

8.- MÉTODOS GENERALES: ANÁLISIS MATRICIAL

8.1 FLEXIBILIDAD Y RIGIDEZ

8.1.1 Concepto de flexibilidad.-

a) La ley de Hooke aplicada a una barra de longitud L y sección A que, sometida a un esfuerzo axial de valor N , sufre un alargamiento ΔL , establece que:

$$\Delta L = NL/(EA)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\Delta L = L/(EA) N.$$

El coeficiente $L/(EA)$ de proporcionalidad entre el alargamiento de la barra ΔL y el esfuerzo axial N que lo produce se denomina “flexibilidad bajo esfuerzos axiales” de la barra. Este coeficiente representa físicamente el “valor del alargamiento que sufriría la barra sometida a un esfuerzo axial unidad”.

b) Aplicando el teorema de Mohr a una ménsula de longitud L con una sección cuyo momento de inercia es I , sometida a una fuerza P aplicada en el extremo libre, se obtiene la flecha f de este extremo como:

$$f = PL^3/(3EI)$$

o, lo que es lo mismo,

$$f = L^3/(3EI) P$$

El coeficiente $L^3/(3EI)$ de proporcionalidad entre la flecha f y la carga P que la produce se denomina “flexibilidad bajo carga aplicada en su extremo” de la ménsula. Este coeficiente puede obtenerse como el valor de la flecha que sufriría la barra sometida a una carga en su extremo de valor unidad.

c) Aplicando el teorema de Mohr a la ménsula anterior sometida, en este caso, a un momento M aplicado en el extremo libre, se obtiene el giro θ de este extremo como:

$$\theta = ML/(EI)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\theta = L/(EI) M$$

El coeficiente $L/(EI)$ de proporcionalidad entre el giro θ y el momento M que lo produce se denomina “flexibilidad bajo momento

aplicado en su extremo” de la barra ó ménsula. Este coeficiente representa el giro que sufriría la sección extrema de la ménsula cuando se encuentra sometida a un momento de valor unidad actuando en dicho extremo.

La flexibilidad es pues un valor que caracteriza el comportamiento deformacional de una **estructura** con un cierto **sistema de apoyos** sometida a una **carga** (fuerza o momento) aplicada en una **sección** y que permite conocer, por proporcionalidad, el movimiento (desplazamiento o giro de la sección de aplicación de la carga en la dirección de aplicación de esta. La unidad de medida de la flexibilidad es el m/N ó rad/Nm.

El coeficiente de proporcionalidad existente entre el valor de una carga (fuerza o momento) aplicada en una sección de una estructura sencilla (barra) y el movimiento (en dirección de la carga) de la sección en la que se aplica la carga, y que se deducen de las expresiones obtenidas por aplicación de los teoremas de Mohr, son ejemplos de valores de coeficientes de flexibilidad.

8.1.2 Matriz de flexibilidad.-

La geometría (deformada) de un sólido deformado puede caracterizarse por los movimientos (desplazamientos o giros) de un conjunto de puntos o secciones particulares. En una estructura plana el movimiento de un punto del sólido (ó sección, si se trata de barras) tiene tres componentes: dos traslaciones y un giro. Las componentes del movimiento de un conjunto representativo de puntos de un sólido (entre ellos, probablemente, los propios puntos de aplicación de las cargas \mathbf{P}_i) que caracterizan unívocamente el comportamiento deformacional del sólido sometido a las cargas \mathbf{P}_i , se denominan, a efectos de análisis estructural, **grados de libertad del sólido**.

Así, por ejemplo:

- La proporcionalidad entre la variación de longitud y la carga aplicada expresada en la ley de Hooke, $\Delta L = L/(EA) N$, implica la caracterización del comportamiento deformacional de la barra mediante el movimiento del punto extremo en la dirección de aplicación de la carga; este movimiento sería, pues, el grado de libertad elegido para el análisis del problema
- La proporcionalidad entre el movimiento perpendicular a la barra y la carga aplicada en el extremo de la ménsula expresada en $f = L^3/(3EI) P$, implica caracterizar el comportamiento deformacional de la ménsula mediante el desplazamiento del punto extremo en la dirección de aplicación de la carga; este movimiento sería el grado de libertad elegido para el análisis del problema; una alternativa podría ser utilizar como grado de libertad descriptivo del problema, el giro en el extremo de la ménsula.

Considérese un sólido como el que se muestra en la figura 8.1 sometido a la acción de diferentes cargas (acciones) externas \mathbf{P}_i actuando cada una de ellas en un punto \mathbf{i} .

Por efecto de aplicación de las cargas, un punto genérico \mathbf{i} se desplazaría hasta el punto \mathbf{i}' siendo el vector desplazamiento δ_i del cual la componente en la dirección de aplicación de la carga es Δ_i .

Definición.- Se denomina coeficiente de influencia o de flexibilidad f_{ij} al desplazamiento del punto de aplicación de la carga \mathbf{P}_i , en la dirección de dicha carga, cuando actúa una carga unidad en el punto \mathbf{j} en la dirección y sentido de \mathbf{P}_j .

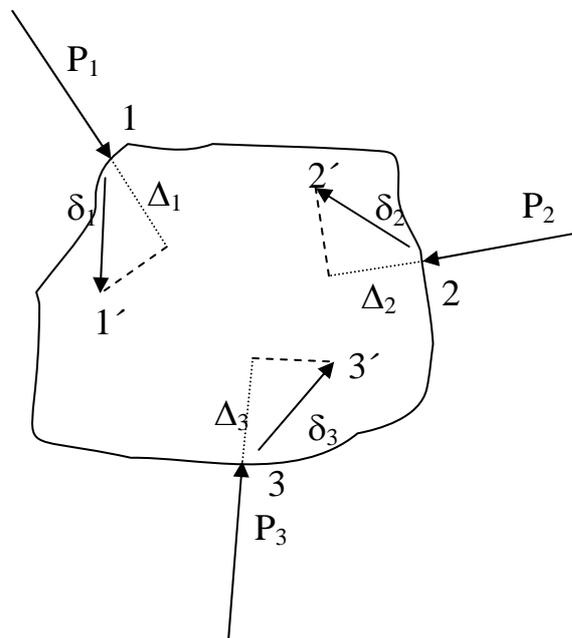


Figura 8.1

Cuando actúan varias cargas, el desplazamiento Δ_i del punto de aplicación de una de ellas, justo en la dirección de la carga \mathbf{P}_i , es suma de los desplazamientos producidos por cada una de las cargas actuantes.

$$\Delta_1 = f_{11}P_1 + f_{12}P_2 + f_{13}P_3$$

$$\Delta_2 = f_{21}P_1 + f_{22}P_2 + f_{23}P_3$$

$$\Delta_3 = f_{31}P_1 + f_{32}P_2 + f_{33}P_3$$

El sistema anterior puede ordenarse en forma matricial resultando

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

A la matriz constituida por los coeficientes f_{ij} se la denomina **matriz de flexibilidad del sólido**.

