PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
2^{O} Ing. Telecomunicación
CURSO 2009–2010
SOLUCIONES

5 Función de Green I. Dominios acotados

5.1 Función de Green para EDO

Problema 5.1.1

i) Sea $G(x, x_0)$ la solución, para cada $x_0 \in (0, L)$ fijo, del problema

$$\begin{cases} G_{xx} = \delta(x - x_0) & 0 < x < L \\ G(0, x_0) = G_x(L, x_0) = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\int_0^L (u(x)G_{xx}(x, x_0) - G(x, x_0)u''(x))\, dx = -u'(L)G(L, x_0) - u(0)G_x(0, x_0)$$

$$\parallel$$

$$u(x_0) - \int_0^L f(x)G(x, x_0)\, dx$$

Intercambiando x por x_0 y utilizando la simetría de $G(x, x_0)$ se tiene la representación

$$u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x, x_0)\, dx_0 - AG_{x_0}(x, 0) - BG(x, L)$$

Se puede obtener esta misma representación de la solución por otro procedimiento. Consideremos la función $v(x) = u(x) - A - Bx$, que verifica

$$\begin{cases} v'' = f & 0 < x < L \\ v(0) = v'(L) = 0 \end{cases}$$

Para este problema se tiene la fórmula estándar $v(x_0) = \displaystyle\int_0^L f(x_0)G(x, x_0)\, dx_0$. Así

$$u(x_0) = \int_0^L f(x)G(x, x_0)\, dx_0 + A + Bx$$

La función de Green de este problema es fácil de obtener, $G(x, x_0) = -\min\{x, x_0\}$, con lo que $G(x, L) = -x$, $G_{x_0}(x, 0) = -1$. Ambas fórmula coinciden.

ii) Sea $G(x, x_0)$ solución de

$$\begin{cases} G_{xx} + G = \delta(x - x_0) & 0 < x < L \\ G(0, x_0) = G(L, x_0) = 0 \end{cases}$$

Igual que antes se tiene

$$u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x, x_0)\, dx_0 - AG_{x_0}(x, 0) + BG_{x_0}(x, L)$$

Podríamos haber considerado también la función $v(x) = u(x) - A - (B - A)x/L$.

iii) Sea $G(x, x_0)$ solución de

$$\begin{cases} G_{xx} = \delta(x - x_0) & 0 < x < L \\ G(0, x_0) = G_x(L, x_0) + hG(L, x_0) = 0 \end{cases}$$

Igual que antes se tiene

$$u(x) = \int_0^L f(x_0) G(x, x_0)\, dx_0 - AG_{x_0}(x, 0)$$

Podríamos haber considerado también la función $v(x) = u(x) - A(1 - \dfrac{h}{1 + hL} x)$.

Problema 5.1.2

i)

$$u''(x) = f(x) \quad \rightsquigarrow \quad u'(x) = \int_0^x f(t)\, dt + k_1 \quad \rightsquigarrow \quad u'(x) = -\int_x^L f(t)\, dt \quad \rightsquigarrow$$
$$u(x) = -\int_0^x \int_s^L f(t)\, dtds + k_2 \quad \rightsquigarrow \quad u(x) = -\int_0^x \int_x^L f(t)\, dtds$$

ii) Dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea son $v_1(x) = 1,\ v_2(x) = x$. Ponemos entonces $u(x) = c_1(x) + c_2(x)x$, donde

$$c_1(x) = a_1 - \int_0^x s f(s)\, ds, \qquad c_2(x) = a_2 + \int_0^x f(s)\, ds$$

Los datos frontera implican $a_1 = 0$, $a_2 = -\int_0^L f(s)\, ds$. Finalmente la solución es

$$u(x) = -\int_0^x s f(s)\, ds - x \int_x^L f(s)\, ds$$

Si queremos comprobar que las soluciones de los dos apartados coinciden integramos por partes.

iii) De la igualdad anterior se puede identificar la función de Green de este problema

$$G(x, s) = \begin{cases} -s & 0 \le x \le s \\ -x & s \le x \le L \end{cases}$$

iv) Como la función de Green verifica $G_{xx} = 0$ para todo $x \neq x_0$, debe ser

$$G(x, x_0) = \begin{cases} a_1(x_0) + b_1(x_0)x & 0 \le x \le x_0 \\ a_2(x_0) + b_2(x_0)x & x_0 \le x \le L \end{cases}$$

Las condiciones frontera implican $a_1 = b_2 = 0$. La condición de continuidad en $x = x_0$ implica $a_2 = b_1 x_0$. La condición de salto implica $-b_1 = 1$. Se obtiene la misma función que en el apartado anterior.

