Matriz de rigidez de una barra articulada en sus extremos

Consideremos la barra de la Figura 2, que posee una longitud *L* y un área de su sección transversal de valor *A*, y que ha sido fabricada con un material cuyo módulo de elasticidad es *E*. Tomemos unos ejes cartesianos que manera que el eje *x* sea paralelo al eje de la barra.

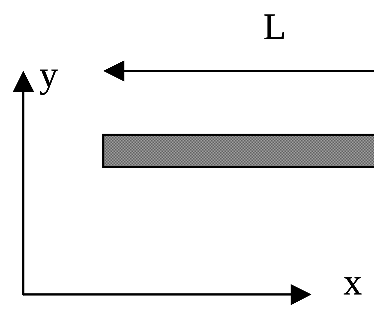

FIGURA 2

Supongamos que esta barra sólo trabaja a tracción, o compresión, según su eje, de manera que llamaremos **nudo** a cada extremo de la barra (nudo 1 al izquierdo y 2 al derecho, por ejemplo). Representemos por *F* y *u*, respectivamente, a la fuerza y el desplazamiento (ambas magnitudes en la dirección del eje *x*) que sufre cada nudo, suponiendo que toman valores positivos cuando tienen el sentido de dicho eje (ver Figura 3).

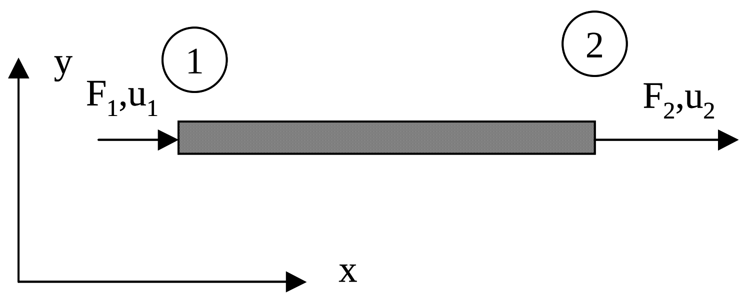

FIGURA 3

Lógicamente, los subíndices de *F* y *u* que aparecen en la Figura 3 corresponden al número del nudo sobre el que actúan.

Por otra parte, sabemos que la relación entre unas fuerzas de tracción, *N*, iguales y de signo contrario, aplicadas en los dos extremos de una barra de sección *A* y módulo de elasticidad *E*, y el desplazamiento relativo entre dichas secciones, δ, podemos obtenerla a través de la ley de Hooke:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{L} = \frac{N/A}{E} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{L}{EA} N \quad ó \quad N = \frac{EA}{L}\delta \qquad (2)$$

Si nos fijamos en la última ecuación, la fuerza aplicada, *N*, es igual a una constante multiplicada por el desplazamiento que produce, δ. Dicha constante recibe el nombre de **rigidez de la barra**, y se suele representar por la letra *k*, de manera que podemos escribir:

$$k = \frac{EA}{L} \quad y \quad N = k\delta \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta esto último, y volviendo a la Figura 3, podemos establecer estas dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_1 &= k(u_1 - u_2) = ku_1 - ku_2 \\ F_2 &= k(u_2 - u_1) = -ku_1 + ku_2 \end{aligned} \qquad (4)$$

que, escritas en forma matricial, conducen a que:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

o, en forma más compacta,

$$\{F\} = \left[K^e\right]\{u\} \qquad (6)$$

El vector que aparece a la izquierda de la igualdad se conoce como el **vector de fuerzas o de cargas nodales que actúa sobre el elemento** (o, simplemente, vector de fuerzas), y el vector que aparece a la derecha, como **vector de desplazamientos nodales** (o vector de desplazamientos). La matriz cuadrada, $\left[K^e\right]$, de 2x2, que es simétrica, recibe el nombre de **matriz de rigidez del elemento**.

