PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
2^{O} Ing. Telecomunicación
CURSO 2009–2010
SOLUCIONES

3 Problemas de Sturm-Liouville

3.1 Autovalores y autofunciones

Problema 3.1.1

i) $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n \geq 1$, $\varphi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x)$.

ii) $\lambda_n = (n+1/2)^2\pi^2$, $n \geq 0$, $\varphi_n(x) = \operatorname{sen}((n+1/2)\pi x)$.

iii) $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n \geq 0$, $\varphi_n(x) = \cos(n\pi x)$.

Problema 3.1.2

i) $\lambda_n = n^2\pi^2 - 3/4$, $n \geq 1$, $y_n(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\operatorname{sen}(n\pi x)$.

ii) $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = x\mathrm{e}^{-x}$; $\lambda_n = -\mu_n^2$, $n \geq 1$, donde $\mu_n = n$–ésimo cero positivo de la función $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $y_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(\mu_n x)$.

iii) $\lambda_0 = -1$, $y_0(x) = 1$; $\lambda_n = (4n^2\pi^2 - 3)/12$, $n \geq 1$, $y_n(x) = \mathrm{e}^{3x/2}(\operatorname{sen}(n\pi x) - \frac{2n\pi}{3}\cos(n\pi x))$.

Problema 3.1.3 $y(x) = 0$.

Problema 3.1.4

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_0^1 (\phi')^2 + \int_0^1 x^2\phi^2}{\displaystyle\int_0^1 \phi^2} \geq 0$$

Si $\lambda = 0$ se tiene $x^2\phi^2 = 0 \Rightarrow \phi = 0$. Así $\lambda = 0$ no es autovalor.

Problema 3.1.5

i) Tomamos como función test $\phi(x) = 1 - x^2$, que verifica $\phi'(0) = \phi(1) = 0$. Así

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_0^1 (\phi')^2 + \int_0^1 x^2\phi^2}{\displaystyle\int_0^1 \phi^2} = \frac{37}{14} \approx 2.64$$

(Tomando $\phi(x) = \cos(\pi x/2)$ la cota es mejor, $\lambda_1 \leq \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \approx 2.59$).

ii) Con $\phi(x) = x^2 - 2$,

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_0^1 (\phi')^2 + \int_0^1 x\phi^2}{\displaystyle\int_0^1 \phi^2} = \frac{75}{86}$$

iii) Con $\phi(x) = 2x^2 - 3x$,

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_0^1 (\phi')^2}{\displaystyle\int_0^1 \phi^2} = \frac{35}{12}$$

Problema 3.1.6 Comparando con círculos de radios a y b, si por ejemplo $a > b$, se tiene $\dfrac{\eta_{0,1}^2}{a^2} \leq \lambda_1 \leq \dfrac{\eta_{0,1}^2}{b^2}$, donde $\eta_{0,1}$ es el primer cero de la función de Bessel J_0. Si la excentricidad a/b es muy grande se obtiene mejor cota inferior comparando con el rectángulo $[-a, a] \times [-b, b]$, que da $\lambda_1 \geq \dfrac{\pi^2}{4a^2} + \dfrac{\pi^2}{4b^2}$.

Problema 3.1.7

i) $uv^{iv)} - vu^{iv)} = (uv''' - u'v'' + u''v' - u'''v)'$.

ii) $A(u, v) = (uv''' - u'v'' + u''v' - u'''v)\Big|_0^1$.

iii) $u(x)v'''(x) = u'(x)v''(x) = u''(x)v'(x) = u'''(x)v(x) = 0$ para $x = 0, 1$.

iv) $\phi(0) = \pi'''(0) = \phi'(1) = \phi''(1) = 0$.

v) Sean (ϕ, λ) y (ψ, μ) dos pares de autofunciones y autovalores. Aplicando el apartado *iii)* se tiene

$$0 = \int_0^1 (\phi \mathcal{L}\psi - \psi \mathcal{L}\phi) = (\lambda - \mu) \int_0^1 \mathrm{e}^x \phi\psi$$

El peso es $\sigma(x) = \mathrm{e}^x$.

vi) La ecuación para (ϕ, λ) implica $\phi\phi^{iv)} + \lambda \mathrm{e}^x \phi^2 = 0$. Por tanto, despejando e integrando por partes,

$$\lambda = \frac{-\displaystyle\int_0^1 (\phi'')^2}{\displaystyle\int_0^1 \phi^2 \mathrm{e}^x} \leq 0$$

Si $\lambda = 0$ se tiene $\phi'' = 0 \Rightarrow \phi' = cte \Rightarrow \phi' = 0 \Rightarrow \phi = cte \Rightarrow \phi = 0$. Así $\lambda = 0$ no es autovalor.

