PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
2^{O} Ing. Telecomunicación
CURSO 2009–2010
SOLUCIONES

4 Problemas no homogéneos

4.1 Alternativa de Fredholm

Problema 4.1.1 Las soluciones del problema homogéneo son $\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x$, $\varphi_2(x) = \cos x$. Por tanto se debe tener

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\beta + x) \operatorname{sen} x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\beta + x) \cos x \, dx = 0$$

que es falso para todo $\beta \in I\!R$.

Problema 4.1.2

i) La solución general es $u(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + 1$, c_1, $c_2 \in I\!R$. No hay solución que verifique los datos propuestos. La alternativa de Fredholm implica el mismo resultado, pues la solución del problema homogéneo es $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$, y se tiene $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx \neq 0$.

ii) En este caso las condiciones implican $c_1 = 0$, por lo que hay infinitas soluciones, $u(x) = c_2 \cos x + 1$, $c_1 \in I\!R$. Se obtiene el mismo resultado a partir de la alternativa de Fredholm, pues $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0$.

iii) Hay infinitas soluciones $u(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + 1$, c_1, $c_2 \in I\!R$. Se deduce lo mismo de la alternativa de Fredholm pues $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0$.

Problema 4.1.3

i) $u(x) = (c_1 + x/2) \operatorname{sen} x$, $c_1 \in I\!R$. Hay infinitas soluciones, pues $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x \, dx = 0$.

ii) No hay solución pues $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx \neq 0$.

Problema 4.1.4

i) La nueva función $u(x) = y(x) + x - 1$ verifica

$$\begin{cases} u'' + Au = A(x-1) - 4\pi^2 x & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ii) Si $A \leq 0$ ó $\sqrt{A}/\pi \notin I\!N$ entonces hay solución única. Si $A = n^2\pi^2$ para algún $n \in I\!N$, estudiamos la integral

$$\int_0^1 (n^2\pi^2(x-1) - 4\pi^2 x) \operatorname{sen} x \, dx = \frac{4\pi}{n}(-1)^n - n\pi$$

Por tanto, si $n \neq 2$ no hay solución, mientras que si $n = 2$, es decir, $A = 4\pi^2$, hay infinitas soluciones. Éstas se pueden calcular directamente, $y(x) = c \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) - x$, $c \in I\!R$.

4.2 EDP no homogéneas

Problema 4.2.1

i) Desarrollando en autofunciones $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)$, se tiene que los coeficientes A_n verifican

$$\begin{cases} A_n' + k\lambda_n A_n = \phi_n & t > 0,\ n \geq 1 \\ A_n(0) = 0 \end{cases}$$

donde $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, $\phi_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \phi(x)\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)\,dx$. Finalmente la solución es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n}{k\lambda_n}(1 - \mathrm{e}^{-k\lambda_n t})\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)$$

ii) Ahora hay que sustituir ϕ_n por $\phi_n \,\mathrm{sen}\, t$. La solución es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n}{1 + k^2\lambda_n^2}(\mathrm{e}^{-k\lambda_n t} + k\lambda_n \,\mathrm{sen}\, t - \cos t)\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)$$

Problema 4.2.2 Desarrollando en autofunciones $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\,\mathrm{sen}\, nx$, se tiene que los coeficientes C_n verifican

$$\begin{cases} C_n' + n^2 C_n = F_n & t > 0,\ n \geq 1 \\ C_n(0) = g_n \end{cases}$$

donde $F_n = \dfrac{2An[1 - (-1)^n \mathrm{e}^{-a\pi}]}{\pi(a^2 + n^2)}$, $g_1 = 1$, $g_n = 0$ para todo $n \geq 2$. Finalmente la solución es

$$u(x,t) = [F_1 + (1 - F_1)\mathrm{e}^{-t}]\,\mathrm{sen}\, x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{n^2}(1 - \mathrm{e}^{-n^2 t})\,\mathrm{sen}\, nx$$