Si ahora, en vez de una sola barra, considerásemos una estructura formada por dos barras colineales trabajando ambas a esfuerzo axil (sus respectivas rigideces de barra se identifican con los subíndices 1 y 2, respectivamente), tal como se representa en la parte superior de la Figura 4, podríamos establecer lo siguiente para cada una de ellas:

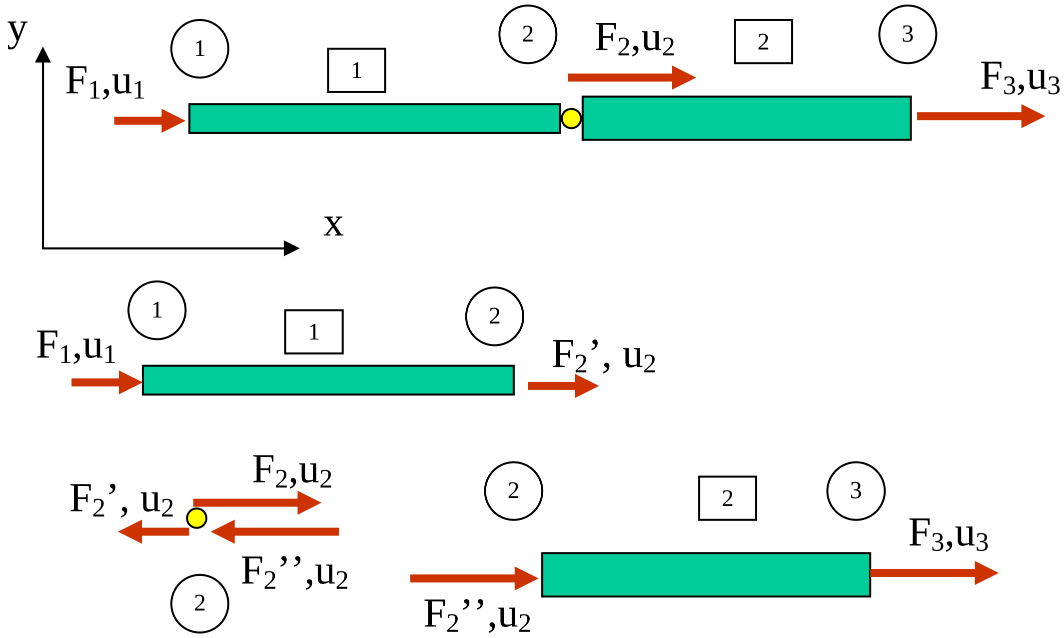

FIGURA 4

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} F_2'' \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

Nótese que, en la Figura 4, estamos representando por F_2 la fuerza total exterior que actúa en el nudo 2, y por u_2 el desplazamiento de dicho nudo. Lógicamente (ver parte inferior de la Figura 4), no toda la fuerza externa F_2 será absorbida por la barra 1, sino que está absorberá una parte, F_2', de la misma. Igual razonamiento nos llevaría a decir que la barra 2 absorbe F_2'', de la fuerza total aplicada en el nudo 2, F_2, debiéndose cumplir que:

$$F_2' + F_2'' = F_2 \qquad (8)$$

que en realidad corresponde a una **Condición de equilibrio en el nudo** 2.

Sin embargo, el desplazamiento horizontal del nudo 2 tanto como perteneciente a la barra 1 ó a la 2, debe ser exactamente el mismo **(Condición de compatibilidad de desplazamientos)**.

Las ecuaciones matriciales (7) podrían escribirse (de una manera expandida teniendo en cuenta que tenemos sólo tres nudos) como:

$$\begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2'' \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

En esta última ecuación hemos añadido una fila y una columna de ceros en la matriz de rigidez de cada barra para tener en cuenta la influencia (que sería ninguna) del nudo no incluido en cada una de las dos barras. De esta manera, el vector de deslazamientos nodales que aparece en el miembro de la derecha de ambas ecuaciones, sería el mismo.

Sumando las dos ecuaciones matriciales anteriores (lo que se denomina **proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez**), llegaríamos (teniendo en cuanta la ecuación (8)) a que:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2' + F_2'' \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

Esta última ecuación puede escribirse, de forma más compacta, como:

$$\{F\} = [K]\{u\} \qquad (11)$$

En la ecuación (11) tenemos, en el miembro de la izquierda, el **vector de fuerzas nodales que actúa sobre la estructura**, $\{F\}$, y en el miembro de la derecha la denominada **matriz de rigidez de la estructura**, $[K]$, que es simétrica, multiplicada por el **vector de desplazamientos nodales de la estructura**, $\{u\}$.