3.2 Series generalizadas de Fourier

Problema 3.2.1

i) Poniendo $u(x, t) = X(x)T(t)$ se tiene la ecuación para la variable espacial $kX'' - V_0 X' + \lambda X = 0$, que no es de tipo Sturm-Liouville.

ii) Se tiene el desarrollo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{V_0 x/2k} \operatorname{sen}(n\pi x/L) \mathrm{e}^{-(\frac{V_0^2}{4k} + \frac{kn^2\pi^2}{L^2})t}$$

El dato inicial implica $a_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L (f(x)\mathrm{e}^{-V_0 x/2k}) \operatorname{sen}(n\pi x/L)\, dx$.

Problema 3.2.2 Igualando coeficientes se tiene $H = p$, $\alpha H = p'$, que implica $H(x) = e^{\int^x \alpha(s)ds}$.

Problema 3.2.3

i) Con $H(x) = 1/x$ se tiene
$$(x\phi')' + \frac{\lambda}{x}\phi = 0$$

ii) Para cada par (φ, λ) se tiene
$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_0^b (\varphi')^2 x\,dx}{\displaystyle\int_1^b \varphi^2 \frac{1}{x}\,dx} \geq 0$$

Si $\lambda = 0$ se obtiene $\varphi' = 0$, que a su vez lleva a $\varphi = 0$.

iii) $\lambda_n = n^2\pi^2/(\log b)^2$, $n \geq 1$, $\varphi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi \log x/\log b)$.

iv) Las autofunciones son ortogonales con peso $\sigma(x) = 1/x$.
$$\int_1^b \operatorname{sen}(\frac{n\pi \log x}{\log b}) \operatorname{sen}(\frac{m\pi \log x}{\log b}) \frac{1}{x}\,dx = \frac{\log b}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(n\pi z)\operatorname{sen}(m\pi z)\,dz = 0 \qquad \text{si } n \neq m$$

v) Es claro que $\operatorname{sen}(n\pi \log x/\log b) = 0$ en los puntos $x = b^{m/n}$, $m = 1, 2, \cdots, n-1$. (O también se puede ver que los ceros son $x = b^z$, donde z son los ceros de $\operatorname{sen}(nz)$ en $0 < z < \pi$).

Problema 3.2.4
$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\eta_{0,n} r/a) e^{-(k\eta_{0,n}^2/a^2)t}$$
donde $\eta_{0,n} = n$–ésimo cero de la función de Bessel J_0, y los coeficientes se calculan por
$$a_n = \frac{\displaystyle\int_0^a f(r) J_0(\eta_{0,n} r/a) r\,dr}{\displaystyle\int_0^a J_0^2(\eta_{0,n} r/a) r\,dr}$$

Problema 3.2.5

i) Representa la vibración de una cuerda sujeta por los extremos, con una fuerza de reacción αu, si $\alpha > 0$ (o de amortiguamiento si $\alpha < 0$), y un rozamiento βu_t (si $\beta < 0$) proporcional a la velocidad.

ii) Poniendo $u(x,t) = X(x)T(t)$ se tiene
$$T_0 \frac{X''(x)}{\rho(x)X(x)} + \frac{\alpha(x)}{\rho(x)} = \frac{H''(t)}{H(t)} - \frac{\beta(x)H'(t)}{\rho(x)H(t)}$$

Necesitamos pues $\beta(x)/\rho(x) = cte.$

iii) Sea $\beta = c\rho$. Las ecuaciones separadas son

$$T_0 X'' + (\alpha + \lambda\rho)X = 0, \qquad H'' - kH' + \lambda H = 0$$

Las soluciones de la parte temporal son, dependiendo de los valores de λ que resultasen de la ecuación espacial,

$$T(t) = \begin{cases} e^{kt/2}\left[c_1 \operatorname{senh}(t\sqrt{k^2/4-\lambda}) + c_2\cosh(t\sqrt{k^2/4-\lambda})\right] & \text{si } \lambda < k^2/2, \\ e^{kt/2}(c_1 t + c_2) & \text{si } \lambda = k^2/2, \\ e^{kt/2}\left[c_1 \operatorname{sen}(t\sqrt{\lambda - k^2/4}) + c_2\cos(t\sqrt{\lambda - k^2/4})\right] & \text{si } \lambda > k^2/2. \end{cases}$$

