PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
2^{O} Ing. Telecomunicación
CURSO 2009–2010
SOLUCIONES

6 Función de Green II. Dominios no acotados

6.1 Transformada de Fourier

Problema 6.1.1

i) La transformada de Fourier es un operador lineal pues la integral lo es, $(\lambda f + \mu g)\hat{} = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g}$.

ii) Si f es real, el conjugado complejo de $\hat{f}$ se reduce a cambiar de signo en el exponente de la exponencial.

iii) Basta realizar el cambio de variable $x - \beta = y$ en la integral que define la transformada de Fourier de $f(x - \beta)$.

iv) $F'(\xi) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} ixf(x)\mathrm{e}^{ix\xi}\, dx = i(xf(x))\hat{}(\xi)$.

Problema 6.1.2

i) $(x_j f(\vec{x}))\hat{}(\vec{\xi}\,) = -i\dfrac{\partial F}{\partial \xi_j}(\vec{\xi}\,)$.

ii) $(\dfrac{\partial f}{\partial x_j})\hat{}(\vec{\xi}\,) = -i\xi_j \hat{f}(\vec{\xi}\,)$.

iii) $(\Delta f)\hat{}(\vec{\xi}\,) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2})\hat{}(\vec{\xi}\,) = -|\vec{\xi}\,|^2 \hat{f}(\vec{\xi}\,)$.

Problema 6.1.3

$$
\begin{aligned}
f(x)\, g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-ix\xi}\, d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi)\mathrm{e}^{-ix\xi}\, d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-ix\xi}\, d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\eta - \xi)\mathrm{e}^{-ix(\eta-\xi)}\, d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta - \xi)\, d\xi \Big) \mathrm{e}^{-ix\eta}\, d\eta = 2\pi(\hat{f} * \hat{g})\check{}(x),
\end{aligned}
$$

por lo que $(f\, g)\hat{} = 2\pi \hat{f} * \hat{g}$.

Problema 6.1.4

i) Basta realizar el cambio de variable $x/\alpha = y$.

ii) El mismo cambio funciona. Si α es grande, g es ancha y baja, mientras que $\hat{g}$ es estrecha; basta comprobar el efecto de una dilatación en una función sencilla, por ejemplo $g(x) = \operatorname{sen} x$.

iii) Haciendo el cambio de variables $\vec{x}/\alpha = \vec{y}$, como el jacobiano es α^n, necesitamos tener $\beta = \alpha^{-n}$.

iv) $\hat{g}(\vec{\xi}\,) = \hat{f}(\alpha\vec{\xi}\,)$.

Problema 6.1.5

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, e^{-\beta(x-x_0)^2}\, dx = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}.$

ii) Es inmediato pues se trata de una exponencial negativa, que elimina cualquier potencia de β en el límite.

iii) si $\alpha = \sqrt{\dfrac{\beta}{\pi}}$, entonces $\hat{g}(\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{ix_0\xi}\mathrm{e}^{-\xi^2/4\beta}$, y $\displaystyle\lim_{\beta\to\infty} \hat{g}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{ix_0\xi}$.

iv) Si $f(x) = \delta(x - x_0)$, se tiene $\displaystyle\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\mathrm{e}^{ix\xi}\, dx = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{ix_0\xi}$.

Problema 6.1.6 Sea $\displaystyle I(x,t) = \int_0^{\infty} e^{-k\xi^2 t} \cos(\xi x)\, d\xi$. Derivando, e integrando después por partes,

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial x}(x,t) &= -\int_0^{\infty} e^{-k\xi^2 t}\, \xi \operatorname{sen}(\xi x)\, d\xi \\ &= \frac{1}{2kt}\operatorname{sen}(\xi x)\mathrm{e}^{-k\xi^2 t}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{x}{2kt}e^{-k\xi^2 t} \cos(\xi x)\, d\xi = -\frac{x}{2kt}I(x,t).\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación diferencial para I, tenemos $I(x,t) = c(t)\mathrm{e}^{-x^2/4kt}$. El coeficiente se calcula como $\displaystyle c(t) = I(0,t) = \int_0^{\infty} e^{-k\xi^2 t}\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{4kt}}$, y así $I(x,t) = \pi K(x,t)$, donde K es el núcleo de Gauss.