Conviene también hacer notar que, los términos de la matriz de rigidez estructural pueden obtenerse directamente (y, podríamos decir, que hasta "mecánicamente") sin necesidad de hacer todo el desarrollo que hemos realizado. Así, los términos de la diagonal principal se obtienen sumando las rigideces de todas las barras que confluyen en el nudo correspondiente. De esa manera, el término de la matriz de rigidez (1,1), por ejemplo, contiene la rigidez de la barra 1, el (2,2), la suma de las rigideces de las dos barras que confluyen en el nudo 2 y, el (3,3), el término de rigidez de la barra 2. Los términos fuera de la diagonal principal, por ejemplo el (1,2), contiene la rigidez de la barra 1 cambiada de signo y el término (1,3) es nulo puesto que los nudos 1 y 3 no se encuentran unidos directamente entre sí por ninguna barra.

Hasta ahora, hemos considerado que los ejes de las barras eran paralelos al eje *x*. Sin embargo, puede haber situaciones en las que tengamos un conjunto de barras articuladas (es decir, todas trabajando a tracción o compresión solamente) con varias direcciones, tal como el sistema de barras articuladas (estructura articulada) que se muestra en la Figura 5.

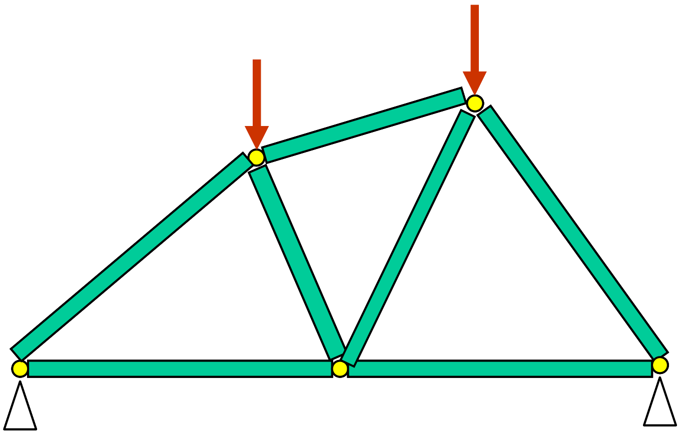

FIGURA 5

En este caso, es conveniente referir todas las magnitudes que interviene en el problema a un sistema de referencia cartesiano común para todas las barras, que denominaremos **sistema de referencia global** *X*-*Y*, y trabajar, para cada barra, sus **ejes locales** *x*-*y*, cuyo eje *x* sí tiene la dirección de la barra y el eje *y* es ortogonal a él y contenido en el plano de la estructura.

Supongamos la barra inclinada de la Figura 6.

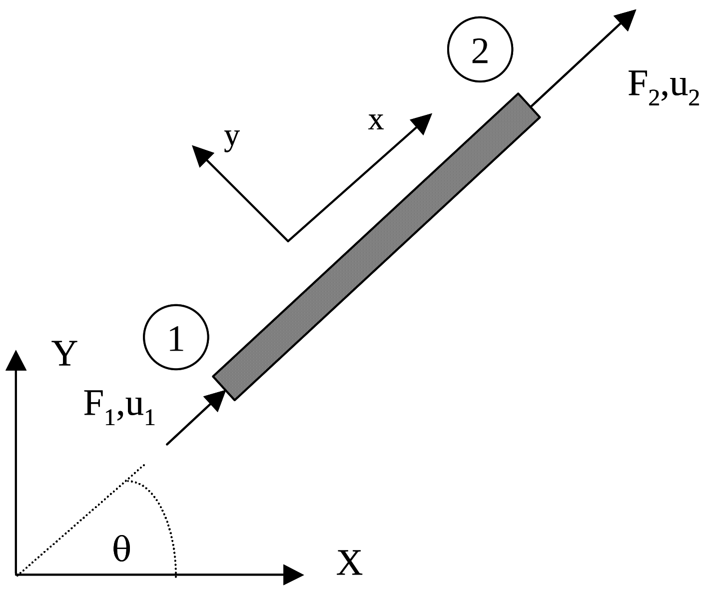

FIGURA 6

En dicha figura hemos dibujado los ejes locales *x*-*y* de la barra, los ejes globales *X*-*Y* de la estructura, y las fuerzas y desplazamientos que sufre cada nudo. La ecuación (5), que seguiría siendo aplicable, podemos escribirla también de esta otra manera (en ejes locales):