Problema 4.2.3 Desarrollando en autofunciones $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\cos(n\pi x/L)$, se tiene que los coeficientes B_n verifican

$$\begin{cases} B_n' + k\lambda_n B_n = F_n & t > 0,\ n \geq 0 \\ B_n(0) = g_n \end{cases}$$

donde $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, $F_0 = \mathrm{e}^{-t}$, $F_3 = \mathrm{e}^{-2t}$, $F_n = 0$ para todo $n \neq 0, 3$, $g_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L g(x)\,dx$, $g_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L g(x)\cos(n\pi x/L)\,dx$ para $n \geq 1$. Finalmente la solución es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= g_0 + 1 - \mathrm{e}^{-t} + \left[(g_3 - \frac{1}{9k\pi^2/L^2 - 2})\mathrm{e}^{-(9k\pi^2/L^2)t} + \frac{1}{9k\pi^2/L^2 - 2}\mathrm{e}^{-2t}\right]\cos(3\pi x/L) \\ &\quad + \sum_{n \neq 0,\,3}^{\infty} g_n \mathrm{e}^{-(kn^2\pi^2/L^2)t}\cos(n\pi x/L) \end{aligned}$$

Problema 4.2.4 Desarrollando en autofunciones $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(t)\,\mathrm{sen}(n\pi x)$, se tiene que los coeficientes D_n verifican

$$\begin{cases} D_n'' + n^2\pi^2 A_n = F_n & t > 0,\ n \geq 1 \\ D_n(0) = g_n \\ D_n'(0) = 0 \end{cases}$$

donde $F_n = \dfrac{2h(1-(-1)^n)}{n\pi}$, $g_n = \dfrac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}$. Finalmente la solución es

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^3\pi^3}\,[h + (2-h)\cos((2k+1)\pi t)]\,\mathrm{sen}((2k+1)\pi x)$$

Problema 4.2.5 Desarrollando en autofunciones $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) J_0(\eta_{0,n} r/a)$, donde J_0 es la función de Bessel de orden cero (de primera especie), y $\eta_{0,n} = n$–ésimo cero de J_0, se tiene que los coeficientes A_n verifican

$$\begin{cases} A_n' + \lambda_n A_n = F_n & t > 0,\ n \geq 1 \\ A_n(0) = 0 \end{cases}$$

donde $\lambda_n = \dfrac{\eta_{0,n}^2}{a^2}$, $F_n = \dfrac{\displaystyle\int_0^a J_0(\eta_{0,n} r/a) r^2\,dr}{\displaystyle\int_0^a J_0^2(\eta_{0,n} r/a) r\,dr}$. Finalmente la solución es

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\lambda_n}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_n t}) J_0(\eta_{0,n} r/a)$$

Problema 4.2.6

i) Poniendo $u_e = t^3$ se tiene que $v = u - u_e$ verifica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) - 3t^2 & 0 < r < a,\ t > 0 \\ v(a,t) = 0 & t > 0 \\ v(r,0) = 0 & 0 < r < a \end{cases}$$

ii)

$$u(r,t) = t^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3q_n}{\lambda_n^3}(2\mathrm{e}^{-\lambda_n t} - 2 + 2\lambda_n t - \lambda_n^2 t^2) J_0(\eta_{0,n} r/a)$$

donde $q_n = \dfrac{\displaystyle\int_0^a J_0(\eta_{0,n} r/a) r\,dr}{\displaystyle\int_0^a J_0^2(\eta_{0,n} r/a) r\,dr}$.

Problema 4.2.7

i) Poniendo $v = u - \cos t$, se tiene que v verifica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \Delta v + \cos t & 0 < r < a,\ -\pi < \theta < \pi,\ t > 0 \\ v(a, \theta, t) = 0t & -\pi < \theta < \pi,\ t > 0 \\ v(r, \theta, 0) = -1, \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}(r, \theta, 0) = \cos\theta & 0 < r < a,\ -\pi < \theta < \pi \end{cases}$$