6.2 Transformación de ecuaciones

Problema 6.2.1

i) Transformando por Fourier en x, tenemos el problema diferencial en t para $\hat{u}(\xi,t)$,

$$\begin{cases} \hat{u}_t + k\xi^2\hat{u} + ci\xi\hat{u} = 0, & t > 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

Su solución es $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-(k\xi^2+ic\xi)t}$. Por tanto

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\frac{(x+ct-y)^2}{4kt}}\, dy.$$

ii) Si $f(x) = \delta(x)$, se tiene $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+ct)^2}{4kt}}$. Es una gaussiana decreciente en tiempo, con un máximo en $x = -ct$, desplazándose (hacia la izquierda si $c > 0$) con velocidad c.

iii) Poniendo $u(x,t) = v(x + ct, t)$, se tiene que v verifica la ecuación del calor

$$\begin{cases} v_t = kv_{yy}, & y \in I\!R,\ t > 0, \\ v(y,0) = f(y). \end{cases}$$

Problema 6.2.2

i) Transformando por Fourier en x, tenemos el problema diferencial en t para $\hat{u}(\xi, t)$,

$$\begin{cases} \hat{u}_t + k\xi^2 \hat{u} + \gamma \hat{u} = 0, & t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

Su solución es $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-(k\xi^2+\gamma)t}$. Por tanto

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \mathrm{e}^{-\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\, dy.$$

ii) Poniendo $u(x,t) = \mathrm{e}^{-\gamma t} v(x,t)$, se tiene que v verifica la ecuación del calor como antes.

Problema 6.2.3

i)

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} (a - |x|) \mathrm{e}^{ix\xi}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^a (a - x)(\mathrm{e}^{ix\xi} + \mathrm{e}^{-ix\xi})\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^a (a - x) \cos(x\xi)\, dx = \frac{1 - \cos(a\xi)}{\pi \xi^2}. \end{aligned}$$

ii) Transformando por Fourier en x, tenemos el problema diferencial en t para $\hat{u}(\xi, t)$,

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + \xi^2 \hat{u} = 1/2\pi, & t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_t(\xi, 0) = 0. \end{cases}$$

Su solución es $\hat{u}(\xi, t) = \dfrac{1 - \cos(\xi t)}{2\pi \xi^2}$. Por el apartado anterior, se tiene $u(x,t) = \dfrac{1}{2}(t - |x|) H(t - |x|)$.

Por otro lado, aplicando la fórmula explícita (d'Alambert) de la solución de la ecuación de ondas en $I\!R$, se tiene la misma solución:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-t_0)}^{x+(t-t_0)} \delta(x_0)\, dx_0 = \frac{1}{2} \int_0^t \chi_{\{|x| \le (t-t_0)\}}\, dt_0 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \chi_{\{t_0 \le t - |x|\}}\, dt_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}(t - |x|) & \text{si } t > |x| \\ 0 & \text{si } t \le |x|. \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 6.2.4 Transformando por Fourier en x, tenemos el problema diferencial en t para $\hat{u}(\xi, t)$,

$$\begin{cases} \hat{u}_t + \xi^2 \hat{u} = 0, & t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = 1/2\pi \end{cases}$$

Su solución es $\hat{u}(\xi, t) = \dfrac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\xi^2 t}$. Por tanto $u(x,t) = \dfrac{1}{4\pi t} \mathrm{e}^{-x^2/4t}$.

Problema 6.2.5 Transformando por Fourier, se tiene que $\hat{y}(\xi)$ verifica la ecuación $-\xi^2 \hat{y} + i\hat{y}' = 0$, cuya solución general es $\hat{y}(\xi) = c\mathrm{e}^{-i\xi^3/3}$. Por tanto $y(x) = c \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi^3/3} \mathrm{e}^{-ix\xi}\, d\xi$.
Como $y(0) = c \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi^3/3}\, d\xi = 2c \int_0^{\infty} \cos(\xi^3/3)\, d\xi$, se tiene $c = \dfrac{1}{2\pi}$, es decir

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi^3/3} \mathrm{e}^{-ix\xi}\, d\xi.$$

Problema 6.2.6

i) Transformando por Fourier en x, tenemos el problema diferencial en t para $\hat{u}(\xi,t)$,

$$\begin{cases} \hat{u}_t - ki\xi^3\hat{u} = 0, & t>0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

Su solución es $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{ki\xi^3 t}$. Por tanto $u = f * L$, donde $\hat{L}(\xi) = \mathrm{e}^{ikt\xi^3}$.