$$\begin{Bmatrix} (F_1)_x \\ (F_1)_y \\ (F_2)_x \\ (F_2)_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_1)_x \\ (u_1)_y \\ (u_2)_x \\ (u_2)_y \end{Bmatrix} \tag{12}$$

En esta última ecuación hemos incluido, por conveniencia, fuerzas en la barra actuando según el eje *y*, que no pueden producirse porque harían que la barra no estuviera en equilibrio. Esto último que da garantizado por las dos filas y dos columnas nulas que se ven en la citada ecuación. La inclusión de estas fuerzas responde al hecho de que, sin embargo, sí pueden existir, en los nudos de la barra, desplazamiento según el citado eje, y, como se verá mas tarde, nos va a resultar más cómodo el planteamiento que estamos haciendo.

Las fuerzas que actúan en cada nudo, expresadas en ejes locales, podríamos expresarlas en función de las referidas en ejes globales a través de las expresiones:

$$\begin{aligned} (F_1)_x &= (F_1)_X \boldsymbol{\cos}\theta + (F_1)_Y \operatorname{sen}\theta \\ (F_1)_y &= -(F_1)_X \operatorname{sen}\theta + (F_1)_Y \cos\theta \\ (F_2)_x &= (F_2)_X \boldsymbol{\cos}\theta + (F_2)_Y \operatorname{sen}\theta \\ (F_2)_y &= -(F_2)_X \operatorname{sen}\theta + (F_2)_Y \cos\theta \end{aligned} \tag{13}$$

donde el ángulo θ corresponde al que forma el eje *X* global con el eje *x* local considerándolo positivo en sentido antihorario.

Si denominamos:

$$\begin{aligned} c &= \cos\theta \\ s &= \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{14}$$

las ecuaciones (13) pueden escribirse, en forma matricial, como:

$$\begin{Bmatrix} (F_1)_x \\ (F_1)_y \\ (F_2)_x \\ (F_2)_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (F_1)_X \\ (F_1)_Y \\ (F_2)_X \\ (F_2)_Y \end{Bmatrix} \tag{15}$$

ó, también, en forma más compacta:

$$\{F\}_{ejes\ locales} = [T]^{-1}\ \{F\}_{ejes\ globales} = [T]^{T}\ \{F\}_{ejes\ globales} \qquad (16)$$

expresión en la que la matriz $[T]$ cuya expresión es:

$$[T] = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}$$

recibe el nombre de **matriz de transformación** que, como ya se conoce, es una matriz ortogonal

Razonando de idéntica manera a como hicimos para las fuerzas, para los desplazamientos podríamos haber llegado a que:

$$\begin{Bmatrix} (u_1)_x \\ (u_1)_y \\ (u_2)_x \\ (u_2)_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_1)_X \\ (u_1)_Y \\ (u_2)_X \\ (u_2)_Y \end{Bmatrix} \qquad (17)$$

ó, en forma más compacta:

$$\{u\}_{ejes\ locales} = [T]^{T}\ \{u\}_{ejes\ globales} \qquad (18)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (6), (16) y (18), llegamos a que:

$$\{F\}_{ejes\ locales} = [K^e]\{u\}_{ejes\ locales} = [K^e][T]^{T}\ \{u\}_{ejes\ globales} \qquad (19)$$

en la que, premultiplicando ambos miembros de la igualdad por la matriz $[T]$, obtendríamos:

$$[T]\{F\}_{ejes\ locales} = \{F\}_{ejes\ globales} = [T][K^e]\,[T]^{T}\ \{u\}_{ejes\ globales} \qquad (20)$$