Propiedad.- Los coeficientes de flexibilidad f_{ij} y f_{ji} son iguales.

Aplicando el teorema de Reciprocidad de Maxwell-Betti a los dos estados de carga distintos que actúan sobre un mismo sólido, y que se muestran en la figura 8.2 (en el estado 1 sólo actúan la carga P_i y en el estado 2 solo la carga P_j), se obtiene:

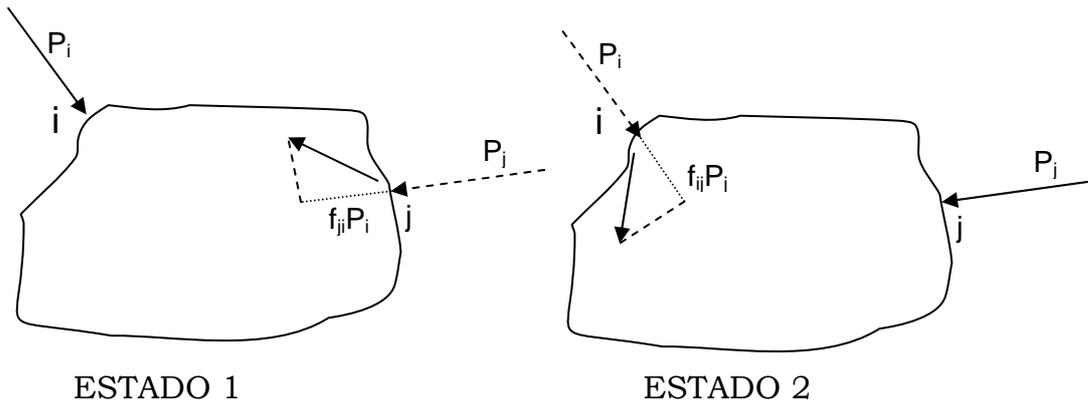


Figura 8.2

$$P_i \times f_{ij} P_j = P_j \times f_{ji} P_i$$

es decir: $f_{ij} = f_{ji}$.

EJEMPLO.- Obtener la matriz de flexibilidad de la estructura sometida al sistema de cargas que se muestra en la figura 8.3.

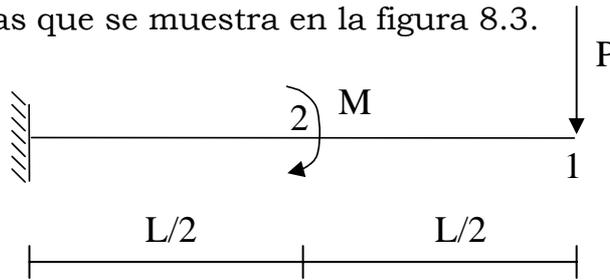


Figura 8.3

Aplicando los teoremas de Mohr, se obtiene:

$$\Delta_1 = v_1 = \frac{L^3}{3EI} P + \frac{3L^2}{8EI} M$$

$$\Delta_2 = \theta_2 = \frac{3L^2}{8EI} P + \frac{L}{2EI} M$$

y, expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L^3/(3EI) & 3L^2/(8EI) \\ 3L^2/(8EI) & L/(2EI) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de flexibilidad es:

$$\begin{bmatrix} L^3/(3EI) & 3L^2/(8EI) \\ 3L^2/(8EI) & L/(2EI) \end{bmatrix}$$

8.1.3 Concepto de rigidez.-

a) La expresión:

$$\Delta L = L/(EA) N$$

de la ley de Hooke puede ser escrita como

$$N = (EA/L) \Delta L$$

El coeficiente **EA/L** de proporcionalidad entre el esfuerzo axial aplicado y el alargamiento ΔL producido se denomina “rigidez bajo esfuerzos axiales” de la barra y su valor es el inverso del valor de la flexibilidad correspondiente. Este coeficiente puede obtenerse como el valor del esfuerzo axial necesario para producir un alargamiento unidad de la barra.

La expresión:

$$f = PL^3/(3EI)$$

que proporciona la flecha **f** en una ménsula de longitud **L** sometida a una fuerza **P** aplicada en el extremo libre, puede escribirse como:

$$P = (3EI/L^3) f.$$

El coeficiente **3EI/L³** de proporcionalidad entre la carga **P** y la flecha **f** se denomina “rigidez bajo fuerza vertical aplicada en su extremo” de la barra. Este coeficiente puede obtenerse como el valor de la fuerza necesaria para producir una flecha de valor unidad.

b) La expresión:

$$\theta = ML/(EI)$$

que proporciona el giro θ en el extremo de una ménsula de longitud **L** sometida a un momento **M** aplicado en ese extremo, puede escribirse como:

$$M = (EI/L) \theta$$

El coeficiente EI/L de proporcionalidad entre el momento M y el giro θ producido se denomina “rigidez bajo momento aplicado en su extremo” de la barra. Este coeficiente puede obtenerse como el valor del momento que daría lugar a un giro de valor unidad de la sección.

El coeficiente de rigidez es pues un valor que caracteriza el comportamiento resistente de una **estructura** con un cierto **sistema de apoyos** sometida a una **carga** (fuerza o momento) aplicada en una **sección** y que permite conocer por proporcionalidad el valor de la carga (fuerza o momento) que se requiere aplicar en un punto para obtener un cierto valor del movimiento de la sección de aplicación de la carga en la dirección y sentido de ésta. La unidad de medida de la rigidez es el N/m ó Nm/rad.

EJEMPLO 1.- Barra biempotrada con descenso de un extremo.

Sea el caso de una barra de longitud L biempotrada, uno de cuyos extremos (**B**) sufre una traslación de valor λ en dirección perpendicular a la directriz de la barra (figura 8.4).