ii) Usando el problema anterior y la propiedad de dilatación, se tiene

$$u(x,t) = (3kt)^{-1/3}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{Ai}((3kt)^{-1/3}(y-x))\,dy.$$

iii) Si $f(x) = H(x)$, la solución es

$$u(x,t) = (3kt)^{-1/3}\int_0^{\infty} \mathrm{Ai}((3kt)^{-1/3}(y-x))\,dy = \int_{-x(3kt)^{-1/3}}^{\infty} \mathrm{Ai}(z)\,dz.$$

6.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson

Problema 6.3.1 Las soluciones de la ecuación $r^{1-n}(r^{n-1}\Gamma')' = 0$ para $r \neq 0$ son

$$\Gamma(r) = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2-n} r^{2-n} + b & \text{si } n \neq 0 \\ a_2 \log r + b & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

donde b es cualquier constante, que tomamos, cero. Podemos calcular la constante a_n integrando la ecuación $\Delta G(\vec{x},\vec{x_0}) = \delta(\vec{x}-\vec{x_0})$ en una bola $B_\varepsilon = \{|\vec{x}-\vec{x_0}| \leq \varepsilon\}$:

$$\begin{aligned} 1 = & \int_{B_\varepsilon} \delta(\vec{x}-\vec{x_0})\,dx = \int_{B_\varepsilon} \Delta G(\vec{x},\vec{x_0})\,dx = \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \nu}(\vec{x},\vec{x_0})\,dx \\ = & \int_{\partial B_\varepsilon} a_n \varepsilon^{1-n} = a_n\omega_n \end{aligned}$$

donde ω_n es la medida de la esfera unidad en $I\!R^n$. Hemos utilizado el teorema de la divergencia y el hecho de que $\dfrac{\partial G}{\partial \nu} = \Gamma'$, así como que la medida de la esfera de radio ε es $|\partial B_\varepsilon| = \omega_n \varepsilon^{n-1}$. Como la medida de la esfera unidad es fácil de obtener en dimensiones 1, 2 y 3, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$, se tiene que la función de Green en esta dimensiones es

$$G(\vec{x},\vec{x_0}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|\vec{x}-\vec{x_0}| & \text{si } n=1 \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|\vec{x}-\vec{x_0}| & \text{si } n=2 \\ -\dfrac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x_0}|} & \text{si } n=3 \end{cases}$$

Problema 6.3.2

i) Debemos suponer que se verifica la condición $\lim\limits_{|x|+y\to\infty} u(x,y) = 0$. Transformando por Fourier en x, tenemos el problema diferencial en y para $\hat{u}(\xi,y)$,

$$\begin{cases} -\xi^2\hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0, & y>0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \\ \lim\limits_{y\to\infty} \hat{u}(\xi,y) = 0. \end{cases}$$

Su solución es $\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-|\xi|y}$. Por tanto

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\,\frac{2y}{(x-x_0)^2+y^2}\,dx_0.$$

ii) El núcleo de Poisson es $P(x,y,x_0) = \dfrac{y}{\pi[(x-x_0)^2+y^2]}$

iii) Por el método de las imágenes, $G(x,y,x_0,y_0) = \dfrac{1}{4\pi}\log(\dfrac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2})$.

iv)

$$\frac{\partial G}{\partial y_0}(x,y,x_0,0) = -\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-x_0)^2+y^2} = -P(x,y,x_0).$$

Problema 6.3.3 Por el método de las imágenes, la función de Green para la ecuación de Poisson en el semiplano con condición frontera Neumann es

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi}\log\Big[\Big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\Big)\Big((x-x_0)^2+(y+y_0)^2\Big)\Big]$$

Problema 6.3.4 Transformando por Fourier en y, tenemos el problema diferencial en x para $\hat{u}(x,\xi)$,

$$\begin{cases} \hat{u}_{xx} - \xi^2\hat{u} = 0, & 0 < x < L, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{g}_1(\xi), \\ \hat{u}(L,\xi) = \hat{g}_2(\xi). \end{cases}$$

Su solución es

$$\hat{u}(x,\xi) = \hat{g}_1(\xi)\frac{\operatorname{senh}((L-x)\xi)}{\operatorname{senh}(L\xi)} + \hat{g}_2(\xi)\frac{\operatorname{senh}(x\xi)}{\operatorname{senh}(L\xi)}.$$

La solución es entonces $u = (g_1 * F_1 + g_2 * F_2)$, donde F_1 y F_2 son las transformadas inversas de $\dfrac{\operatorname{senh}((L-x)\xi)}{\operatorname{senh}(L\xi)}$ y $\dfrac{\operatorname{senh}(x\xi)}{\operatorname{senh}(L\xi)}$ respectivamente.