Si denominamos:

$$[K^e]_{ejes\ globales} = [T][K^e]\,[T]^{T} \qquad (21)$$

a la **matriz de rigidez del elemento expresada en ejes globales**, se llega a que:

$$\{F\}_{ejes\ globales} = [K^e]_{ejes\ globales}\ \{u\}_{ejes\ globales} \qquad (22)$$

ecuación ésta en la que:

$$\left[K^e\right]_{ejes\ globales} = k \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

siendo:

$$k = \frac{EA}{L} \tag{24}$$

Veamos todo lo anterior con un ejemplo concreto. Sea la estructura articulada de la Figura 7:

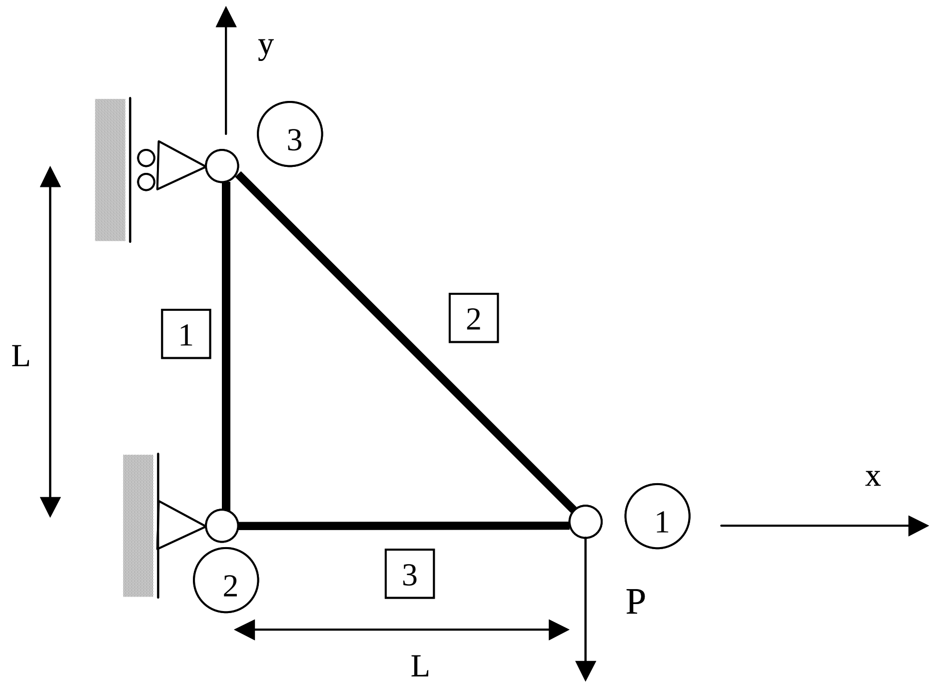

FIGURA 7

que se encuentra formada por tres barras articuladas entre sí (las barras sólo trabajan a esfuerzos según sus ejes (esfuerzo axil)). Supongamos que deseamos resolver la estructura (calcular los esfuerzos axiles de cada barra y los desplazamientos de todos los nudos) cuando, en el nudo 1 actúa una fuerza vertical, dirigida hacia abajo, de valor *P*.

Aunque sabemos que, sobre la estructura, sólo actúa la carga *P* y las reacciones que aparecen en los nudos 2 y 3 como consecuencia de las ligaduras a que se encuentra sometida la estructura en dichos nudos, haremos un planteamiento general del problema, empleando la notación siguiente: a las fuerzas exteriores actuando en los nudos las representaremos por *R*, y a los desplazamientos de los mismos por *u*. Así. La estructura de la Figura 7, en la que todas las magnitudes que aparecen se encuentran referidas al sistema de coordenadas globales de la estructura, quedaría como se recoge en la Figura 8:

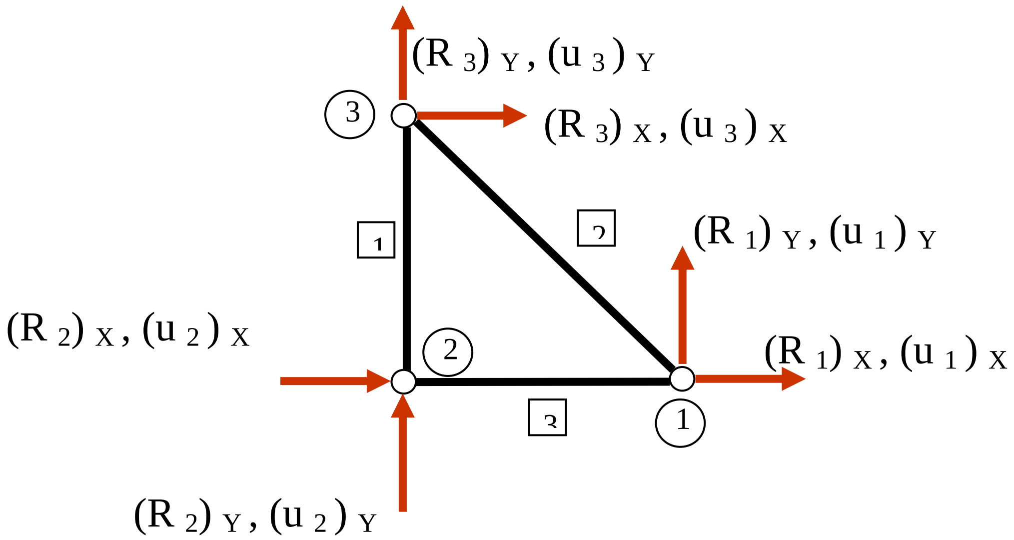

FIGURA 8

Si descomponemos la estructura en las barras que la forman, y consideramos los nudos independientemente, tendríamos (Figura 9):