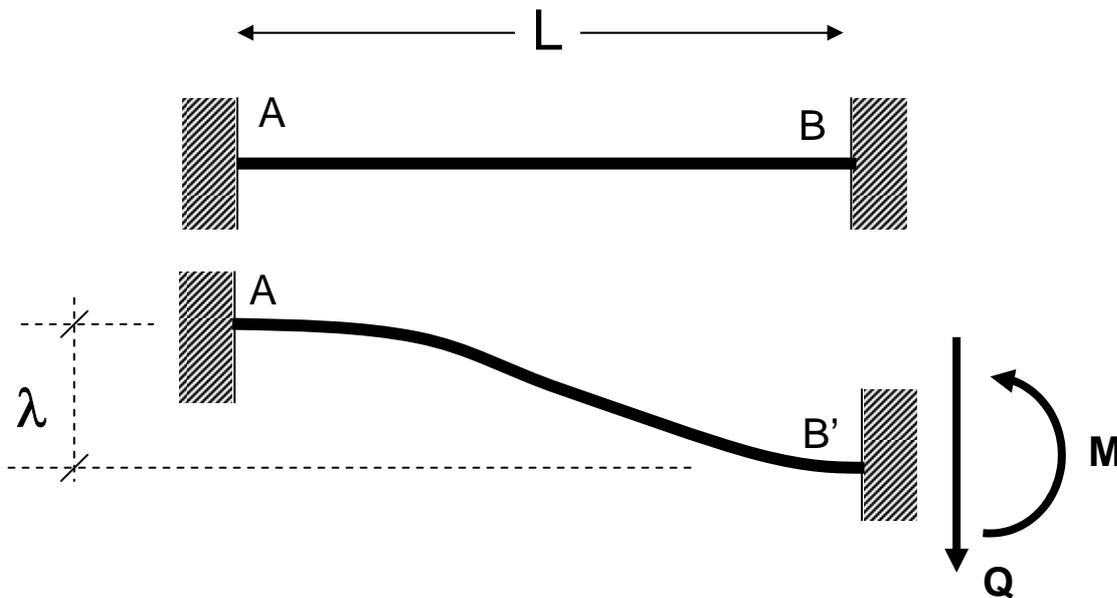


Figura 8.4

Las reacciones que se producen en el empotramiento en B' son un momento M y un cortante Q que, en conjunto, den lugar en el punto B a una flecha de valor λ y a un giro nulo.

$$\lambda = \frac{qL^3}{3EI} - \frac{ML^2}{2EI}$$

$$\theta_B = 0 = \frac{qL^2}{2EI} - \frac{ML}{EI}$$

de donde se obtiene: $Q = (12EI/L^3) \lambda$ y $M = (6EI/L^2) \lambda$

EJEMPLO 2.- Barra biempotrada con traslación de un apoyo en la dirección de la directriz.

Sea el caso de una barra de longitud L biempotrada, uno de cuyos extremos (**B**) sufre una traslación de valor λ en la dirección de la directriz de la barra (figura 8.5).



Figura 8.5

El efecto del empotramiento en **B'** equivale a la aplicación de un axil en **B** que de lugar en este punto a un alargamiento de valor λ .

$$\lambda = \frac{NL}{EA}$$

de donde se deduce que:

$$N = \frac{EA}{L} \lambda$$

EJEMPLO 3.- Barra biempotrada con un giro impuesto en uno de sus extremos.

Sea el caso de una barra de longitud L biempotrada, uno de cuyos extremos (**B**) sufre un giro de valor θ , tal como se indica en la figura 8.6.

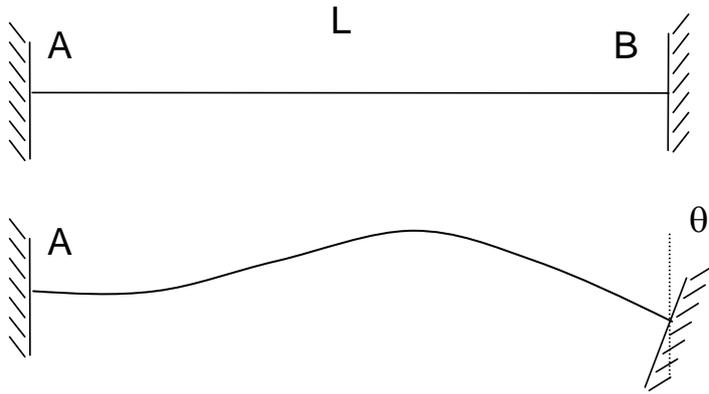


Figura 8.6

El efecto del empotramiento en **B** equivale a la aplicación de un momento en **B** (considerado este extremo como apoyado) que de lugar en este punto a un giro de valor θ (figura 8.7).

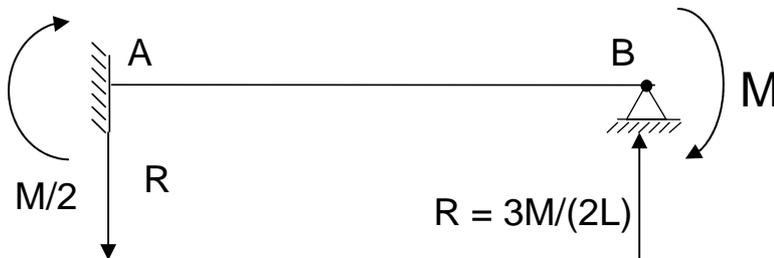


Figura 8.7

El giro en la sección B en la viga de dicha figura toma el siguiente valor:

$$\theta = \frac{ML}{4EI}$$

de donde se deduce que:

$$M = \frac{4EI}{L} \theta$$

apareciendo una reacción en el apoyo en B de valor

$$R = 3M/2L = (6EI/L^2) \theta$$

8.1.4 Rigidez de un sistema intraslacional de barras

Considérese la estructura cuya geometría y cargas se muestran en la figura 8.8 y que está constituida por tres barras coplanarias que se unen en la sección **A**.

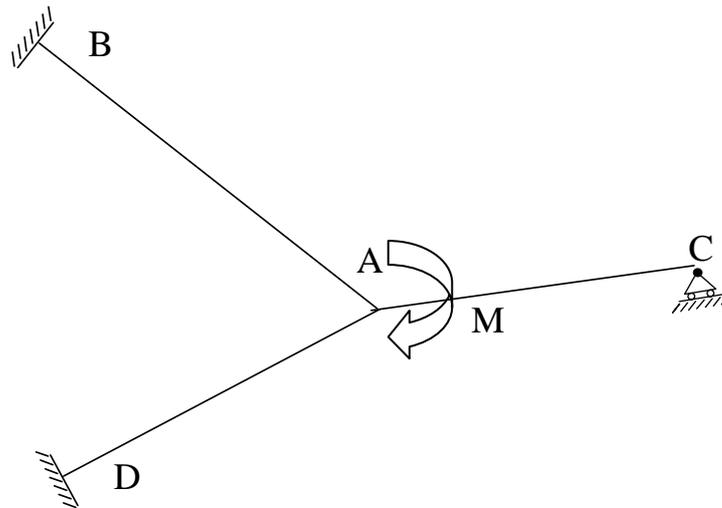


Figura 8.8

Bajo la acción de un momento actuando en el nudo **A**, es el giro de este nudo en el plano de la estructura el grado de libertad elegido para caracterizar la deformación del sistema.

La estructura es, si se desprecian los alargamientos o acortamientos de las barras generados por los esfuerzos axiales, intraslacional por lo que puede descomponerse en barras, tal como se muestra en la figura 8.9. El momento que actúa sobre el nudo se reparte en tres momentos \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 y \mathbf{M}_3 (momentos “repartidos”) que actúan sobre cada una de las barras en los extremos que coinciden con el nudo.

Obsérvese que los momentos que actúan sobre los extremos de las tres barras tienen el mismo signo que el momento \mathbf{M} que actúa sobre el nudo.