Desarrollando en autofunciones la solución es

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m}(t) \operatorname{sen}(n\theta) + B_{n,m}(t) \cos(n\theta)] J_n(\eta_{n,m} r/a)$$

donde los coeficientes son

$$\begin{array}{ll} A_{n,m}(t) = 0 & \text{si } n \geq 0,\ m \geq 1 \\ B_{n,m}(t) = 0 & \text{si } n \geq 2,\ m \geq 1 \\ B_{0,m}(t) = \dfrac{h_m}{\omega_m^2 - 1} \big(\cos t - (\omega_m^2) \cos(\omega_m t)\big) & \text{si } \omega_m \neq 1,\ m \geq 1 \\ B_{0,m^*}(t) = h_{m^*} \big(\frac{1}{2} t \operatorname{sen} t - \cos t\big) & \text{si } \omega_{m^*} = 1 \\ B_{1,m}(t) = \dfrac{g_m}{\nu_m^2} \operatorname{sen}(\nu_m t) & \text{si } m \geq 1 \end{array}$$

siendo a su vez

$$\omega_m = \frac{c\eta_{0,m}}{a}, \quad \nu_m = \frac{c\eta_{1,m}}{a}, \quad h_m = \frac{\displaystyle\int_0^a J_0(\eta_{0,m} r/a) r\, dr}{\displaystyle\int_0^a J_0^2(\eta_{0,m} r/a) r\, dr}, \quad g_m = \frac{\displaystyle\int_0^a J_1(\eta_{1,m} r/a) r\, dr}{\displaystyle\int_0^a J_1^2(\eta_{1,m} r/a) r\, dr}$$

ii) Hay resonancia si existe algún $m^* \in \mathbb{N}$ tal que $\omega_{m^*} = 1$, es decir, si algún cero de la función de Bessel J_0 vale exactamente a/c. En ese caso la solución es (deshaciendo el cambio de variable)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \cos t + \sum_{m=1,\, m \neq m^*}^{\infty} \frac{h_m}{\omega_m^2 - 1} \big(\cos t - \omega_m^2 \cos(\omega_m t)\big) J_0(\eta_{0,m} r/a) \\ &+ h_{m^*} \big(\frac{1}{2} t \operatorname{sen} t - \cos t\big) J_0(r/c) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{\nu_m^2} \operatorname{sen}(\nu_m t) J_1(\eta_{1,m} r/a) \end{aligned}$$

Problema 4.2.8

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2 f_n}{a^2 n^2 \pi^2} (1 - \cos(an\pi t/L)) \operatorname{sen}(n\pi x/L)$$

donde $f_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L b \operatorname{senh} x \operatorname{sen}(n\pi x/L)\, dx = \dfrac{2bn\pi(-1)^{n+1}}{L^2 + n^2\pi^2} \operatorname{senh} L.$

Problema 4.2.9 Poniendo $v = u - A(1 - x/L)$, se tiene que v verifica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2h\dfrac{\partial v}{\partial t} + b^2 v + b^2 A(1 - x/L) & 0 < x < L,\ t > 0 \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 & t > 0 \\ v(x,0) = -A(1 - x/L) & 0 < x < L \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < L \end{cases}$$

Desarrollando en autofunciones $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \operatorname{sen}(n\pi x/L)$, los coeficientes satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_n''(t) - 2h\alpha_n'(t) + (c^2\lambda_n - b^2)\alpha_n(t) = b^2 f_n & t > 0,\ n \geq 1 \\ \alpha_n(0) = -f_n \\ \alpha_n'(0) = 0 \end{cases}$$

donde $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, $f_n = \dfrac{2A}{L^2}\displaystyle\int_0^L (L - x)\operatorname{sen}(n\pi x/L)\,dx = \dfrac{2A}{n\pi}$. La forma de los coeficientes depende entonces del signo de $D_n = b^2 + h^2 - c^2\lambda_n$. Sea $\gamma = \dfrac{L}{c\pi}\sqrt{b^2 + h^2}$, y sea $k \in I\!N$ tal que $k - 1 < \gamma \leq k$. Es decir, $D_n > 0$ si y sólo si $n \leq k - 1$. Así los coeficientes son