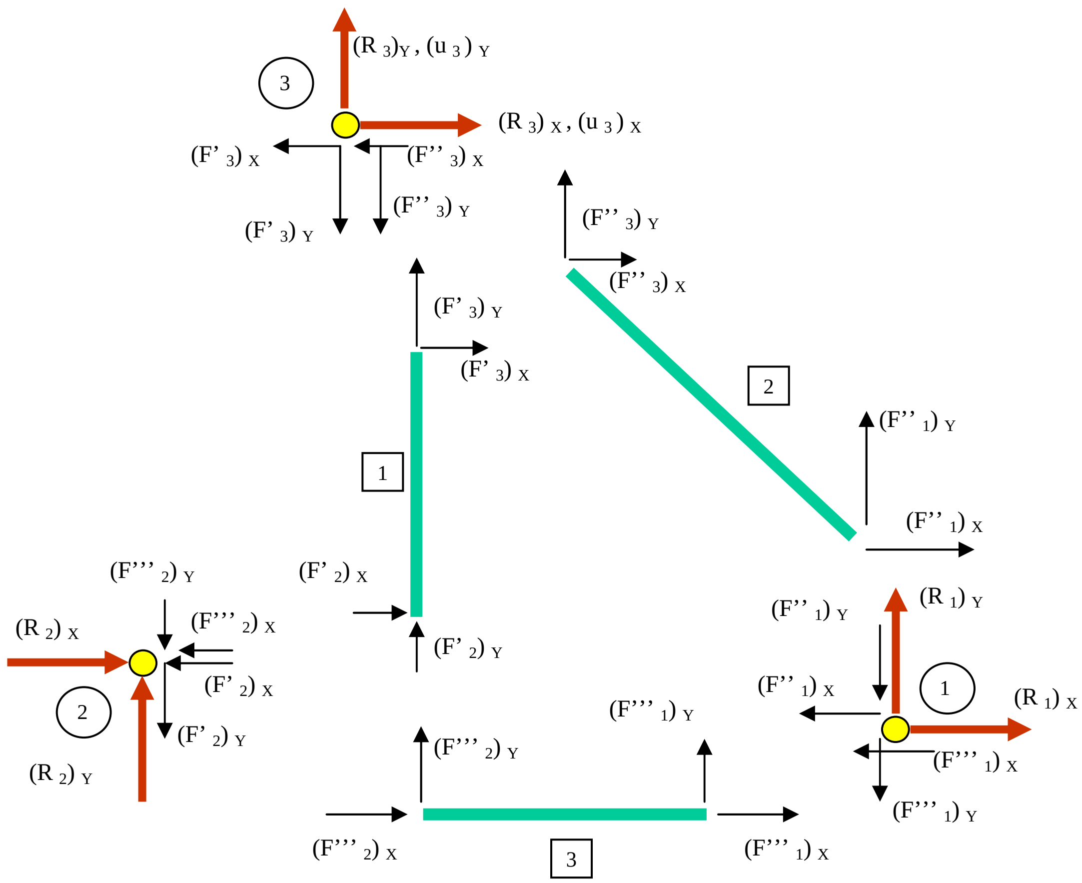

FIGURA 9

donde las fuerzas representadas por *F* corresponden a los esfuerzos sobre cada barra.

Para la barra 1, podríamos establecer (llamando $k = \dfrac{EA}{L}$) que:

$$\begin{Bmatrix} \left(F_2{}'\right)_X \\ \left(F_2{}'\right)_Y \\ \left(F_3{}'\right)_X \\ \left(F_3{}'\right)_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(u_2\right)_X \\ \left(u_2\right)_Y \\ \left(u_3\right)_X \\ \left(u_3\right)_Y \end{Bmatrix} \tag{25}$$

Para la barra 2 (teniendo en cuenta que la rigidez, en este caso, es ${k}/{\sqrt{2}}$, pues su longitud es $\sqrt{2}L$), tendríamos:

$$\begin{Bmatrix} \left(F_1{}''\right)_X \\ \left(F_1{}''\right)_Y \\ \left(F_3{}''\right)_X \\ \left(F_3{}''\right)_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {k}/{\sqrt{2}} & -{k}/{\sqrt{2}} & -{k}/{\sqrt{2}} & {k}/{\sqrt{2}} \\ -{k}/{\sqrt{2}} & {k}/{\sqrt{2}} & {k}/{\sqrt{2}} & -{k}/{\sqrt{2}} \\ -{k}/{\sqrt{2}} & {k}/{\sqrt{2}} & {k}/{\sqrt{2}} & -{k}/{\sqrt{2}} \\ {k}/{\sqrt{2}} & -{k}/{\sqrt{2}} & -{k}/{\sqrt{2}} & {k}/{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(u_1\right)_X \\ \left(u_1\right)_Y \\ \left(u_3\right)_X \\ \left(u_3\right)_Y \end{Bmatrix} \tag{26}$$

y, finalmente, para la barra 3:

$$\begin{Bmatrix} \left(F_2{}'''\right)_X \\ \left(F_2{}'''\right)_Y \\ \left(F_1{}'''\right)_X \\ \left(F_1{}'''\right)_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(u_2\right)_X \\ \left(u_2\right)_Y \\ \left(u_1\right)_X \\ \left(u_1\right)_Y \end{Bmatrix} \tag{27}$$

La ecuación (25), correspondiente a la barra 1, podríamos rescribirla de una forma expandida como:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(F_2'\right)_X \\ \left(F_2'\right)_Y \\ \left(F_3'\right)_X \\ \left(F_3'\right)_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_1)_X \\ (u_1)_Y \\ (u_2)_X \\ (u_2)_Y \\ (u_3)_X \\ (u_3)_Y \end{Bmatrix} \tag{28}$$

Procediendo de manera análoga para la barra 2, llegaríamos (partiendo de la ecuación (26)) a que:

$$\begin{Bmatrix} \left(F_1''\right)_X \\ \left(F_1''\right)_Y \\ 0 \\ 0 \\ \left(F_3''\right)_X \\ \left(F_3''\right)_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & 0 & 0 & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & 0 & 0 & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_1)_X \\ (u_1)_Y \\ (u_2)_X \\ (u_2)_Y \\ (u_3)_X \\ (u_3)_Y \end{Bmatrix} \tag{29}$$

y, finalmente, para la barra 3, podríamos cambiar la ecuación matricial fuerzas-desplazamientos (Ecuación 27), a esta forma (nos interesa que los nudos correspondientes a las fuerzas y desplazamientos aparezcan de forma consecutiva):

$$\begin{Bmatrix} \left(F_1'''\right)_X \\ \left(F_1'''\right)_Y \\ \left(F_2'''\right)_X \\ \left(F_2'''\right)_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_1)_X \\ (u_1)_Y \\ (u_2)_X \\ (u_2)_Y \end{Bmatrix} \tag{30}$$

y, por tanto:

$$\begin{Bmatrix} (F_1''')_X \\ (F_1''')_Y \\ (F_2''')_X \\ (F_2''')_Y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_1)_X \\ (u_1)_Y \\ (u_2)_X \\ (u_2)_Y \\ (u_3)_X \\ (u_3)_Y \end{Bmatrix} \qquad (31)$$