Problema 6.3.5

i) Por el método de las imágenes, reflejando par respecto de $x = 0$ e impar respecto de $y = 0$, la función de Green del problema es

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi}\log\left[\frac{\Big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\Big)\Big((x+x_0)^2+(y+y_0)^2\Big)}{\Big((x-x_0)^2+(y+y_0)^2\Big)\Big((x+x_0)^2+(y-y_0)^2\Big)}\right]$$

Utilizando la fórmula de representación, la solución es

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} u(\vec{x_0})\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x_0})}{\partial\nu_0}\,d\vec{x_0} = -\int_0^{\infty}\frac{\partial G(x,y,0,y_0)}{\partial x_0}\,dy_0 \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\infty}\frac{x}{x^2+(y+y_0)^2}\,dy_0 - \int_0^{\infty}\frac{x}{x^2+(y-y_0)^2}\,dy_0\Big) \\ &= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) \end{aligned}$$

ii) En coordenadas polares es $u(r,\theta) = \dfrac{\theta}{\pi}$. Si escribimos el laplaciano en polares y observamos que ni el dominio ni los datos dependen del radio, la solución no dependerá tampoco del radio, por lo que la ecuación es $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$, es decir, u es lineal en θ.

Problema 6.3.6

i)

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \Big[\frac{(x-x_0-2nL)^2 + (y-y_0-2mH)^2}{(x+x_0-2nL)^2 + (y-y_0-2mH)^2} \times \frac{(x-x_0-2nL)^2 + (y+y_0-2mH)^2}{(x+x_0-2nL)^2 + (y+y_0-2mH)^2} \Big]$$

ii)

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log \Big[\frac{(x-x_0-4nL)^2 + (y-y_0)^2}{(x-x_0-(4n+2)L)^2 + (y-y_0)^2} \times \frac{(x+x_0-(4n+2)L)^2 + (y-y_0)^2}{(x+x_0-4nL)^2 + (y-y_0)^2} \Big]$$

iii)

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log \Big[\frac{(x-x_0-2nL)^2 + (y-y_0)^2}{(x-x_0-2nL)^2 + (y+y_0)^2} \times \frac{(x+x_0-2nL)^2 + (y+y_0)^2}{(x+x_0-2nL)^2 + (y-y_0)^2} \Big]$$

Problema 6.3.7

$$u(x,y,z) = q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[\Big(x^2 + y^2 + (z-4na)^2\Big)^{-1/2} - \Big(x^2 + y^2 + (z-(4n+2)a)^2\Big)^{-1/2} \Big]$$

Problema 6.3.8

$$u(x,y,z) = \frac{Vx}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^b \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[\Big(x^2 + (y-y_0-2nb)^2 + (z-z_0)^2\Big)^{-3/2} - \Big(x^2 + (y+y_0-2nb)^2 + (z-z_0)^2\Big)^{-3/2} \Big] \, dy_0 dz_0$$

6.4 Ecuación del calor

Problema 6.4.1 El problema que satisface u es

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} - \gamma u_x + \beta u & x \in I\!R,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & x \in I\!R, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Transformando por Fourier en x, tenemos el problema diferencial en t para $\hat{u}(\xi, t)$,

$$\begin{cases} \hat{u}_t = (k\xi^2 + i\gamma\xi + \beta)\hat{u}, & t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

Su solución es $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{(-k\xi^2+i\gamma\xi+\beta))t}$. Por tanto $u(x,t) = \mathrm{e}^{\beta t} f * h(x-\gamma t,t)$, donde $h(y,t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{kt}}\,\mathrm{e}^{-y^2/4t}$.