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \dfrac{f_n}{c^2\lambda_n - b^2}\Big[c^2\lambda_n \mathrm{e}^{ht}(\dfrac{h}{S_n}\operatorname{senh}(S_n t) - \cosh(S_n t)) + b^2\Big] & \text{si } 1 \leq n \leq k-1\ (k \geq 2) \\ \dfrac{f_n}{c^2\lambda_n - b^2}\Big[c^2\lambda_n \mathrm{e}^{ht}(\dfrac{h}{R_n}\operatorname{sen}(R_n t) - \cos(R_n t)) + b^2\Big] & \text{si } n > k \ \text{ ó } \ n = k > \gamma \\ \dfrac{f_k}{h^2}\Big[c^2\lambda_k \mathrm{e}^{ht}(ht - 1) + b^2\Big] & \text{si } n = k = \gamma \end{cases}$$

siendo a su vez $S_n = \sqrt{D_n}$, $R_n = \sqrt{-D_n}$. En definitiva, si $\gamma = k \geq 2$, la solución es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A(1 - x/L) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{2A}{n\pi(c^2\lambda_n - b^2)}\Big[c^2\lambda_n \mathrm{e}^{ht}(\frac{h}{S_n}\operatorname{senh}(S_n t) - \cosh(S_n t)) + b^2\Big]\operatorname{sen}(n\pi x/L) \\ &+ \frac{2A}{k\pi h^2}\Big[c^2\lambda_k \mathrm{e}^{ht}(ht - 1) + b^2\Big]\operatorname{sen}(k\pi x/L) \\ &+ \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi(c^2\lambda_n - b^2)}\Big[c^2\lambda_n \mathrm{e}^{ht}(\frac{h}{R_n}\operatorname{sen}(R_n t) - \cos(R_n t)) + b^2\Big]\operatorname{sen}(n\pi x/L) \end{aligned}$$

Si $1 \leq k - 1 < \gamma < k$, sólo hay sumandos del primer y tercer tipo; si $\gamma = 1$ sólo hay sumandos del segundo y tercer tipo; si $0 < \gamma < 1$ sólo hay sumandos del tercer tipo.

Problema 4.2.10 Los autovalores del problema espacial homogéneo asociado son $\lambda_{n,m} = n^2 + m^2$, $n \geq 1$, $m \geq 0$, y las frecuencias naturales de oscilación son $\sigma_{n,m} = c\sqrt{\lambda_{n,m}}$. Hay resonancia si alguna de estas frecuencias coincide con la frecuencia ω de la fuerza. Pero por otro lado los coeficientes del desarrollo del coeficiente de $\cos(\omega t)$ en la fuerza, en la base de autofunciones $\{\operatorname{sen}(nx)\cos(my)\}$, son

$$\begin{aligned} f_{n,m} &= -\frac{4(1 - (-1)^n)(1 - (-1)^m)}{\pi^2 n m^2} & n \geq 1,\ m \geq 1 \\ f_{n,0} &= \frac{(1 - (-1)^n)}{n} & n \geq 1 \end{aligned}$$

Hay pues resonancia si $\omega = c\sqrt{(n^*)^2 + (m^*)^2}$ para algún n^* y m^* impares. Desarrollando ahora en autofunciones $u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m}(t)\,\mathrm{sen}(nx)\cos(my)$, se tiene

$$A_{n,m}(t) = \begin{cases} \dfrac{f_{n,m}}{\omega^2 - \sigma_{n,m}^2}(\cos(\sigma_{n,m}t) - \cos(\omega t)) & \text{los términos sin resonancia} \\ \dfrac{f_{n^*,m^*}}{2\omega}\, t\,\mathrm{sen}(\omega t) & \text{el posible término con resonancia} \end{cases}$$

Problema 4.2.11

i) La condición de solubilidad es

$$\int_\Omega \Delta u = c(9\pi - 4\pi) = 5\pi c$$
$$\shortparallel$$
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 3\cdot 6\pi - 1\cdot 4\pi = 14\pi$$

Por tanto $c = 14/5$.

ii) Sea $u = u(r)$. El problema para u es

$$\begin{cases} r^{-1}(ru')' = c & 2 < r < 3 \\ u'(2) = 1 \\ u'(3) = 3 \end{cases}$$

Las soluciones (infinitas, y sólo si $c = 14/5$) son

$$u(r) = \frac{7}{10}r^2 - \frac{18}{5}\log r + k, \qquad k \in I\!R$$

Para explicar este resultado mediante la alternativa de Fredholm, escribimos $v = u - (r^2 - 3r)$, que verifica

$$\begin{cases} (rv')' = (c-4)r + 3 & 2 < r < 3 \\ v'(2) = v'(3) = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del problema homogéneo son las constantes, por lo que hay solución (infinitas) si y sólo si

$$\int_2^3 1\cdot((c-4)r + 3)\,dr = 0$$

de donde se obtiene el valor anterior de c.