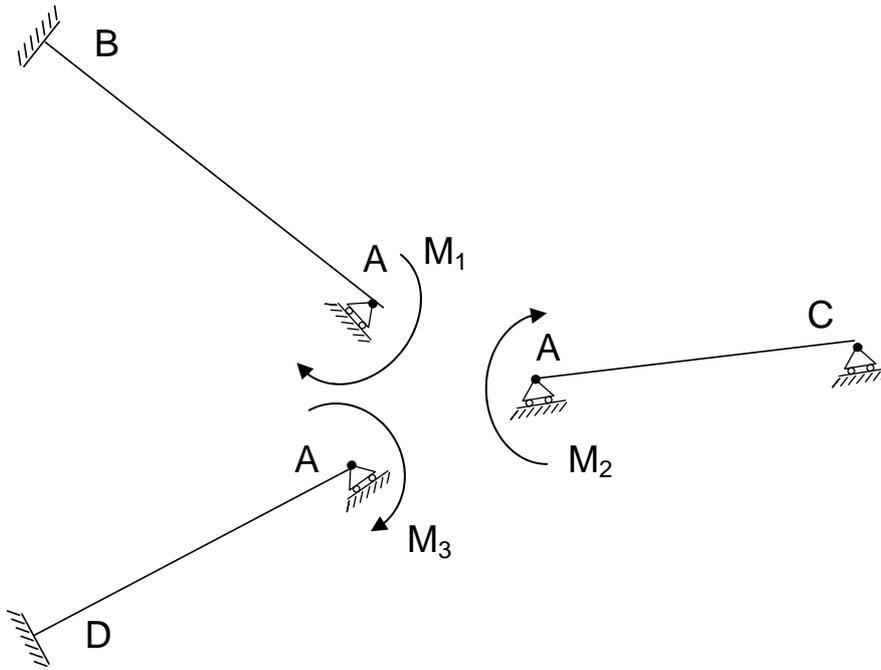


Figura 8.9

Por equilibrio del nudo A, se tiene que:

$$M_1 + M_2 + M_3 = M$$

En la barra **AB** (empotrada en **B** y apoyada en **A**), el momento **M₁** da lugar a un giro en el nudo A de valor

$$\theta_{AB} = M_1 L_{AB} / (4EI)$$

siendo, por tanto, la rigidez de esta barra en **A**:

$$k_{AB} = 4EI / L_{AB}$$

En la barra **AC** (biapoyada), el momento **M₂** da lugar a un giro en el nudo **A** de valor

$$\theta_{AC} = M_2 L_{AC} / (3EI)$$

siendo, por tanto, la rigidez de esta barra en **A**:

$$k_{AC} = 3EI / L_{AC}$$

En la barra **AD** (empotrada en **B** y apoyada en **A**), el momento **M₃** da lugar a un giro en el nudo **A** de valor

$$\theta_{AD} = M_3 L_{AD} / (4EI)$$

siendo, por tanto, la rigidez de esta barra en **A**:

$$k_{AD} = 4EI / L_{AD}$$

La continuidad de la deformada (nudo rígido) obliga a que los giros de las tres barras en A sean iguales

$$\theta_A(AB) = \theta_A(AD) = \theta_A(AC) = \theta_A$$

es decir:

$$M_1/k_{AB} = M_2/k_{AC} = M_3/k_{AD} = \sum M_i / \sum k_i = M / \sum k_i = M/k$$

El valor **k** (suma de las rigideces de las barras que confluyen en el nudo **A**) es, por tanto, la rigidez de la estructura en el nudo **A** pues es el coeficiente de proporcionalidad entre el momento **M** aplicado en el nudo **A** y el giro de este nudo

De la expresión anterior se deduce que

$$M_i = M k_i / \sum k_i = M R_i$$

Lo que lleva a definir al coeficiente **R_i = k_i / ∑k_i** como **coeficiente de reparto** pues permite obtener el momento **M_i** (momento repartido) a partir del momento **M** aplicado en el nudo.

Al aplicar un momento **M₁** en el extremo **A** de la barra **AB** (empotrada en **B**, apoyada en **A**), en el otro extremo **B** aparece un momento (momento de empotramiento) de valor **M₁/2**. Al coeficiente 1/2 que permite obtener este momento a partir del momento que actúa en el extremo **A** se le llama coeficiente de transmisión **C_{AB}** desde **B** hasta **A**.

Así, en el caso de la barra **AD** el coeficiente de transmisión **C_{AD}** es, también, 1/2. Al aplicar un momento **M₂** en el extremo **A** de la barra **AC** (biapoyada), en el otro extremo **B** no aparece ningún momento. En este caso el coeficiente de transmisión **C_{AC}** es, por tanto, igual a cero.

Tipo de barra	Rigidez	Coef. de transmisión
Apoyada/empotrada	4EI/L	1/2
Apoyada/apoyada	3EI/L	0

EJEMPLO 1.- En la estructura de tres barras de la figura 8.9, todas las barras tienen la misma inercia y están hechas del mismo material siendo $L_{AC} = 3$ m, $L_{AD} = 4$ m y $L_{AB} = 5$ m. Si en el nudo A actúa un momento exterior **M**, se pide calcular los momentos en los extremos de barra y el giro del nudo A.

Las rigideces de las barras son:

$$k_{AB} = 4EI / 5, k_{AD} = 4EI / 4 \text{ y } k_{AC} = 3EI / 3$$

y los coeficientes de reparto:

$$R_{AB} = \frac{\frac{4EI}{5}}{\frac{4EI}{5} + \frac{4EI}{4} + \frac{3EI}{3}} = \frac{4}{14}$$

$$R_{AD} = \frac{\frac{4EI}{4}}{\frac{4EI}{5} + \frac{4EI}{4} + \frac{3EI}{3}} = \frac{5}{14}$$

$$R_{AC} = \frac{\frac{3EI}{3}}{\frac{4EI}{5} + \frac{4EI}{4} + \frac{3EI}{3}} = \frac{5}{14}$$

con lo cual los momentos absorbidos son:

$$M_{AB} = M R_{AB} = 4M/14$$

$$M_{AD} = M R_{AD} = 5M/14$$

$$M_{AC} = M R_{AC} = 5M/14$$

Los momentos que aparecen en el extremo opuesto a A de cada barra son

$$M_B = M C_{AB} = 0.5 M_{AB}$$

$$M_D = M C_{AD} = 0.5 M_{AD}$$

$$M_C = M C_{AC} = 0.0 M_{AC} = 0$$

EJEMPLO 2.- En la estructura de la figura 8.10, las barras tienen el mismo momento de inercia y están realizadas del mismo material. Si en el nudo A actúa un momento exterior M, se pide calcular los momentos en los extremos de barra y el giro del nudo A.

