PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
2^{O} Ing. Telecomunicación
CURSO 2009–2010
SOLUCIONES

2 Método de separación de variables

2.1 Separación de variables

Problema 2.1.1

i) Poniendo $u(r,t) = R(r)T(t)$ se obtiene $(rR')' + \lambda rR = 0$, $T' + \lambda kT = 0$.

ii) $u(r,\theta) = R(r)H(\theta) \rightsquigarrow (rR')' - \dfrac{\lambda}{r}R = 0$, $H'' + \lambda H = 0$.

iii) $u(x,t) = X(x)T(t) \rightsquigarrow kX'' - v_0X' + \lambda X = 0$, $T' + \lambda kT = 0$.

iv) $u(x,y) = X(x)Y(y) \rightsquigarrow X'' + \lambda X = 0$, $Y'' - \lambda Y = 0$.

v) $u(r,t) = R(r)T(t) \rightsquigarrow (r^2R')' + \lambda r^2 R = 0$, $T' + \lambda kT = 0$.

vi) $u(x,t) = X(x)T(t) \rightsquigarrow X^{iv)} + \lambda X = 0$, $T' + \lambda kT = 0$.

vii) $u(x,t) = X(x)T(t) \rightsquigarrow X'' + \lambda X = 0$, $T'' + \lambda c^2 T = 0$.

Problema 2.1.2

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \operatorname{senh} n(\pi - y)$$

$$2\operatorname{sen} 3x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \operatorname{senh} n\pi \Rightarrow a_3 = \frac{2}{\operatorname{senh} 3\pi}, \quad a_n = 0\ \forall n \neq 3 \Rightarrow$$

$$u(x,y) = \frac{2}{\operatorname{senh} 3\pi} \operatorname{sen} 3x \operatorname{senh} 3(\pi - y)$$

Problema 2.1.3

$$\varphi(x,y) = b_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) \operatorname{senh}(\frac{n\pi y}{L})$$

$$f(x) = \varphi(x,L) = b_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) \operatorname{senh}(n\pi) \Rightarrow$$

$$b_0 = \frac{1}{L^2}\int_0^L f(s)\,ds, \qquad b_n = \frac{2}{L\operatorname{senh}(n\pi)}\frac{1}{L^2}\int_0^L f(s)\cos(\frac{n\pi s}{L})\,ds \quad n \geq 1$$

Problema 2.1.4

i) La condición de compatibilidad es $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, es decir $\displaystyle\int_0^L f(x)\,dx = 0$.

ii)

$$u(x,y) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) \cosh(\frac{n\pi y}{L})$$

$$f(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,H) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{L} \cos(\frac{n\pi x}{L}) \operatorname{senh}(\frac{n\pi H}{L}) \Rightarrow$$

$$b_0 \in I\!R, \quad \int_0^L f(s)\,ds = 0, \quad b_n = \frac{2L}{Ln\pi \operatorname{senh}(n\pi H/L)}\int_0^L f(s)\cos(\frac{n\pi s}{L})\,ds \quad n \geq 1$$

iii) Si $u(x,y) = \lim_{t\to\infty} v(x,y,t)$, donde v es solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v & 0 < x < L,\ 0 < y < H,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,y,t) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,0,t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(L,y,t) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,H,t) = f(x) \\ v(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$$

entonces, por conservación de la energía,

$$\int_0^L \int_0^H g(x,y)\,dydx = \int_0^L \int_0^H v(x,y)\,dydx = b_0 LH$$

Es decir, b_0 es igual al valor medio del dato inicial g en el rectángulo.

Obsérvese que la conservación de la energía se deduce de la ecuación y los datos frontera:

$$E(t) = \int_\Omega v \ \Rightarrow\ E'(t) = \int_\Omega \Delta v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 + 0 + 0 + \int_0^L f(x)\,dx = 0$$

Problema 2.1.5

i) Al separar variables, $u(x,y) = X(x)Y(y)$, la condición $u(x,x) = 0$ no se puede traducir en una condición sobre X o Y.

ii) $u(x,y) = v(x,y) - v(y,x)$, donde v es solución del problema en el cuadrado

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & 0 < x,\ y < 1 \\ v(0,y) = v(1,y) = 0 \\ v(x,1) = 0 \\ v(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Así