Problema 5.1.3

i) Sean u y v dos funciones regulares a trozos que verifican las condiciones frontera dadas. Se tiene

$$\int_0^1 (uv'' - vu'') = u(1)v'(1) - u'(1)v(1) - u(0)v'(0) + u'(0)v(0) = 0$$

ii)

$$y(x_0) = \int_0^1 f(x)G(x, x_0)\, dx_0$$

iii) La función de Green $G(x, x_0)$ verifica, para cada $x_0 \in (0, 1)$ fijo,

$$\begin{cases} G_{xx} = \delta(x - x_0) & 0 < x < 1 \\ G(0, x_0) = G_x(0, x_0) \\ G(1, x_0) = G_x(1, x_0) \end{cases}$$

Así

$$G(x, x_0) = \begin{cases} a_1(x_0) + b_1(x_0)x & 0 \leq x \leq x_0 \\ a_2(x_0) + b_2(x_0)x & x_0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

con las condiciones

$$\begin{cases} a_1 = 0,\ b_2 = 0 \\ a_2 - b_1 x_0 = 0 \\ -b_1 = 1 \end{cases}$$

que implican

$$G(x, x_0) = \begin{cases} x_0(x + 1) & 0 \leq x \leq x_0 \\ x(x_0 + 1) & x_0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Con esta función, y la fórmula de representación anterior, la solución del problema es

$$y(x) = x \int_0^x (x_0 + 1) f(x_0)\, dx_0 + (x + 1) \int_x^1 x_0 f(x_0)\, dx_0$$

Problema 5.1.4 Sea el problema

$$\begin{cases} u'' + u = x & 0 < x < \pi \\ u(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

i) El problema homogéneo asociado no tiene solución, por lo que el problema no homogéneo tiene solución única.

ii) La función de Green es

$$G(x, x_0) = \begin{cases} a_1(x_0) \operatorname{sen} x + b_1(x_0) \cos x & 0 \leq x \leq x_0 \\ a_2(x_0) \operatorname{sen} x + b_2(x_0) \cos x & x_0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

con las condiciones

$$\begin{cases} b_1 = 0,\ a_2 = 0 \\ b_2 \cos x_0 - a_1 \operatorname{sen} x_0 = 0 \\ -b_2 \operatorname{sen} x_0 - a_1 \cos x_0 = 1 \end{cases}$$

que implican

$$G(x,x_0) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x \cos x_0 & 0 \le x \le x_0 \\ -\operatorname{sen} x_0 \cos x & x_0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Con esta función, y la fórmula de representación, la solución del problema es

$$u(x) = -\cos x \int_0^x x_0 \operatorname{sen} x_0 \, dx_0 - \operatorname{sen} x \int_0^\pi x_0 \cos x_0 \, dx_0 = x + \operatorname{sen} x$$

iii) Aplicando el método de variación de las constantes, la solución del problema con término independiente general $f(x)$ es

$$u(x) = (c_1(x) + k_1) \operatorname{sen} x + (c_2(x) + k_2) \cos x$$

donde $c_1(x) = \int_0^x f(s) \cos s \, ds$, $c_1(x) = -\int_0^x f(s) \operatorname{sen} \, ds$. Los datos frontera implican $k_2 = 0$, $k_1 = -\int_0^\pi f(s) \cos s \, ds$. Así,

$$u(x) = \big(-\int_x^\pi f(s) \cos s \, ds\big) \operatorname{sen} x - \big(\int_0^x f(s) \operatorname{sen} s \, ds\big) \cos x$$

de donde se deduce la función de Green, que coincide con la obtenida en el apartado *ii*).

Problema 5.1.5

i) El problema homogéneo asociado tiene solución sólo si $k = 1/4 - n^2$ con $n \in I\!N$, por lo que el problema no homogéneo tiene solución única para todo $k \neq 1/4 - n^2$.

ii) Multiplicando por $H(x) = \mathrm{e}^{-x}$ se tiene la ecuación $(\mathrm{e}^{-x}u')' + k\mathrm{e}^{-x}u = g$, donde $g = \mathrm{e}^{-x}f$.

iii) La función de Green $G(x,x_0)$ verifica, para cada $x_0 \in (0,\pi)$ fijo, el problema

$$\begin{cases} (\mathrm{e}^{-x}G_x)_x + \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x}G = \delta(x-x_0) & 0 < x < \pi \\ G(0,x_0) = G(\pi,x_0) = 0 \end{cases}$$