Problema 3.2.6 Resolviendo la ecuación espacial obtenida al separar variables, se tiene $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n \geq 1$, $X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$. La ecuación temporal es

$$T'' + aT' + (b + \lambda)T = 0$$

Su solución es diferente según los valores de λ en relación con a y b. Así, si $\pi^2/L^2 > a^2/4 - b$, la solución del problema del telegrafista es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-at/2}\left[A_n \operatorname{sen}(w_n t) + B_n \cos(w_n t)\right]\operatorname{sen}(n\pi x/L)$$

donde $w_n = \sqrt{\dfrac{n^2\pi^2}{L^2} - \dfrac{a^2}{4} + b}$, y los coeficientes son $A_n = \dfrac{aB_n}{2w_n}$, $B_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(s)\operatorname{sen}(n\pi s/L)\,ds$.

Si existe $M \in I\!N$ tal que $M - 1 < \dfrac{L}{\pi}\sqrt{\dfrac{a^2}{4} - b} < M$, la solución es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{M-1} e^{-at/2}\left[C_n \operatorname{senh}(z_n t) + D_n\cosh(z_n t)\right]\operatorname{sen}(n\pi x/L) \\ &+ \sum_{n=M}^{\infty} e^{-at/2}\left[A_n \operatorname{sen}(w_n t) + B_n\cos(w_n t)\right]\operatorname{sen}(n\pi x/L) \end{aligned}$$

donde $z_n = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - b - \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}}$, y los nuevos coeficientes son $C_n = \dfrac{aD_n}{2z_n}$, $D_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(s)\operatorname{sen}(n\pi s/L)\,ds$.

Si existe $M \in I\!N$ tal que $\dfrac{L}{\pi}\sqrt{\dfrac{a^2}{4} - b} = M$, la solución es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{M-1} e^{-at/2}\left[C_n \operatorname{senh}(z_n t) + D_n\cosh(z_n t)\right]\operatorname{sen}(n\pi x/L) \\ &+ e^{-at/2}(E_M t + F_M)\operatorname{sen}(M\pi x/L) \\ &+ \sum_{n=M+1}^{\infty} e^{-at/2}\left[A_n \operatorname{sen}(w_n t) + B_n\cos(w_n t)\right]\operatorname{sen}(n\pi x/L) \end{aligned}$$

donde los nuevos coeficientes son $E_M = \dfrac{aF_M}{2}$, $F_M = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(s)\operatorname{sen}(M\pi s/L)\,ds$.

Problema 3.2.7

i) $\lambda_{n,m} = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2} + \dfrac{m^2\pi^2}{H^2}$, $n \geq 0$, $m \geq 1$, $\varphi_{n,m}(x,y) = \cos(n\pi x/L)\,\mathrm{sen}(m\pi y/H)$.

ii) Si $L = H$, se tiene $\varphi_{n,m} \neq \varphi_{m,n}$ para todo $n \neq m$, mientras que $\lambda_{n,m} = \lambda_{m,n}$. Si $L = 2H$ lo mismo ocurre con los pares (n,m) y $(m/2, 2n)$ para todo $n \neq m$.

iii)

$$\int_0^L \int_0^H \varphi_{n,m}\,\varphi_{n',m'}\,dydx = \int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{n'\pi x}{L})\,dx \cdot \int_0^H \mathrm{sen}(\frac{m\pi y}{H})\,\mathrm{sen}(\frac{m'\pi y}{H})\,dy$$

que es cero siempre que $n \neq n'$ ó $m \neq m'$.