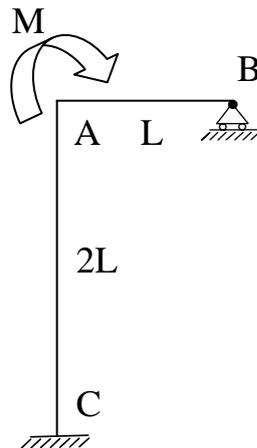


Figura 8.10

Las rigideces de las barras son:

$$k_{AB} = 3EI/L \text{ y } k_{AC} = 4EI/2L$$

y los coeficientes de reparto:

$$R_{AB} = \frac{\frac{3EI}{L}}{\frac{3EI}{L} + \frac{4EI}{2L}} = \frac{3}{5}$$

$$R_{AD} = \frac{\frac{4EI}{2L}}{\frac{3EI}{L} + \frac{4EI}{2L}} = \frac{2}{5}$$

con lo cual los momentos absorbidos por las barras son:

$$M_{AB} = M R_{AB} = 3M/5$$

$$M_{AC} = M R_{AC} = 2M/5$$

Los momentos que aparecen en el extremo opuesto a A de cada barra son

$$M_B = M C_{AB} = 0.0 \quad M_{AB}=0$$

$$M_C = M C_{AC} = 0.5 \quad M_{AD}$$

8.1.5 Matriz de rigidez

Si la matriz de flexibilidad relaciona cargas actuantes con desplazamientos en los nodos en los que las cargas actúan,

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

la matriz de rigidez, que es la inversa de la matriz de flexibilidad, relaciona desplazamientos con cargas actuantes.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

¿Qué representan los términos de la matriz de rigidez.-

Considérese el caso de un sólido sometido a un sistema de fuerzas como se indica en la figura 8.11.

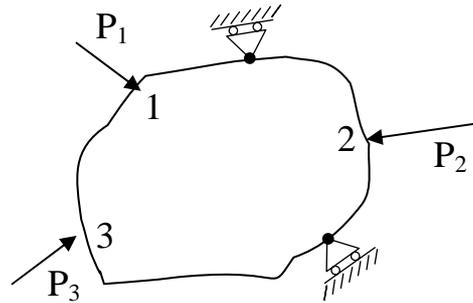


Figura 8.11

¿Qué valor, por ejemplo, debería tomar \mathbf{P}_1 para que $\Delta_1=1$, $\Delta_2=\Delta_3=0$ (situación representada en la figura 8.12)?

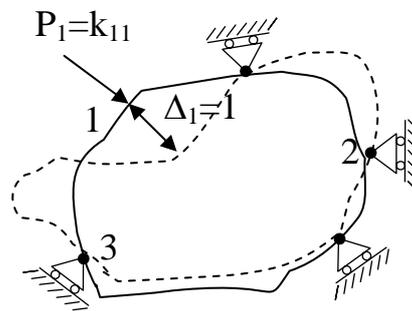


Figura 8.12

Sea la primera fila del sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes es la matriz de rigidez.

$$P_1 = k_{11} \Delta_1 + k_{12} \Delta_2 + k_{13} \Delta_3$$

Si en esta ecuación se imponen las condiciones de movimientos planteadas, se obtiene

$$P_1 = k_{11} \cdot 1 + k_{12} \cdot 0 + k_{13} \cdot 0 = k_{11}$$

Es decir, k_{ii} representa la carga a aplicar en el punto i -ésimo para conseguir un desplazamiento unidad en este punto en la dirección de la carga aplicada en dicho punto permaneciendo el resto de los puntos sin movimiento.

Algunas precisiones.-

- La carga a aplicar se entiende que tiene la misma dirección que \mathbf{P}_i .
- El desplazamiento unidad debe entenderse que es la componente sobre la dirección de \mathbf{P}_i .
- Que el resto de los puntos permanece sin movimiento se refiere a la ausencia de desplazamientos en las direcciones de las cargas aplicadas \mathbf{P}_j ($j \neq i$)

- Si hubiera momentos los movimientos referidos son giros.

¿Qué representan los términos k_{ij} ($j \neq i$)?

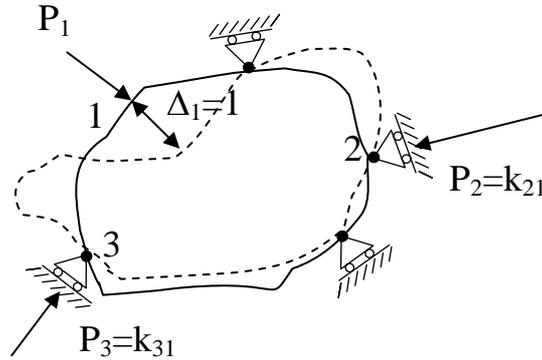


Figura 8.13

Sea la segunda fila del sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes es la matriz de rigidez.

$$P_2 = k_{21} \Delta_1 + k_{22} \Delta_2 + k_{23} \Delta_3$$

Si en esta ecuación se imponen las condiciones de movimientos planteadas ($\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$), se obtiene

$$P_2 = k_{21} \cdot 1 + k_{22} \cdot 0 + k_{23} \cdot 0 = k_{21}$$

Es decir, k_{ji} representa la reacción en el punto j -ésimo, en la dirección de la carga P_j cuando todos los puntos, excepto el i -ésimo, en los que existen cargas, no se mueven y, precisamente el i -ésimo, sufre un desplazamiento unidad en la dirección de P_i . (Nótese que, por ejemplo, al punto 2 se le impide el movimiento según la dirección de P_2 pero se podría desplazar en dirección ortogonal).

EJEMPLO.- Obtener la matriz de rigidez de la estructura y sistema de cargas que se muestran en la figura 8.14.

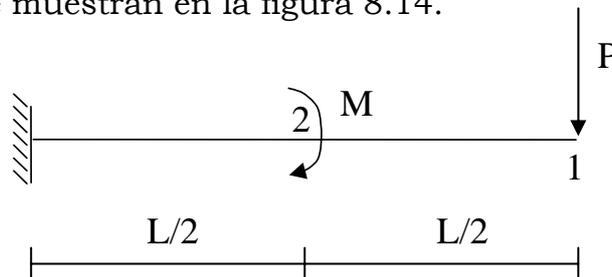


Figura 8.14

La matriz de flexibilidad es

$$\begin{bmatrix} L^3/(3EI) & 3L^2/(8EI) \\ 3L^2/(8EI) & L/(2EI) \end{bmatrix} = L^2/(EI) \begin{bmatrix} L/3 & 3/8 \\ 3/8 & 1/(2L) \end{bmatrix}$$

y, por tanto, la matriz de rigidez es:

$$K = F^{-1} = \frac{192EI}{(5L^2)} \begin{bmatrix} 1/(2L) & -3/8 \\ -3/8 & L/3 \end{bmatrix}$$

¿Qué representa, por ejemplo, el término k_{11} ?

k_{11} representa la fuerza vertical a aplicar en el punto 1 para conseguir un desplazamiento vertical unidad en este punto siendo nulo el giro del punto 2.