Su solución es

$$G(x,x_0) = \begin{cases} \mathrm{e}^{(x+x_0)/2}(x_0/\pi - 1)x & 0 \le x \le x_0 \\ \mathrm{e}^{(x+x_0)/2}(x/\pi - 1)x_0 & x_0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Con esta función, y la fórmula de representación, la solución del problema es

$$u(x) = \int_0^\pi g(x_0)G(x,x_0)\, dx_0 = (x/\pi - 1)\int_0^x \mathrm{e}^{(x-x_0)/2} x_0 f(x_0)\, dx_0$$
$$+x\int_0^x \mathrm{e}^{(x-x_0)/2}(x_0/\pi - 1) f(x_0)\, dx_0$$

Problema 5.1.6

i) Multiplicando por $H(x) = \mathrm{e}^{2x}$ se tiene la ecuación $(\mathrm{e}^{2x}y')' + 2\mathrm{e}^{2x}y = g$, donde $g = \mathrm{e}^{2x}f$.

ii) La función de Green correspondiente es

$$G(x,x_0) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-(x+x_0)} \operatorname{sen} x \cos x_0 & 0 \le x \le x_0 \\ -\mathrm{e}^{-(x+x_0)} \operatorname{sen} x_0 \cos x & x_0 \le x \le \pi/2 \end{cases}$$

iii) Aplicando la fórmula de representación se tiene

$$\begin{aligned} y(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\cos x\int_0^x \operatorname{sen} x_0\,dx_0 - \mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} x\int_x^{\pi/2}\cos x_0\,dx_0 \\ &= \mathrm{e}^{-x}(1-\operatorname{sen} x-\cos x) \end{aligned}$$

Problema 5.1.7

i) Dividiendo por x^3 se tiene la ecuación $(x^{-1}y')' + Ax^{-3}y = 1$.

ii) Para $A = 0$ no hay solución del problema homogéneo, por lo que el problema no homogéneo tiene solución única. Para $A = 1$ hay una solución del problema homogéneo, $y_H(x) = x$. No hay solución del problema no homogéneo pues $\displaystyle\int_1^2 x\,dx \neq 0$.

iii) Para $A = 0$ la función de Green correspondiente es

$$G(x,x_0) = \begin{cases} -(x^2+1)(x_0^2+4)/6 & 1 \le x \le x_0 \\ -(x_0^2+1)(x^2+4)/6 & x_0 \le x \le 2 \end{cases}$$

iv) $y(x) = \displaystyle\int_1^2 G(x,x_0)\,dx_0 = (3x^3-14x^2-8)/9.$

Problema 5.1.8

i) Hay solución del problema homogéneo si y sólo si $\alpha = 1/2$, que es $u_H(x) = x-1$. Por tanto, si $\alpha \neq 1/2$ hay solución única del problema no homogéneo, mientras que si $\alpha = 1/2$ no hay solución, pues $\displaystyle\int_0^1 (x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\,dx \neq 0$.

ii) Para $\alpha \neq 1/2$ la función de Green correspondiente es

$$G(x,x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha-1}(\alpha x+\alpha-1)(x_0-1) & 0 \le x \le x_0 \\ \dfrac{1}{2\alpha-1}(\alpha x_0+\alpha-1)(x-1) & x_0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Problema 5.1.9

i) $u(x) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x_0)G(x,x_0)\,dx_0$ donde

$$G(x,x_0) = \begin{cases} (\log x_0 - 1)\log x & 1 \le x \le x_0 \\ (\log x - 1)\log x_0 & x_0 \le x \le \mathrm{e} \end{cases}$$

ii) $u(x) = \displaystyle\int_1^2 f(x_0)G(x,x_0)\,dx_0$ donde

$$G(x,x_0) = \begin{cases} \dfrac{x_0^2-4)}{2xx_0} & 1 \le x \le x_0 \\ \dfrac{x^2-4)}{2xx_0} & x_0 \le x \le 2 \end{cases}$$

iii) $u(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x_0} f(x_0) G(x,x_0)\,dx_0$ donde

$$G(x,x_0) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x}(1-\mathrm{e}^{x_0-3})/3 & 0 \le x \le x_0 \\ \mathrm{e}^{x_0}(1-\mathrm{e}^{x-3})/3 & x_0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Problema 5.1.10

i)

$$G(x,x_0) = \begin{cases} a_1(x_0)x^3 + b_1(x_0)x^2 + c_1(x_0)x + d_1(x_0) & 0 \le x \le x_0 \\ a_2(x_0)x^3 + b_2(x_0)x^2 + c_2(x_0)x + d_2(x_0) & x_0 \le x \le L \end{cases}$$

con cuatro condiciones de contorno, tres condiciones de continuidad (para G, G_x y G_{xx}), y una condición de salto para G_{xxx}.