Problema 6.4.2

i) Separando variables $u(x,t) = X(x)T(t)$, se tienen los problemas

$$T' + \lambda T = 0, \qquad \begin{cases} X'' - 2X' + \lambda X = 0 & 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Las soluciones son

$$\lambda_n = 1 + n^2, \quad n \geq 1, \qquad X_n(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} nx, \qquad T_n(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_n t}.$$

Por tanto la solución del problema tendrá la forma $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^x \operatorname{sen} nx\, \mathrm{e}^{-\lambda_n t}$. El dato inicial implica $a_n = \dfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n))$. Finalmente

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \mathrm{e}^x \operatorname{sen}(2k+1)x\, \mathrm{e}^{-(1+(2k+1)^2)t}$$

ii) Por el problema 6.4.1, la solución será

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x_0^2} \mathrm{e}^{-(x-x_0-2t)^2/4t}\, dx_0 = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-2t)^2}{1+4t}}$$

Problema 6.4.3 Por el método de las imágenes, reflejando par respecto de $x = 0$,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_0^{\infty} f(x_0)\Big(\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4kt}} + \mathrm{e}^{-\frac{(x+x_0)^2}{4kt}}\Big)\, dx_0.$$

Problema 6.4.4

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \int_0^{\infty} Q(x_0,t_0) G(x,t,x_0,t_0)\, dx_0 dt_0 \\ &+k \int_0^t A(t_0) \frac{\partial G}{\partial x_0}(x,t,0,t_0)\, dt_0 \\ &+ \int_0^{\infty} f(x_0) G(x,t,x_0,0)\, dx_0, \end{aligned}$$

donde, reflejando impar respecto de $x = 0$,

$$G(x,t,x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi(t-t_0)}}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+x_0)^2}{4k(t-t_0}}\Big).$$

i)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{4kAx}{\sqrt{\pi}} \int_0^t ((4k(t-t_0))^{-3/2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4k(t-t_0)}})\, dt_0 \\ &= \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\, dz = 2A\Big(1 - F(\frac{x}{\sqrt{4kt}})\Big), \end{aligned}$$

donde $F(s) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{s} \mathrm{e}^{-z^2}\, dz$ es la función de error.

ii)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \Big(\int_{\frac{-x}{\sqrt{4k(t-t_0)}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\, dz - \int_{\frac{x}{\sqrt{4k(t-t_0)}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\, dz \Big)\, dt_0 \\ &= 2Q \Big(\int_0^t F(\frac{x}{\sqrt{4k(t-t_0)}})\, dt_0 - t \Big). \end{aligned}$$

iii)

$$u(x,t) = \frac{f}{\sqrt{\pi}} \Big(\int_{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\, dz - \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\, dz \Big) = f \Big(2F(\frac{x}{\sqrt{4kt}}) - 1 \Big).$$

Problema 6.4.5

i) Sustituyendo $u(x,t) = \varphi(\eta)$, donde $\eta = x/\sqrt{t}$, en el problema, se obtiene

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\eta\varphi' = k\varphi'', & \eta > 0, \\ \varphi(0) = 1, \\ \lim\limits_{\eta\to\infty} \varphi(\eta) = 0. \end{cases}$$

ii) La solución general de la ecuación es $\varphi(\eta) = c_1 + c_2 \displaystyle\int_0^{\eta} \mathrm{e}^{-s^2/4k}\, ds$. Los datos frontera implican $c_1 = 1$, $c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$. Así,

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \int_0^{\eta} \mathrm{e}^{-s^2/4k}\, ds = 2(1 - F(\frac{\eta}{2\sqrt{k}})),$$

donde F es como antes. La solución del problema propuesto para la ecuación del calor es

$$u(x,t) = 2(1 - F(\frac{x}{2\sqrt{kt}})).$$

El perfil φ coincide con la gráfica de u en tiempo $t = 1$, una función decreciente desde $\varphi(0) = 1$ hasta $\lim\limits_{\eta\to\infty} \varphi(\eta) = 0$. Para tiempos anteriores o posteriores la solución u será una versión cambiada de escala de φ. Se verifican los siguientes límites

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} u(x,t) = 2(1 - \lim_{z\to\infty} F(z)) = 0, && \forall\, x > 0, \\ &\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 2(1 - F(0)) = 1, && \forall\, x \geq 0, \\ &u(0,t) = 2(1 - F(0)) = 1, && \forall\, t > 0, \\ &\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 2(1 - \lim_{z\to\infty} F(z)) = 0, && \forall\, t > 0. \end{aligned}$$

Problema 6.4.6

i)

$$G(x,t,x_0,t_0) = \frac{1}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\, \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 k}{L^2}(t-t_0)} \cos(\frac{n\pi x}{L}) \cos(\frac{n\pi x_0}{L}).$$

ii)
$$G(x,t,x_0,t_0) \approx \frac{1}{L} + \frac{2}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 k}{L^2}(t-t_0)} \cos(\frac{\pi x}{L}) \cos(\frac{\pi x_0}{L}),$$
válida para $t \gg t_0$.