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\operatorname{sen} n\pi x \operatorname{senh} n\pi y - \operatorname{sen} n\pi y \operatorname{senh} n\pi x)$$
$$a_n = \frac{2}{\operatorname{senh} n\pi} \int_0^1 f(s) \operatorname{sen} n\pi s\,ds$$

Problema 2.1.6

i)

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kx \operatorname{senh} ky$$
$$\frac{1}{n} \operatorname{sen} nx = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \operatorname{sen} kx \ \Rightarrow\ a_n = 1/n^2\,, \qquad a_k = 0\ \forall\, k \neq n$$
$$u(x,y) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx \operatorname{senh} ny$$

ii) No hay continuidad respecto del dato inicial, pues $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx = 0$; la solución con este dato es $u \equiv 0$, pero $\lim_{n\to\infty} u(x,y)$ no existe. El problema está mal propuesto.

iii)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kx \mathrm{e}^{k^2 t}$$

$$\frac{1}{n} \operatorname{sen} nx = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kx \;\Rightarrow\; a_n = 1/n\,, \qquad a_k = 0 \;\forall\, k \neq n$$

$$u(x,t) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \mathrm{e}^{n^2 t}$$

No hay continuidad respecto del dato inicial, pues $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx = 0$, y la solución con este dato es $u \equiv 0$, pero $\lim_{n\to\infty} u(x,t)$ no existe.

Problema 2.1.7

i) Solución estacionaria verifica el problema

$$\begin{cases} kv'' - \alpha v = 0 & 0 < x < L \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

La única solución es $v(x) = 0$.

ii) Separando variables se tiene

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(n\pi x/L) \mathrm{e}^{-(\alpha + kn^2\pi^2/L^2)t}$$

El dato inicial implica $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \operatorname{sen}(n\pi s/L)\, ds$. Está claro que, independientemente del dato inicial, se tiene $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$, pues todas las exponenciales son negativas.

Problema 2.1.8 Si ahora $\alpha < 0$, las soluciones estacionarias son $v(x) = 0$ si $L\sqrt{-\alpha/k} \neq n\pi$ para $n \in I\!N$, mientras que si $L\sqrt{-\alpha/k} = n\pi$ para algún $n \in I\!N$, se tiene $v(x) = c \operatorname{sen}(n\pi x/L)$. La solución del problema de evolución es, igual que antes

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \operatorname{sen}(m\pi x/L) \mathrm{e}^{-(\alpha + km^2\pi^2/L^2)t}$$

Si $\alpha > -k\pi/L^2$, se tiene $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.
Si $\alpha = -k\pi/L^2$, se tiene $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = a_1 \operatorname{sen}(\pi x/L)$.
Si $\alpha < -k\pi/L^2$, no existe $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$, pues oscila cada vez más (hay factores exponenciales que divergen).

Problema 2.1.9

i) Separando variables se tiene

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \operatorname{sen}(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t) \Big) \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\, x)$$

donde $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ y $\omega_n = \sqrt{T_0\lambda_n/\rho}$, mientras que a_n y b_n son los coeficientes de Fourier en senos de $g(x)/\omega_n$ y $f(x)$, respectivamente. Escribiendo la parte temporal como $\alpha_n \cos[\omega_n(t-\delta_n)]$, e igualando términos después de desarrollar el coseno de la suma,

$$\begin{aligned} \alpha_n \operatorname{sen}(\omega_n\delta_n) &= a_n \\ \alpha_n \cos(\omega_n\delta_n) &= b_n \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_n &= \sqrt{a_n^2+b_n^2} \\ \delta_n &= \frac{1}{\omega_n}\operatorname{arctg}(\frac{a_n}{b_n}) \end{aligned}$$

ii) Para cada armónico (es decir, fijado n), en los antinodos se tiene $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\,x) = \pm 1$, que implica $x = \dfrac{(2j+1)L}{2n}$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$.