Sumando las expresiones matriciales expandidas de las tres barras (ecuaciones (28), (29) y (31)) llegamos a que:

$$\begin{Bmatrix} (F_1'')_X + (F_1''')_X \\ (F_1'')_Y + (F_1''')_Y \\ (F_2')_X + (F_2''')_X \\ (F_2')_Y + (F_2''')_Y \\ (F_3')_X + (F_3'')_X \\ (F_3')_Y + (F_3'')_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2} + k & -k/\sqrt{2} & -k & 0 & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -k \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & 0 & -k & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_1)_X \\ (u_1)_Y \\ (u_2)_X \\ (u_2)_Y \\ (u_3)_X \\ (u_3)_Y \end{Bmatrix} \qquad (32)$$

Pero, el equilibrio de los nudos, nos lleva a que:

$$\begin{Bmatrix} (F_1'')_X + (F_1''')_X \\ (F_1'')_Y + (F_1''')_Y \\ (F_2')_X + (F_2''')_X \\ (F_2')_Y + (F_2''')_Y \\ (F_3')_X + (F_3'')_X \\ (F_3')_Y + (F_3'')_Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (R_1)_X \\ (R_1)_Y \\ (R_2)_X \\ (R_2)_Y \\ (R_3)_X \\ (R_3)_Y \end{Bmatrix} \qquad (33)$$

por lo que:

$$\begin{Bmatrix} (R_1)_X \\ (R_1)_Y \\ (R_2)_X \\ (R_2)_Y \\ (R_3)_X \\ (R_3)_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2} + k & -k/\sqrt{2} & -k & 0 & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -k \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & 0 & -k & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_1)_X \\ (u_1)_Y \\ (u_2)_X \\ (u_2)_Y \\ (u_3)_X \\ (u_3)_Y \end{Bmatrix} \qquad (34)$$

que corresponde a un sistema de seis ecuaciones y que tiene la estructura de la ecuación (1). Pero, para el problema en cuestión, sabemos que:

a) *En relación a las fuerzas exteriores* (teniendo en cuenta las ligaduras a que se encuentra sometida la estructura):

$\left(R_1\right)_X = 0$, pues no hay fuerza exterior aplicada en el nudo 1 según el eje *X*.

$\left(R_1\right)_Y = -P$, que es la fuerza exterior aplicada a la estructura en ese nudo.

$\left(R_3\right)_Y = 0$, pues el nudo 3 no se encuentra coaccionado en la dirección *Y*.

Por tanto, del vector de fuerzas sólo tenemos 3 incógnitas: $\left(R_2\right)_X$, $\left(R_2\right)_Y$, $\left(R_3\right)_X$

b) *En relación a los desplazamientos*:

$\left(u_2\right)_X = \left(u_2\right)_Y = 0$, por encontrarse impedidos los desplazamientos del nudo 2

$\left(u_3\right)_X = 0$, por encontrarse impedido el desplazamiento del nudo 3 en la dirección *X*.

En resumen, los desplazamientos incógnitas del problema son, también, 3: $\left(u_1\right)_X$, $\left(u_1\right)_Y$, $\left(u_3\right)_Y$.

Por todo lo anterior, disponemos de un sistema (Ecuación (34)) de seis ecuaciones algebraicas con seis incógnitas (3 desplazamientos y 3 fuerzas exteriores (la aplicada y las reacciones)) que podríamos resolver, obteniendo todas las componentes de los vectores de fuerzas y desplazamientos que desconocíamos. Una vez conocidas todas las componentes de este último vector, y utilizando las ecuaciones (25), (26) y (27), podríamos determinar los esfuerzos en cada barra.