iii)
$$G(x,t,x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi(t-t_0)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0-2nL)^2}{4k(t-t_0)}} + \mathrm{e}^{-\frac{(x+x_0-2nL)^2}{4k(t-t_0)}}\Big).$$

iv)
$$G(x,t,x_0,t_0) \approx \frac{1}{\sqrt{4k\pi(t-t_0)}} \Big(\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}} + \mathrm{e}^{-\frac{(x+x_0)^2}{4k(t-t_0)}}\Big),$$
válida para $t \approx t_0$.

6.5 Ecuación de ondas

Problema 6.5.1

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\Big[(x+t)^2 + (x-t)^2\Big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 4x_0\,dx_0 \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+t_0}^{x+t-t_0} 6\,dx_0 dt_0 = (x+2t)^2. \end{aligned}$$

Problema 6.5.2

i) Se debe tener $(x-2c, x+2c)\bigcap(10,12) \neq \emptyset$, es decir, $A = (10-2c, 12+2c)$.

ii) Se debe tener $(-ct, ct)\bigcap(10,12) \neq \emptyset$, es decir, $B = (10/c, \infty)$.

Problema 6.5.3

i)
$$\begin{aligned} G(x,t,x_0,t_0) = \frac{1}{2c}\Big(&H(x-x_0+c(t-t_0)) - H(x-x_0-c(t-t_0)) \\ &-H(x+x_0+c(t-t_0)) + H(x+x_0-c(t-t_0))\Big). \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} u(x,t) &= c\int_0^t h(t_0)\Big(\delta(x-c(t-t_0)) - \delta(x+c(t-t_0))\Big)\,dt_0 \\ &= \begin{cases} h(t-x/c) & \text{si } t \geq x/c \\ 0 & \text{si } 0 \leq t < x/c. \end{cases} \end{aligned}$$

iii) El único valor que influye es $t = t_1 - x_1/c$, de manera que el lapso de tiempo $t_1 - t$ es el empleado en llevar la señal desde la frontera $x=0$ hasta el punto $x = x_1$ a una velocidad constante c. Para puntos (x,t) con $x > ct$, la información de la frontera no ha llegado todavía, y como los datos iniciales son nulos la solución en esos puntos es nula.

Escribiendo $u(x,t) = f_1(x+ct) + f_2(x-ct)$, se tiene inmediatamente $f_1(s) = -f_2(s) = k$ para todo $s > 0$. Ahora, la condición frontera implica $h(t) = u(0,t) = k + f_2(-ct)$ para $t > 0$, es decir, $f_2(s) = h(-s/c) - k$ para $s < 0$. Así,
$$u(x,t) = f_1(x+ct) + f_2(x-ct) = \begin{cases} h(t-x/c) & \text{si } 0 \leq x \leq ct \\ 0 & \text{si } x > ct, \end{cases}$$
la misma solución obtenida.

Problema 6.5.4 Transformando por Fourier en x, tenemos el problema diferencial en t para $\hat{u}(\xi, t)$,

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + \gamma \hat{u}_t + c^2\xi^2\hat{u} = 0 & t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) \\ \hat{u}_t(\xi, 0) = 0 \end{cases}$$

Su solución es $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-\gamma t/2}g(\xi, t)$, donde

$$g(\xi, t) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{2\sqrt{\gamma^2/4 - c^2\xi^2}} \operatorname{senh}(\sqrt{\gamma^2/4 - c^2\xi^2}\, t) + \cosh(\sqrt{\gamma^2/4 - c^2\xi^2}\, t) & |\xi| < \gamma/2c \\ \dfrac{\gamma}{2}t + 1 & |\xi| = \gamma/2c \\ \dfrac{\gamma}{2\sqrt{c^2\xi^2 - \gamma^2/4}} \operatorname{sen}(\sqrt{c^2\xi^2 - \gamma^2/4}\, t) + \cos(\sqrt{c^2\xi^2 - \gamma^2/4}\, t) & |\xi| > \gamma/2c \end{cases}$$

La solución será entonces $u(x, t) = \mathrm{e}^{-\gamma t/2} f * h(x, t)$, donde $\hat{h}(\xi, t) = g(\xi, t)$.