iii)

$$\left(\frac{\partial U_n}{\partial t}\right)^2 = \alpha_n^2\omega_n^2 \operatorname{sen}^2(\omega_n(t-\delta_n))\operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda_n}\,x)$$

$$\left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^2 = \alpha_n^2\lambda_n \cos^2(\omega_n(t-\delta_n))\cos^2(\sqrt{\lambda_n}\,x)$$

$$\int_0^L \operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx = \int_0^L \cos^2(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx = \frac{L}{2}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho\alpha_n^2\omega_n^2\frac{L}{2}\operatorname{sen}^2(\omega_n(t-\delta_n)) + \frac{1}{2}T_0\alpha_n^2\lambda_n\frac{L}{2}\cos^2(\omega_n(t-\delta_n)) = \frac{1}{4L}T_0 n^2\pi^2\alpha_n^2$$

iv) $a_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_1 = b_1 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(s)\operatorname{sen}(n\pi s/L)\,ds = \dfrac{8A}{\pi^2} \quad \rightsquigarrow \quad E_1 = \dfrac{16T_0A^2}{L\pi^2}$

Problema 2.1.10

i) Derivando e integrando por partes el segundo sumando,

$$\begin{aligned} E'(t) &= \rho\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx + T_0\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\,dx = \rho\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx - T_0\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx \\ &= \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\,dx = 0 \end{aligned}$$

pues $u(0,t) = u(L,t) = 0$ implica $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_0^L = 0$.

ii) Por linealidad, basta demostrar que la única solución con datos iniciales cero es la solución cero. Como $E(t) = cte$, se tiene $E(t) = E(0)$ para todo $t \geq 0$. Pero si $f = g = 0$ en 2.1.9, la energía inicial es

$$E(0) = \frac{\rho}{2}\int_0^L (g(x))^2\,dx + \frac{T_0}{2}\int_0^L (f'(x))^2\,dx = 0$$

Así, para todo $t \geq 0$,

$$\frac{\rho}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{T_0}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow \ u = cte \ \Rightarrow \ u = 0$$

Problema 2.1.11 Por separación de variables

$$u(x,t) = a_0 t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \operatorname{sen}(cnt) + b_n \cos(cnt) \Big) \cos(nx)$$

La posición inicial implica $b_n = 0$ para todo $n \geq 0$. En cuanto a la velocidad inicial,

$$8 \operatorname{sen}^2 x = 4(1 - \cos(2x)) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cn \cos(nx)$$

nos da $a_0 = 4$, $a_2 = -2/c$, $a_n = 0$ para todo $n \neq 0$, 2. Así la solución es

$$u(x,t) = 4t - \frac{2}{c} \operatorname{sen}(2ct) \cos(2x)$$

Problema 2.1.12 Al separar variables $u(x,t) = X(x)T(t)$, la ecuación temporal es $T'' + \alpha T' + \lambda_n c^2 T = 0$, donde los autovalores, de la ecuación espacial, son $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$. La ecuación característica asociada a la ecuación en T tiene soluciones $r = \dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4c^2n^2}}{2}$. Así pues la forma de la parte temporal depende del signo de $\alpha^2 - 4c^2n^2$. Como el dato inicial es $u(x,0) = \operatorname{sen}(2x)$, sólo nos interesa el valor $n = 2$. La solución es entonces:

$$\begin{aligned}
&i)\ \text{si } \alpha < 4c \ \rightsquigarrow \quad && u(x,t) = (a_2 \operatorname{sen}(zt) + b_2 \cos(zt)) \mathrm{e}^{-\alpha t/2} \operatorname{sen} 2x \\
&ii)\ \text{si } \alpha = 4c \ \rightsquigarrow \quad && u(x,t) = (c_2 t + g_2) \mathrm{e}^{-\alpha t/2} \operatorname{sen} 2x \\
&iii)\ \text{si } \alpha > 4c \ \rightsquigarrow \quad && u(x,t) = (h_2 \mathrm{e}^{wt} + j_2 \mathrm{e}^{-wt}) \mathrm{e}^{-\alpha t/2} \operatorname{sen} 2x
\end{aligned}$$

donde $z = \dfrac{\sqrt{16c^2 - \alpha^2}}{2}$, $w = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - 16c^2}}{2}$. Los datos iniciales implican

$$a_2 = \frac{\alpha}{2z}, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = \frac{\alpha}{2}, \quad g_2 = 1, \quad h_2 = \frac{2w + \alpha}{4w}, \quad j_2 = \frac{2w - \alpha}{4w}.$$