Obviamente, con una fuerza aplicada en 1 no se va a conseguir simultáneamente un desplazamiento unidad en 1 y un giro nulo en 2; es necesaria la actuación, también, de un momento M en 2 para obtener estos movimientos; este momento M es k_{12} . La situación deformacional buscada se representa en la figura 8.15.

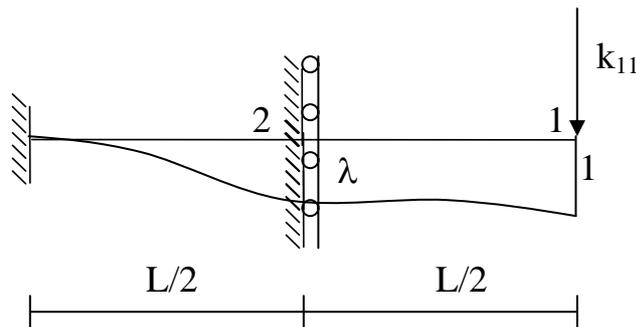


Figura 8.15

Aplicando las expresiones obtenidas en el apartado 8.1.3 se pueden obtener los valores de k_{11} y k_{12} .

Valor de k_{11} .-

- Flecha en 1 debida al descenso de 2 sin giro

$$k_{11} = \frac{12EI}{\left(\frac{L}{2}\right)^3} \lambda = \frac{96EI}{L^3} \lambda$$

con lo cual

$$\lambda = \frac{L^3}{96EI} k_{11}$$

- Flecha en 1 de la ménsula 2-1

$$\frac{k_{11} \left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} = \frac{k_{11} L^3}{24EI}$$

- Flecha total

$$1 = \frac{L^3}{96EI} k_{11} + \frac{L^3}{24EI} k_{11} = \frac{10L^3}{192EI} k_{11}$$

y, por tanto,

$$k_{11} = \frac{192EI}{10L^3}$$

Valor de k_{12} .-

En la figura 8.16 se muestran los esfuerzos en el punto 2 en las secciones extremas de los tramos comprendidos entre los puntos 1 y 2 y entre el 2 y el empotramiento.

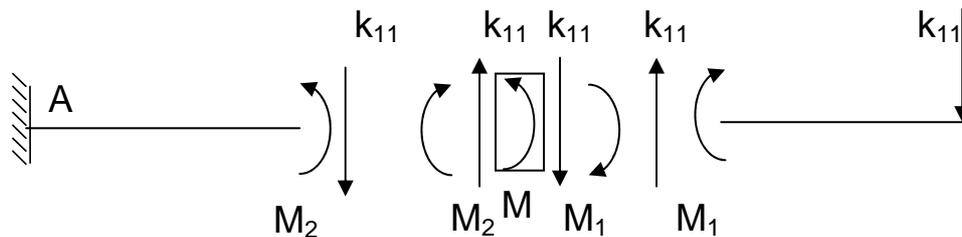


Figura 8.16

En la rebanada 2 actúa el momento M (externo), con lo que, por equilibrio de la rebanada,

$$M = M_1 + M_2$$

Pero:

$$M_1 = k_{11} \frac{L}{2} = \frac{192 EI}{20 L^2} = \frac{48 EI}{5 L^2}$$

$$M_2 = \frac{6EI}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \lambda = \frac{6EI}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \frac{L^3}{96EI} \frac{192 EI}{10 L^3} = \frac{24 EI}{5 L^2}$$

con lo cual

$$M = M_1 + M_2 = 72/5 EI/L^2$$

Valor de k_{22} .-

El valor de k_{22} es el del momento que da lugar a un giro de valor unidad en el punto 2 en la barra que se muestra en la figura 8.17; k_{21} es la reacción en el apoyo y por ello puede obtenerse conjuntamente con k_{22} .

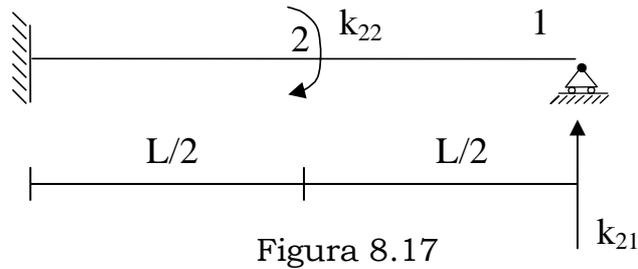


Figura 8.17

Utilizando los teoremas de Mohr se obtiene:

$$\theta_2 = 1 = \frac{5k_{22}L}{64EI} \rightarrow k_{22} = \frac{64}{5} \frac{EI}{L}$$

$$k_{21} = \frac{69}{8} \frac{k_{22}}{L} = \frac{72}{5} \frac{EI}{L^2}$$

8.2 INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS ITERATIVOS

Supóngase, como ejemplo, la estructura cuya geometría y cargas se muestran en la figura 8.18

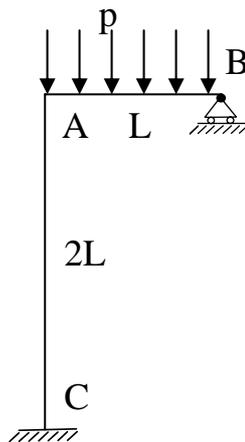


Figura 8.18

Un procedimiento alternativo para su análisis (método de Cross) se comenta a continuación detallando todos sus pasos.

a) Se retiran las cargas y se impide el giro de los nodos mediante algún sistema de “clavijas”, figura 8.19.

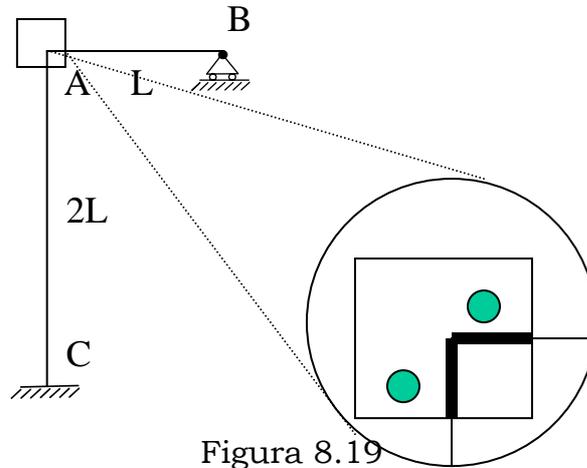


Figura 8.19

b) Se colocan de nuevo las cargas

Al haberse impedido el giro del nudo A, las dos barras CA y BA actúan independientemente transmitiendo al sistema de sujeción del nudo, como cargas exteriores, los momentos de empotramiento en el nudo A, producidos por las cargas, cambiados de signo. En el caso del ejemplo, $M'_0 = 0$ y $M_0 = pl^2/12$ y, por lo tanto, el momento que soporta la clavija es

$$M = M_0 - M'_0 = 0 - pl^2/12$$

La acción de la “clavija” (impedir el giro) es pues equivalente a la actuación en A de un momento M igual y opuesto a la suma de los momentos de empotramiento de las barras (figura 8.20).