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ a_2L^3 + b_2L^2 + c_2L + d_2 = 0 \\ c_1 = 0 \\ 6a_2L + 2b_2 = 0 \\ (a_2-a_1)x_0^3 + (b_2-b_1)x_0^2 + (c_2-c_1)x_0 + d_2 - d_1 = 0 \\ 3(a_2-a_1)x_0^2 + 2(b_2-b_1)x_0 + (c_2-c_1) = 0 \\ 6(a_2-a_1)x_0 + 2(b_2-b_1) = 0 \\ 6(a_2-a_1) = 1 \end{cases}$$

Si elegimos para el intervalo $x_0 \le x \le L$ la función $a_2(x_0)(L-x)^3 + b_2(x_0)(L-x)^2 + c_2(x_0)(L-x) + d_2(x_0)$, el sistema se simplifica notablemente.

ii) Como el operador es autoadjunto con las condiciones de contorno dadas, repitiendo la demostración estándar para operadores de Sturm-Liouville, se obtiene
$u(x) = \displaystyle\int_0^L f(x_0)G(x,x_0)\,dx_0$.

5.2 Función de Green para EDP

Problema 5.2.1 Desarrollando en autofunciones

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m}\,\mathrm{sen}(n\pi x/a)\,\mathrm{sen}(m\pi y/b)$$

y sustituyendo en la ecuación, se tiene $A_{n,m} = -\dfrac{f_{n,m}}{\lambda_{n,m}}$, donde $\lambda_{n,m} = \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} + \dfrac{m^2\pi^2}{b^2}$, y $f_{n,m}$ son los coeficientes del desarrollo de f en la base de autofunciones, es decir

$$f_{n,m} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x_0,y_0)\,\mathrm{sen}(n\pi x_0/a)\,\mathrm{sen}(m\pi y_0/b)\,dy_0 dx_0$$

Finalmente la función de Green será todo el factor que multiplica a f en la integral que define a u:

$$G(x,y,x_0,y_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4ab}{\pi^2(n^2b^2+m^2a^2)}\,\mathrm{sen}(n\pi x/a)\,\mathrm{sen}(m\pi y/b)\,\mathrm{sen}(n\pi x_0/a)\,\mathrm{sen}(m\pi y_0/b)$$

Problema 5.2.2

i) Desarrollando en autofunciones $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)$, los coeficientes son

$$a_n(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_n k t}\Big(g_n + \int_0^t f_n(t_0)\mathrm{e}^{\lambda_n k t_0}\,dt_0\Big)$$

donde $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, y los coeficientes de los desarrollos de f y g en la base de autofunciones son

$$g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x_0)\,\mathrm{sen}(n\pi x_0/L)\,dx_0, \qquad f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x_0,t)\,\mathrm{sen}(n\pi x_0/L)\,dx_0$$

ii) La solución es entonces

$$u(x,t) = \int_0^L g(x_0)G(x,t,x_0,0)\,dx_0 + \int_0^t\int_0^L f(x_0,t_0)G(x,t,x_0,t_0)\,dx_0dt_0$$

donde la función de Green es

$$G(x,t,x_0,t_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\,\mathrm{e}^{-\lambda_n k(t-t_0)}\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)\,\mathrm{sen}(n\pi x_0/L)$$

Problema 5.2.3

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t\int_0^L Q(x_0,t_0)G(x,t,x_0,t_0)\,dx_0dt_0 \\ &- \int_0^L\Big[f(x_0)G_{t_0}(x,t,x_0,0) - g(x_0)G(x,t,x_0,0)\Big]\,dx_0 \end{aligned}$$

donde la función de Green es

$$G(x,t,x_0,t_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi c}\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)\,\mathrm{sen}(n\pi x_0/L)\,\mathrm{sen}(n\pi c(t-t_0)/L)$$

Problema 5.2.4

i) La función $v(x,t) = \mathrm{e}^{\alpha t}u(x+kt,t)$ verifica la ecuación del calor $v_t = v_{xx}$.

ii) Derivando la energía, sustituyendo en la ecuación e integrando por partes,

$$\begin{aligned} E'(t) &= \mathrm{e}^{2\alpha t}\Big(\alpha\int_{-L}^L u^2 + \int_{-L}^L uu_t\Big) = \mathrm{e}^{2\alpha t}\Big(\alpha\int_{-L}^L u^2 + \int_{-L}^L u(u_{xx} - ku_x - \alpha u)\Big) \\ &= -\mathrm{e}^{2\alpha t}\int_{-L}^L (u_x)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

iii) Utilizamos separación de variables

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{e}^{kx/2}\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi(x+L)}{2L})\,e^{-\lambda_n t}$$

para deducir la función de Green

$$G(x,t,x_0,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\,\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\mathrm{e}^{k(x-x_0)/2}\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi(x+L)}{2L})\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi(x_0+L)}{2L})$$

donde $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{4L^2} + \alpha + \dfrac{k^2}{4}$.