Problema 6.5.5 Basta sustituir $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ en la fórmula dada.

$$\begin{aligned} & F(x + ct) + G(x - ct) \\ + \quad & F(x + c\alpha - c\beta + c(t + \alpha + \beta)) + G(x + c\alpha - c\beta - c(t + \alpha + \beta)) \\ - \quad & F(x + c\alpha + c(t + \alpha)) - G(x + c\alpha - c(t + \alpha)) \\ - \quad & F(x - c\beta + c(t + \beta)) - G(x - c\beta - c(t + \beta)) = 0 \end{aligned}$$

Problema 6.5.6

$$\begin{aligned} u(1/2, 2) &= u(-1, 5/4) + u(1, 7/4) - u(-1/2, 1) \\ &= u(-1, 5/4) + u(1, 7/4) - u(-1, 3/4) - u(1, 1/4) + u(1/2, 0) = 4, \end{aligned}$$

después de sustituir los datos frontera e inicial.

$$u(0, 5/4) = u(-1, 3/4) + u(1, 3/4) - u(0, 1/4)$$

Los dos primeros valores los obtenemos de los datos frontera. Observamos también que $(0, 1/4)$ pertenece al dominio donde es válida la fórmula de d'Alambert, por lo que

$$u(0, 1/4) = \frac{1}{2}(1 + 1) + \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1/2} (1 - s^2)\, ds = \frac{59}{48}.$$

Finalmente $u(0, 5/4) = 1/12$.

Problema 6.5.7 Como

$$u(x, t) = u(-4, t - 1 - x/4) + u(4, t - 1 + x/4) - u(-x, t - 2) = u(-x, t - 2),$$

se tiene

$$u(x, 2k) = -u(-x, 2(k - 1)) = u((-1)^k x, 0) = 0$$

para todo $x \in [-4, 4]$ si $k \in I\!N$. Si se aplican las técnicas de separación de variables, se tiene que la solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos((2n + 1)\pi x/8) \operatorname{sen}((2n + 1)\pi t/2)$$

donde $a_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^4 (16 - s^2)\cos((2n + 1)\pi s/8)\, ds$. Se tiene $u(x, t) \equiv 0$ si $t = 2k$ para cualquier $k \in I\!N$.

Problema 6.5.8

i) Si $G_\infty(x,t,x_0,t_0)$ es la función de Green de la ecuación de ondas en toda la recta (es decir, $G(x,t,x_0,t_0) = \frac{1}{2}\chi_{\{|x-x_0|\le c(t-t_0)\}}$), entonces, reflejando par en los puntos $x_0 = (2k+1)L$, $k \in \mathbb{Z}$ e impar en los puntos $x_0 = 2kL$, $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$\begin{aligned} G(x,t,x_0,t_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [G_\infty(x,t,x_0+4kL) + G_\infty(x,t,-x_0+(4k+2)L)] \\ &- \sum_{k=-\infty}^{\infty} [G_\infty(x,t,-x_0+4kL) + G_\infty(x,t,x_0+(4k+2)L)] \end{aligned}$$

ii) Definiendo $z(x,t) = u(x,t) - t^3 - x$ se tiene que z satisface

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 6t & 0 < x < L,\ t > 0 \\ z(0,t) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(L,t) = 0 & t > 0 \\ z(x,0) = -x & 0 < x < L \\ \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < L \end{cases}$$

iii) Sean $\{(\lambda_n,\varphi_n)\}$ los autovalores y autofunciones del problema espacial homogéneo asociado. Escribiendo $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\varphi_n(x)$, se tiene

$$\begin{cases} A_n' + \lambda_n A_n = Q_n & t > 0,\ n \ge 1 \\ A_n(0) = f_n \\ A_n'(0) = 0 \end{cases}$$

donde Q_n son los coeficientes de la función $Q = 6t$ en la base $\{\varphi_n\}$, y f_n son los coeficientes de la función $f = x$.

Problema 6.5.9 Por el problema 6.5.3.*i*), la solución será

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}((x+ct) + (x-ct)) & x > ct \\ \frac{1}{2}((x+ct) - (ct-x)) + (t-x/c)^2 & 0 \le x \le ct \end{cases}$$

es decir, $u(x,t) = x + [(t-x/c)_+]^2$.