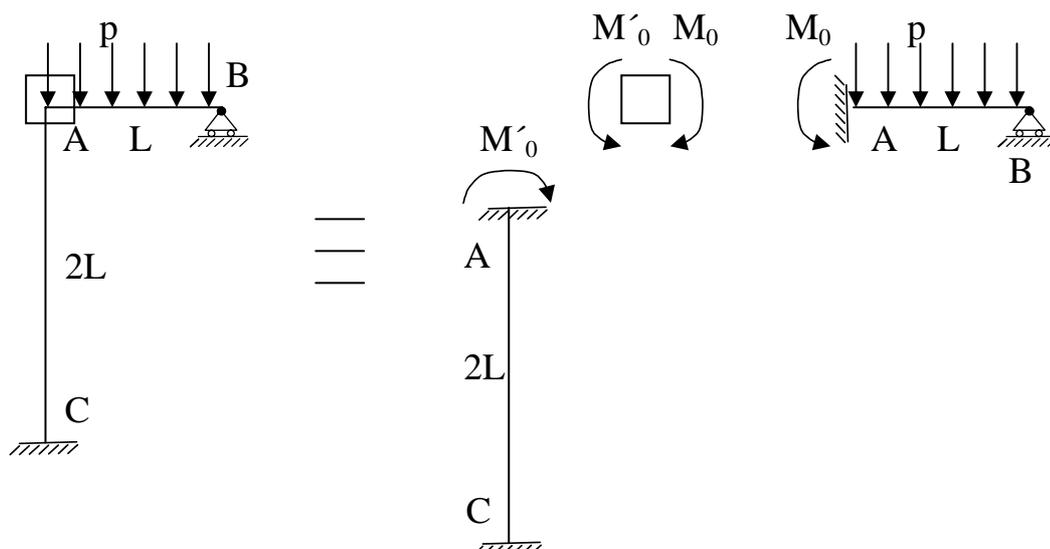


Figura 8.20

Las cargas sobre las barras unidas al momento en el nudo que impide el giro de este constituyen un estado E_1 .

c) Se liberan las “clavijas” permitiendo que el nudo gire libremente.-

Esta acción equivale a aplicar sobre los nodos un momento igual y de signo contrario al momento que la clavija ejerce sobre el nudo (suma de los momentos de empotramiento). Este momento actuando sobre el nudo constituye un estado E_2 (figura 8.21) La suma de los estados E_1 y E_2 es, evidentemente, igual al estado de cargas inicial.

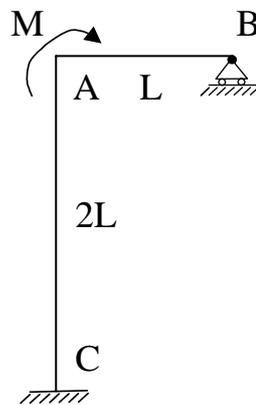


Figura 8.21

d) En el estado E_2 se reparte a las barras el momento exterior en función de las rigideces de aquellas (figura 8.22).

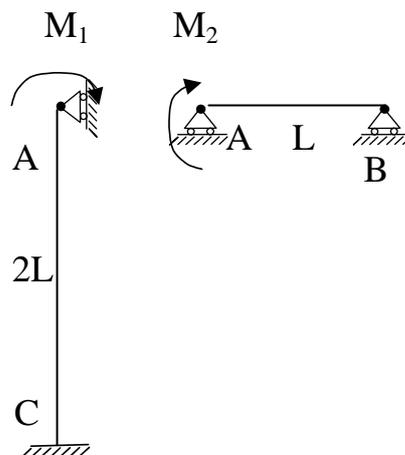


Figura 8.22

Las rigideces de las barras son:

$$k_{AB} = 3EI/L \text{ y } k_{AC} = 4EI/(2L)$$

y los coeficientes de reparto:

$$R_{AB} = \frac{\frac{3EI}{L}}{\frac{3EI}{L} + \frac{4EI}{2L}} = \frac{3}{5}$$
$$R_{AC} = \frac{\frac{4EI}{2L}}{\frac{3EI}{L} + \frac{4EI}{2L}} = \frac{2}{5}$$

con lo cual los momentos absorbidos son:

$$M_{AB} = M R_{AB} = pL^2/12 \cdot 3/5 = pL^2/20$$

$$M_{AC} = M R_{AC} = pL^2/12 \cdot 2/5 = pL^2/30$$

Los momentos que aparecen en el extremo opuesto a A de cada barra son

$$M_B = M_{AB} C_{AB} = 0. \quad M_{AB} = 0$$

$$M_C = M_{AC} C_{AC} = 0.5 M_{AC} = pL^2/60$$

e) Se calculan los momentos finales en los extremos de barra en el nudo A como suma de los obtenidos en los estados E₁ y E₂.

Barra AB.-

- El momento en A del estado 1 es $pL^2/12$ y el momento del estado 2 es $-pL^2/20$ con lo cual el momento total es:

$$pL^2/12 - pL^2/20 = pL^2/30$$

- El momento en B del estado 1 es 0 y el del estado 2 (momento transmitido) es 0 también con lo cual el momento total es 0.

Barra AC.-

- El momento en A del estado 1 es 0 y el momento del estado 2 es $-pL^2/30$ con lo cual el momento total es:

$$0 - pL^2/30 = -pL^2/30$$

- El momento en C del estado 1 es 0 y el del estado 2 (momento transmitido) es $pL^2/60$ con lo cual el momento total es $pL^2/60$.

En la estructura del ejemplo anterior, el proceso descrito no requiere más una operación de sujetar y soltar nodos. Sin embargo, si la estructura tiene un mayor complejidad incluyendo barras cuyos dos extremos sean nodos sin coacción externa (es decir, que no son apoyos de la estructura) puede requerirse más de una operación de sujetar y soltar nodos. Esto es así porque el momento transmitido desde un nudo al extremo opuesto de una estas barras es soportado por la clavija allí colocada y, en consecuencia, es, también, objeto de reparto. La aplicación del método descrito a este tipo de estructuras es pues un proceso iterativo de la operación de sujetar y soltar nodos que termina cuando se observa que los momentos transmitidos son muy pequeños.

