $w = 0$.

Problema 1.2.6

i) Sea $u(x, y) = v(r, \theta)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \mathrm{arctg}(y/x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{x}{r} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{y}{r^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{y}{r} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2} \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\cdot\frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial v}{\partial r}(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}) - \frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{2xy}{r^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\cdot\frac{y^2}{r^4} + \frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\frac{2xy}{r^3} \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\cdot\frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial v}{\partial r}(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}) + \frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{2xy}{r^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\cdot\frac{x^2}{r^4} - \frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\frac{2xy}{r^3} \\
&\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}
\end{aligned}$$

ii) Sea $u(\vec{x}) = v(r)$, donde $r = |\vec{x}|$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = v'\,\frac{x_i}{r} \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v''\,\frac{x_i^2}{r^2} + v'\,\frac{r - x_i^2/r}{r^2} = v''\,\frac{x_i^2}{r^2} + v'\,\frac{r^2 - x_i^2}{r^3} \\
&\Delta u = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v'' + \frac{N-1}{r}\,v'
\end{aligned}$$

o también

$$\nabla r = \frac{\vec{x}}{r}, \qquad \operatorname{div} \vec{x} = N, \qquad \nabla u = v' \, \frac{\vec{x}}{r}$$
$$\Delta u = \operatorname{div}\,(v' \, \frac{\vec{x}}{r}) = v'' \, \frac{\vec{x}}{r} \cdot \frac{\vec{x}}{r} + v'(\frac{N}{r} - \frac{\vec{x}}{r^2} \cdot \frac{\vec{x}}{r}) = v'' + \frac{N-1}{r} v'$$

También se escribe $\Delta u = r^{1-N}(r^{N-1}v')'$.

iii) El problema a resolver es

$$\begin{cases} r^{-1}(rv')' = 1 & 0 < r < R \\ v(1) = 0 \\ |v(0)| < \infty \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son $v(r) = r^2/4 + c_1 \log r + c_2$. Las condiciones de contorno implican $c_1 = 0$, $c_2 = -R^2/4$. Así $v(r) = \dfrac{1}{4}(r^2 - R^2)$.

iv) El problema ahora es

$$\begin{cases} r^{-2}(r^2v')' = 1 & 0 < r < R \\ v(1) = 0 \\ |v(0)| < \infty \end{cases}$$

La solución es $v(r) = \dfrac{1}{6}(r^2 - R^2)$.

Problema 1.2.7

i) Derivando y utilizando la ecuación,

$$E'(t) = \int_0^L \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \, dx = \int_0^L \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \, dx = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \beta - 1$$

Así $E(t) = (\beta-1)t + E(0)$. Pero $E(0) = \displaystyle\int_0^L u(x,0)\, dx = L$. Por tanto $E(t) = (\beta-1)t + L$.

ii) Para que exista solución estacionaria la energía debe ser constante, por lo que $\beta = 1$. De otra manera, si $v(x)$ es una solución estacionaria, debe resolver el problema

$$\begin{cases} v'' = 0 & 0 < x < L \\ v'(0) = 1 \\ v'(L) = \beta \end{cases}$$

Entonces $v(x) = c_1 x + c_2$. Las condiciones de contorno implican $c_1 = 1 = \beta$.

iii) Del apartado anterior, se obtiene v salvo una constante, $v(x) = x + c_2$. Pero si $v(x) = \lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$, la conservación de la energía implica

$$L = E(0) = \int_0^L u(x,t)\, dx = \int_0^L v(x)\, dx = \frac{L^2}{2} + c_2 L$$

Se obtiene así $c_2 = 1 - L/2$. La solución estacionaria es entonces $v(x) = x + 1 - L/2$.

iv)

$$E'(t) = \int_0^L \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dx = \int_0^L \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 1\right) dx = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + L = \beta - 1 + L$$

Así $E(t) = (\beta - 1 + L)t + E(0)$. Pero $E(0) = \int_0^L u(x,0)\,dx = L^2/2$. Por tanto $E(t) = (\beta - 1 + L)t + L^2/2$. Para que exista solución estacionaria debe ser $\beta = 1 - L$. De otra manera, resolviendo

$$\begin{cases} v'' + 1 = 0 & 0 < x < L \\ v'(0) = 1 \\ v'(L) = \beta \end{cases}$$

se obtiene $v(x) = -x^2/2 + c_1 x + c_2$, que implica $c_1 = 1$, $c_1 - L = \beta$. Por otro lado,

$$L^2/2 = E(0) = \int_0^L u(x,t)\,dx = \int_0^L v(x)\,dx = -\frac{L^3}{6} + \frac{L^2}{2} + c_2 L$$

Es entonces $c_2 = L^2/6$, y así $v(x) = -x^2/2 + x + L^2/6$.