Problema 2.1.13

i) Al separar variables $u(r\theta) = R(r)H(\theta)$, la parte radial verifica una ecuación equidimensional $r^2 R'' + rR' - \lambda_n R = 0$, donde a partir de la ecuación angular sabemos que $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$. Teniendo en cuenta la condición de no singularidad en $r = 0$, se tiene

$$R(r) = \begin{cases} r^n & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Por tanto la solución, imponiendo el dato frontera, es

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) [\operatorname{sen} n\phi \operatorname{sen} n\theta + \cos n\phi \cos n\theta]\, d\phi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) P(r,\theta,\phi)\, d\phi
\end{aligned}$$

donde el núcleo de Poisson es

$$\begin{aligned}
P(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n [\operatorname{sen} n\phi \operatorname{sen} n\theta + \cos n\phi \cos n\theta] \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \phi) \right]
\end{aligned}$$

ii) Llamando $z = \frac{r}{a}\, e^{(\theta-\phi)i}$, se tiene

$$\begin{aligned} P(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}e\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n e^{n(\theta-\phi)i}\right] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}e\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}e\left[1 + \frac{2z}{1-z}\right] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}e\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-|z|^2}{1-2\mathcal{R}ez+|z|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\phi)+r^2} \end{aligned}$$

iii) Sustituyendo $r=0$, se tiene $u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\,d\phi$.

Problema 2.1.14 Como $\operatorname{sen}^3\theta = \frac{1}{4}(3\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}3\theta)$, es fácil obtener la solución

$$u(r,\theta) = \frac{1}{4}(3r\operatorname{sen}\theta - r^3\operatorname{sen}3\theta)$$

Problema 2.1.15

i) Por simetría impar alrededor del diámetro, es decir, alrededor de $\theta=0$, la solución se obtiene a partir de la solución en todo el disco con dato frontera obtenido por reflexión impar, $\widetilde{g}(\theta) = \begin{cases} g(\theta) & \text{si } 0<\theta<\pi \\ -g(-\theta) & \text{si } -\pi<\theta<0 \end{cases}$. Así

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{g}(\phi)P(r,\theta,\phi)\,d\phi \\ &= \int_0^{\pi} g(\phi)P(r,\theta,\phi)\,d\phi - \int_{-\pi}^{0} g(-\phi)P(r,\theta,\phi)\,d\phi \\ &= \int_0^{\pi} g(\phi)[P(r,\theta,\phi)-P(r,\theta,-\phi)]\,d\phi \end{aligned}$$

También se puede separar variables directamente y se obtiene

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(\phi)\operatorname{sen}n\phi\,d\phi\,\operatorname{sen}n\theta$$

ii) Reflejando ahora par, la solución es

$$u(r,\theta) = \int_0^{\pi} g(\phi)[P(r,\theta,\phi)+P(r,\theta,-\phi)]\,d\phi$$

O también,

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(\phi)\,d\phi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(\phi)\cos n\phi\,d\phi\,\cos n\theta$$

Problema 2.1.16

i) Separando variables, los autovalores son $\lambda_n = 9n^2$, $n \geq 1$, y la solución

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r^{3n} \operatorname{sen}(3n\theta)$$

El dato frontera implica

$$\alpha_n = \frac{6}{\pi a^{3n}} \int_0^{\pi/3} f(s) \operatorname{sen}(3ns)\, ds$$

ii) En este caso el problema angular es

$$\begin{cases} H'' + \lambda H = 0 \\ H'(0) = H(\pi/3) = 0 \end{cases}$$

Los autovalores son $\lambda_n = \dfrac{9(2n+1)^2}{4}$, $n \geq 0$, y las autofunciones $H_n(\theta) = \cos(\dfrac{3(2n+1)}{2}\theta)$. La solución es

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^{3(2n+1)/2} \cos(\frac{3(2n+1)}{2}\theta)$$

donde

$$\alpha_n = \frac{6}{\pi a^{3(2n+1)/2}} \int_0^{\pi/3} f(s) \cos(\frac{3(2n+1)}{2}\theta)\, ds$$