Problema 6.5.10

i) La función de Green está dada en el problema 6.5.3.*i*).

ii)

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \mathrm{e}^{-s}\, ds & x > ct \\ \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct} \mathrm{e}^{-s}\, ds + h(t-x/c) & 0 \le x \le ct \end{cases}$$

iii)

$$u(1,3) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c}(\mathrm{e}^{1-3c} - \mathrm{e}^{1+3c}) & c < 1/3 \\ \dfrac{1}{2c}(\mathrm{e}^{3c-1} - \mathrm{e}^{1+3c}) + h(3 - 1/c) & c \geq 1/3 \end{cases}$$

Problema 6.5.11

i) $A = \{\, t - 7/2 \in (2,5) \,\} = (11/2, 17/2)$; $B = \{\, 7 - x/2 \in (2,5) \,\} = (4, 10)$.

ii)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \begin{cases} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x-2t}^{x+2t} x_0^2\, dx_0 & \text{si } \ x > 2t \\ \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{2t-x}^{x+2t} x_0^2\, dx_0 + 1 - t + x/2 & \text{si } \ 0 \leq x \leq 2t \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 t + \dfrac{4}{3} t^3 & \text{si } \ x > 2t \\ 2t^2 x + \dfrac{1}{6} x^3 + 1 - t + x/2 & \text{si } \ 0 \leq x \leq 2t\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 6.5.12

$$u(\vec{x}, t) = \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2 (t - t_0)} \int_{|\vec{x} - \vec{x_0}| = c(t - t_0)} Q(\vec{x_0}, t_0)\, d\vec{x_0} dt_0$$

Entonces $u(\vec{x}, t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1$, y para $t > 1$ se obtiene $u(\vec{x}, t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{4\pi c^2 (t - t_0)} F(\vec{x}, t, t_0)\, dt_0$, donde $F(\vec{x}, t, t_0)$ representa el área de la porción de esfera de radio $c(t - t_0)$ centrada en $\vec{x}$ contenida en la bola unidad centrada en el origen.

Problema 6.5.13

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{x} - \vec{x_0}| = ct} g(\vec{x_0}) d\vec{x_0},$$

$$u(0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{x_0}| = ct} |\vec{x_0}|^2 d\vec{x_0} = \frac{1}{4\pi c^2 t}\, c^2 t^2\, 4\pi c^2 t^2 = c^2 t^3.$$

Obsérvese que en el origen la intensidad del sonido es creciente y no deja de oírse nunca. Esto se debe a que la función g no es de soporte compacto.

Problema 6.5.14

i) Análogamente al problema 6.5.12, la solución es $\dfrac{1}{4\pi c^2 t}$ veces el área de la porción de esfera de radio ct centrada en $\vec{x}$ contenida en la bola unidad centrada en el origen. Este área es no vacía si y sólo si $||\vec{x}| - ct| < 1$, es decir, para $|\vec{x}| = 2$ si $1/c < t < 3/c$.

ii) El área de revolución, es

$$A = 2\pi \int_a^b f(r) \sqrt{1 + (f'(r))^2}\, dr,$$

donde $f(r) = \sqrt{c^2 t^2 - (r - 2)^2}$, $R = |\vec{x}|$, $a = R - ct$, $b = (R^2 + 1 - c^2 t^2)/2R$

iii) Para $|\vec{x}| = 2$ y $1/c < t < 3/c$ se tiene

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} 2\pi \int_a^b ct\, dr = \frac{b-a}{2c} = \frac{1}{8c}(4ct - c^2t^2 - 3),$$

Vemos que es una parábola invertida, que se anula en $t = 1/c$ y $t = 3/c$, con máximo en $t = 2/c$, que es el momento de mayor intensidad del sonido.

iv) La solución general para un punto $|\vec{x}| = R$, es

$$u(\vec{x_0}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{R-1}{c} \quad (R > 1), \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1-R}{c} \quad (R < 1), \\ \dfrac{1}{4cR}(1 - c^2t^2 + 2ctR - R^2) & \text{si } \dfrac{|R-1|}{c} \leq t \leq \dfrac{R+1}{c}, \\ 0 & \text{si } t \geq \dfrac{R+1}{c}. \end{cases}$$

Obsérvese que si $0 \leq R \leq 1$, el sonido se percibe instantáneamente, desde $t = 0$; si $R > 1$ no empieza a oírse hasta $t = (R-1)/c$; en cualquier caso, siempre se deja de oír a partir de $t = (R+1)/c$.