Problema 4.2.12

i) Descomponemos $u = v + w$ con v y w soluciones de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v(2,\theta) = \cos\theta \\ \dfrac{\partial v}{\partial r}(3,\theta) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta w = 1 \\ w(2,\theta) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial r}(3,\theta) = 0 \end{cases}$$

ii) Resolvemos el problema para v por separación de variables

$$v(r,\theta) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \operatorname{sen}(n\theta) + \beta_n \cos(n\theta)\Big((r/3)^n + (r/3)^{-n}\Big)$$

El dato en $r = 2$ implica $\alpha_n = 0$ para todo $n \geq 1$; $\beta_n = 0$ para todo $n \neq 1$; $\beta_1 = \dfrac{1}{2/3 + 3/2} = \dfrac{6}{13}$. La solución es $v(r,\theta) = \dfrac{6}{13} \cos\theta (r/3 + 3/r)$.

El problema para w se resuelve fácilmente observando que w debe ser radial,

$$\begin{cases} r^{-1}(rw')' = 1 & 2 < r < 3 \\ w(2) = w'(3) = 0 \end{cases}$$

Así $w(r) = \dfrac{1}{4} r^2 - \dfrac{9}{2} \log(r/2) - 1$. Finalmente

$$u(r,\theta) = \frac{2}{13}(r + \frac{9}{r}) \cos\theta + \frac{1}{4} r^2 - \frac{9}{2} \log \frac{r}{2} - 1$$

Problema 4.2.13

i)

$$\lambda_{n,m} = n^2 + m^2 + 2 - k, \quad n,\, m \geq 1, \qquad \varphi_{n,m}(x,y) = \mathrm{e}^{-(x+y)} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(my)$$

ii) Poniendo $p = H = \mathrm{e}^{2(x+y)}$, $q = kp$, se tiene

$$\operatorname{div}(p \cdot \nabla u) + qu = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{2(x+y)} \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{2(x+y)} \frac{\partial u}{\partial y}) + k\mathrm{e}^{2(x+y)} u =$$
$$2\mathrm{e}^{2(x+y)} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{e}^{2(x+y)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mathrm{e}^{2(x+y)} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{e}^{2(x+y)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k\mathrm{e}^{2(x+y)} u = \mathrm{e}^{2(x+y)} \mathcal{L}(u)$$

iii) Sea $k = 0$ y sean (λ, φ) autovalor y autofunción, es decir $\operatorname{div}(p \cdot \nabla\varphi) + \lambda H \varphi = 0$. Multiplicando la ecuación por φ e integrando en Q, se obtiene, despejando λ y utilizando las condiciones frontera,

$$\lambda = \frac{-\displaystyle\int_Q \operatorname{div}(p \cdot \nabla\varphi)\varphi}{\displaystyle\int_Q H\varphi^2} = \frac{\displaystyle\int_Q p|\nabla\varphi|^2}{\displaystyle\int_Q H\varphi^2} = \frac{\displaystyle\int_0^\pi \int_0^\pi \mathrm{e}^{2(x+y)} |\nabla\varphi|^2 \, dxdy}{\displaystyle\int_0^\pi \int_0^\pi \mathrm{e}^{2(x+y)} \varphi^2 \, dxdy}$$

iv) Recordemos que $\lambda_{n,m} = n^2 + m^2 + 2 - k$, $n,\, m \geq 1$. Sea primero $k = 5$. Como no existe ningún par de números $n,\, m \in I\!N$ tales que $\lambda_{n,m} = n^2 + m^2 - 3$ sea cero, existirá siempre una única solución del problema, para toda función f. En el caso $k = 7$, como $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 0$, existirá solución (infinitas) si y sólo si f es ortogonal (con peso H) a las autofunciones correspondientes, es decir,

$$\int_0^\pi \int_0^\pi f(x,y) \mathrm{e}^{2(x+y)} \mathrm{e}^{-(x+y)} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2y \, dxdy =$$
$$\int_0^\pi \int_0^\pi f(x,y) \mathrm{e}^{2(x+y)} \mathrm{e}^{-(x+y)} \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} y \, dxdy = 0$$