Problema 2.1.17

i) Por linealidad se tiene $u = u_1 + u_2$, donde

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u(a,\theta) = f(\theta) \\ u(b,\theta) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u(a,\theta) = 0 \\ u(b,\theta) = g(\theta) \end{cases}$$

Para resolver el primero, observamos que la ecuación radial (equidimensional), $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$, tiene soluciones que verifiquen el dato $R(b) = 0$,

$$R(r) = \begin{cases} (b/r)^n - (r/b)^n & \text{si } n \geq 1 \\ \log(b/r) & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Así la solución u_1 tiene la forma

$$u_1(r,\theta) = \beta_0 \log(b/r) + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \operatorname{sen} n\theta + \beta_n \cos n\theta][(b/r)^n - (r/b)^n]$$

El dato en $r = a$ implica

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi[(b/a)^n - (a/b)^n]} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \operatorname{sen} ns\, ds, \quad n \geq 1$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2\pi \log(b/a)} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi[(b/a)^n - (a/b)^n]} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns\, ds, \quad n \geq 1$$

La solución u_2 se obtiene de forma análoga intercambiando a por b. Juntando todo se tiene

$$u(r,\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(s)Q_1(r,\theta,s)+g(s)Q_2(r,\theta,s)]\,ds$$

donde

$$Q_1(r,\theta,s)=\frac{1}{2\pi}\frac{\log(b/r)}{\log(b/a)}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(b/r)^n-(r/b)^n}{(b/a)^n-(a/b)^n}\cos(n(\theta-s))$$

$$Q_2(r,\theta,s)=\frac{1}{2\pi}\frac{\log(r/a)}{\log(b/a)}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(r/a)^n-(a/r)^n}{(b/a)^n-(a/b)^n}\cos(n(\theta-s))$$

ii)

$$u(r,\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}g(s)Q_3(r,\theta,s)\,ds$$

donde

$$Q_3(r,\theta,s)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(r/a)^n+(a/r)^n}{(b/a)^n+(a/b)^n}\cos(n(\theta-s))$$

iii) La condición de compatibilidad es $\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds=0$, es decir, la cantidad total de flujo que sale por la frontera es cero. La solución es

$$u(r,\theta)=\beta_0+\int_{-\pi}^{\pi}f(s)Q_4(r,\theta,s)\,ds$$

donde

$$Q_4(r,\theta,s)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a[(r/b)^n+(b/r)^n]}{n[(a/b)^n-(b/a)^n]}\cos(n(\theta-s))$$

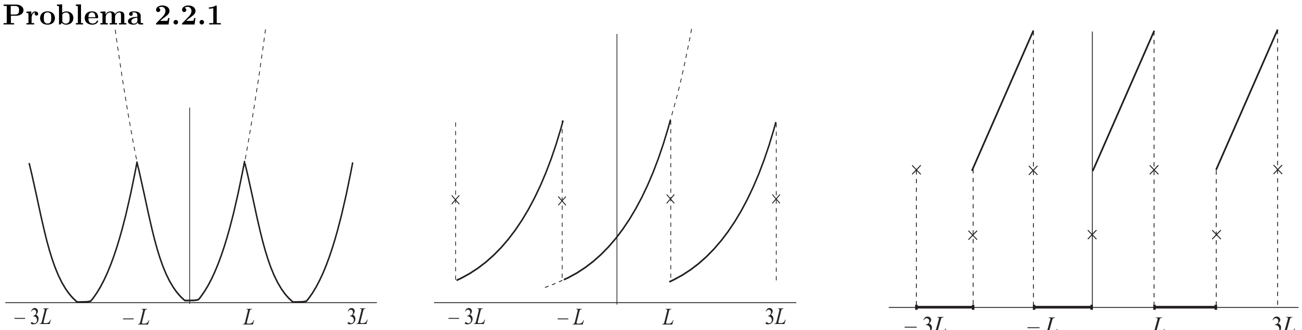
y $\beta_0\in\mathbb{R}$ es un parámetro libre; no hay unicidad.