Problema 3.2.8

i) Separando variables $u(\vec{x},t) = X(\vec{x})T(t)$ se obtienen los problemas

$$\begin{cases} \Delta X + \dfrac{\lambda}{c^2}X = 0 & \text{en } \Omega \\ X = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \qquad\qquad T'' + \lambda T = 0$$

ii) Sean (ϕ,λ) y (ψ,μ) dos pares de autofunciones y autovalores. Las ecuaciones correspondientes son

$$\Delta\phi + \frac{\lambda}{c^2}\phi = 0, \qquad \Delta\psi + \frac{\mu}{c^2}\psi = 0.$$

Multiplicando la primera por ψ y la segunda por ϕ, restando e integrando en Ω se tiene, utilizando las condiciones de contorno,

$$0 = \int_\Omega (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi) = (\lambda - \mu)\int_\Omega \phi\psi\frac{1}{c^2}$$

Por tanto si $\lambda \neq \mu$ se tiene que ϕ y ψ son ortogonales con peso $\sigma(\vec{x}) = \dfrac{1}{c^2(\vec{x})}$.

iii) Sean (ϕ_n,λ_n), $n \geq 1$, los pares de autofunciones y autovalores. Resolviendo la ecuación temporal se tiene que la solución tendrá la forma

$$u(\vec{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n\,\mathrm{sen}(\omega_n t) + B_n\cos(\omega_n t)]\phi_n(\vec{x})$$

donde las frecuencias de vibración son $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Problema 3.2.9

i) Los autovalores de la ecuación espacial obtenida al separar variables son $\lambda_{n,m} = \dfrac{\eta_{2n,m}^2}{a^2}$, n, $m \geq 1$, donde $\eta_{2n,m} = m$–ésimo cero de la función de Bessel J_{2n}. Por tanto las frecuencias de vibración son $\omega_{n,m} = \dfrac{c\eta_{2n,m}}{a}$.

ii)

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}\sum_{m=1}[A_{n,m}\,\mathrm{sen}(\omega_{n,m}t) + B_{n,m}\cos(\omega_{n,m}t)]\,\mathrm{sen}(2n\theta)J_{2n}(\eta_{2n,m}r/a)$$

donde los coeficientes son $A_{n,m} = 0$ para todo m, $m \geq 1$,

$$B_{n,m} = \frac{4 \int_0^{\pi/2} \int_0^a g(r,\theta) \operatorname{sen}(2n\theta) J_{2n}(\eta_{2n,m} r/a) r \, dr d\theta}{\pi \int_0^a J_{2n}^2(\eta_{2n,m} r/a) r \, dr}$$

Problema 3.2.10 Como la ecuación y los datos son independientes de θ y el dominio es invariante por rotaciones alrededor del eje vertical z, la solución no dependerá de θ. Separamos variables entonces en (r, z, t) y la solución es

$$u(r,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \operatorname{sen}(n\pi z/H) J_0(\eta_{0,m} r/a) \mathrm{e}^{-\lambda_{n,m} kt}$$

donde $\lambda_{n,m} = \dfrac{n^2\pi^2}{H^2} + \dfrac{\eta_{0,m}^2}{a^2}$, siendo $\eta_{0,m} = m$–ésimo cero de la función de Bessel J_0, y los coeficientes son

$$a_{n,m} = \frac{2 \int_0^H \int_0^a f(r,z) \operatorname{sen}(n\pi z/H) J_0(\eta_{0,m} r/a) \, r dr dz}{H \int_0^a J_0^2(\eta_{0,m} r/a) \, r dr}$$

Problema 3.2.11 Separamos variables en (r, θ, z, t) y sólo hay que tener cuidado con la aparición de soluciones constantes en algunos casos por la condición Neumann en la frontera. La solución es

$$u(r,\theta,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi z/H) \Big[A_{n,0,0} \mathrm{e}^{-\lambda_{n,0,0} kt} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{n,m,p} \cos(2m\theta) J_{2m}(\nu_{2m,p} r/a) \mathrm{e}^{-\lambda_{n,m,p} kt} \Big]$$

donde

$$\lambda_{n,m,p} = \begin{cases} \dfrac{n^2\pi^2}{H^2} + 4m^2 + \dfrac{\nu_{2m,p}^2}{a^2} & n \geq 0,\ m \geq 0,\ p \geq 1 \\ \dfrac{n^2\pi^2}{H^2} & n \geq 0,\ m = p = 0 \end{cases}$$

siendo $\nu_{2m,p} = p$–ésimo cero de la función J'_{2m}. Claramente

$$\lim_{t\to\infty} u(r,\theta,z,t) = A_{0,0,0} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f = \frac{4}{\pi a^2 H} \int_0^H \int_0^{\pi/2} \int_0^a f(r,\theta,z) r \, dr d\theta dz$$