Problema 2.1.18 La solución es

$$u(r,\theta)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(r/a)^{2n}-(a/r)^{2n}}{(b/a)^{2n}-(a/b)^{2n}}\int_0^{\pi/2}f(s)\,\mathrm{sen}(2ns)\,ds\;\mathrm{sen}(2n\theta)$$

2.2 Series de Fourier

Problema 2.2.1



(b) (d) (f)

Problema 2.2.2

i) $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx)\,.$

ii) $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}((2k+1)x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \operatorname{sen}(4kx)\,.$

iii) $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{\pi}{2k+1} - \frac{4}{\pi(2k+1)^3}\Big) \operatorname{sen}((2k+1)x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{k} \operatorname{sen}(2kx)\,.$

iv) $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2-1)} \operatorname{sen}(2kx)\,.$

Problema 2.2.3

i) Sea $f(x) = -f(L-x)$. Sabiendo que $\cos((n\pi(L-y)/L) = (-1)^n \cos(n\pi y/L)$, y haciendo el cambio de variables $L - x = y$ en la integral entre $L/2$ y L, se tiene

$$\begin{aligned} b_n = {} & \frac{2}{L}\int_0^L f(s)\cos(n\pi s/L)\,ds \\ = {} & \frac{2}{L}\int_0^{L/2} f(s)\cos(n\pi s/L)\,ds + \frac{2}{L}\int_0^{L/2} f(y)(-1)^n\cos(n\pi y/L)\,dy = 0 \end{aligned}$$

siempre que n es impar.

ii) De hecho, el cálculo anterior muestra que si n es par, $n = 2k$, el coeficiente correspondiente es

$$b_{2k} = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} f(s)\cos(2k\pi s/L)\,ds$$

Por otro lado los coeficientes del desarrollo en $[0, L/2]$ son

$$c_m = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} f(s)\cos(2m\pi s/L)\,ds$$

y se obtiene el mismo desarrollo.

Problema 2.2.4 No se puede derivar término a término la serie de Fourier en senos de $f(x)$ y obtener la serie de Fourier en cosenos de $f'(x)$ pues $f(x)$ es discontinua en $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 2.2.5

Sea la serie de Fourier en cosenos $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi x/L)$.

Derivando tenemos la serie de Fourier en senos $\mathrm{e}^x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} A_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)$.

Derivando otra vez, correctamente, resulta

$$\mathrm{e}^x = \frac{1}{L}(\mathrm{e}^L - 1) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[-\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2 A_n + \frac{2}{L}((-1)^n\mathrm{e}^L - 1)\Big]\cos(n\pi x/L)$$

Igualando las series de Fourier en cosenos deducimos $A_n = \dfrac{2L((-1)^n\mathrm{e}^L - 1)}{L^2 + n^2\pi^2}$, $n \geq 1$, $A_0 = \dfrac{1}{L}(\mathrm{e}^L - 1)$.

Problema 2.2.6 Sea la serie de Fourier en senos $\cosh x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)$

i) Derivando tenemos la serie de Fourier en cosenos

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{L}(\cosh L - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi}{L} b_n + \frac{2}{L}((-1)^n \cosh L - 1) \right] \cos(n\pi x/L)$$

Derivando otra vez resulta

$$\cosh x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi}{L} \right) \left[\frac{n\pi}{L} b_n + \frac{2}{L}((-1)^n \cosh L - 1) \right] \operatorname{sen}(n\pi x/L)$$

Igualando las series de Fourier en senos deducimos $b_n = \dfrac{2n\pi(1 - (-1)^n \cosh L)}{L^2 + n^2\pi^2}$

ii) Integrando la serie de Fourier en senos se obtiene

$$\operatorname{senh} x = c_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} b_n \cos(n\pi x/L)$$

Pero c_1 debe ser el término independiente de la serie en cosenos de $\operatorname{senh} x$, por lo que $c_1 = \dfrac{1}{L}(\cosh L - 1)$. Integrando de nuevo se tiene

$$\cosh x = c_1 x + c_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)$$

Evaluando en $x = 0$ se obtiene $c_2 = 1$. Esta expresión no es una serie de Fourier. Necesitamos los desarrollos

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x/L), \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x/L)$$

Igualando las series de Fourier en senos deducimos

$$b_n = \frac{\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} + 2L(-1)^{n+1}(\cosh L - 1)}{1 + (\frac{L}{n\pi})^2} = \frac{2n\pi(1 - (-1)^n \cosh L)}{L^2 + n^2\pi^2}$$