8.3 ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS DE BARRAS

8.3.1 Introducción.-

Los métodos de análisis planteados por los científicos del XIX (Maxwell, Cullman, Navier, Mohr,...) dotaron a los ingenieros estructuralistas de herramientas cada una de las cuales tenía un campo de aplicación restringido; esta característica provenía del hecho de que, en aras de hacer sencillo su uso, llevaban implícitas simplificaciones que las hacían aplicables a estructuras con condiciones particulares. Su aplicación a estructuras complicadas requería grandes dotes de simplificación y sentido ingenieril y, en cualquier caso, inducía una gran complejidad y volumen en los cálculos; esta complejidad era parcialmente paliada con toda una tecnología práctica basada en tablas, ábacos,... que demostraba, una vez más, la capacidad de inventiva de la Ingeniería.

La aparición de los ordenadores posibilitó el análisis de estructuras más complejas, utilizando algoritmos de cálculo en los que no eran necesarias las simplificaciones y que, en consecuencia, eran aplicables a cualquier tipo de estructura. Los nuevos métodos seguían basándose en los teoremas fundamentales del cálculo clásico a cuyas ecuaciones daban un tratamiento numérico con técnicas del álgebra matricial ("métodos matriciales").

Los métodos matriciales son técnicamente muy simples, pudiéndose decir que no han aportado ideas nuevas a la panoplia de herramientas para el análisis de estructuras. Su éxito se debe a su adaptación a las sistemáticas de funcionamiento y de ordenación de datos de los ordenadores. El análisis de estructuras con un método

matricial y utilizando un ordenador se reduce a la definición de unos datos descriptivos de su geometría, de los materiales que la constituyen y de las cargas a las que está sometida.

8.3.2 Hipótesis

- Son aplicables las ecuaciones generales de la mecánica de los medios continuos:
 - a) Ecuaciones de equilibrio interno (tensiones y fuerzas de volumen), en el contorno (tensiones en el contorno y fuerzas externas) y externo (ecuaciones de la estática),
 - b) Ecuaciones que establecen la relación entre movimientos y deformaciones
 - c) Ecuaciones que establecen la relación entre tensión y deformación
- La aplicación de las ecuaciones anteriores se reduce a los casos de pequeñas deformaciones
- Se considera una relación lineal entre tensión y deformación pudiéndose, en consecuencia, aplicar el principio de superposición entre diferentes estados de carga
- Se consideran solamente cargas actuando en los nodos del modelo de la estructura: cargas en elementos habrán de ser convertidas en cargas en nodos.
- Son aplicables los siguientes PRINCIPIOS Y TEOREMAS:
 - a) Principio de los trabajos virtuales
 - b) Teorema de Castigliano
 - c) Teorema de mínimos de la energía de deformación
 - d) Teorema de reciprocidad de Maxwell

8.3.3. Fases del análisis matricial (método directo o de la rigidez)

El proceso de análisis matricial de una estructura incluye los siguientes pasos:

- 1/ Numeración de nodos y barras

- 2/ Selección y numeración de grados de libertad
- 3/ Construcción de la matriz de rigidez de cada elemento
 - 3.1 en ejes locales
 - 3.2 en ejes globales (mediante transformaciones de coordenadas)
- 4/ Ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos para dar lugar a la matriz de rigidez completa
- 5/ Construcción del vector de cargas
- 6/ Introducción de las condiciones de contorno en la matriz de rigidez
- 7/ Resolución del sistema de ecuaciones (vector de desplazamientos en nodos de la estructura)
- 8/ Cálculo de esfuerzos en cada elemento a partir de los desplazamientos de los nodos
- 9/ Cálculo de las reacciones en los apoyos

A continuación se desarrollan todas y cada uno de las fases del análisis matricial de estructuras formadas por elementos lineales (barras).

8.3.4 Numeración de nodos y barras

Considérese como ejemplo la estructura cuya geometría y cargas se muestran en la figura 8.23.

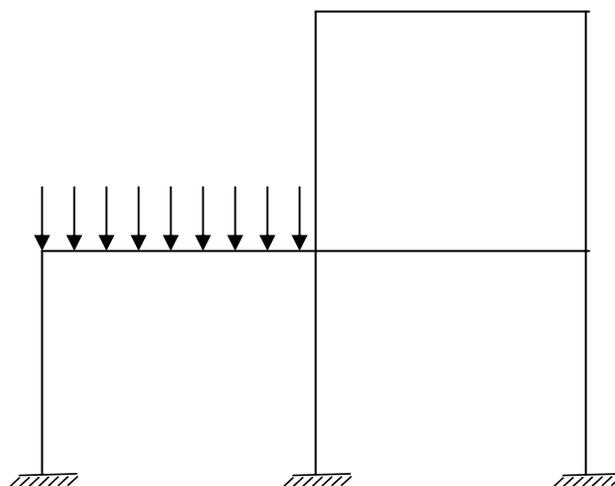


Figura 8.23

Los puntos en los que confluyen las barras han de ser, razonablemente, nodos del modelo (figura 8.24) que se utilizará en el análisis, aunque podrían seleccionarse como nodos del modelo otros puntos de la estructura. En dicha figura se han numerado, también, las barras (rodeados sus números por un círculo)

De cada uno de estos nodos se obtendrán, como resultado del análisis, algunos de sus movimientos y de estos movimientos se obtendrán, a su vez, los esfuerzos en los elementos de la estructura.

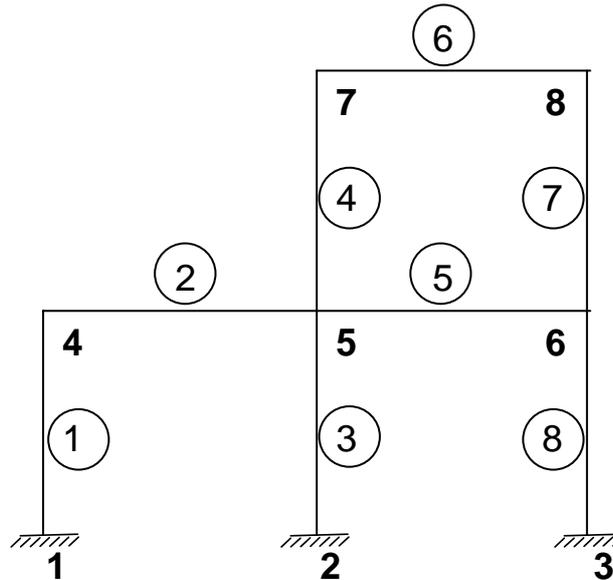


Figura 8.24

8.3.5 Elección y numeración de grados de libertad.-

En el caso de estructuras planas, cada nodo tiene tres grados de libertad (g.d.l.) (dos desplazamientos y un giro); aunque las condiciones de apoyo de la estructura impiden los movimientos de los nodos 1, 2 y 3, inicialmente se eligen los tres grados de libertad de todos y cada uno de los nodos (figura 8.25). No habiendo, en principio, criterios especiales de numeración, en la figura se muestran los números asignados a los 24 g.d.l. Con flechas de puntos se identifican los g.d.l. restringidos por el sistema de apoyos.

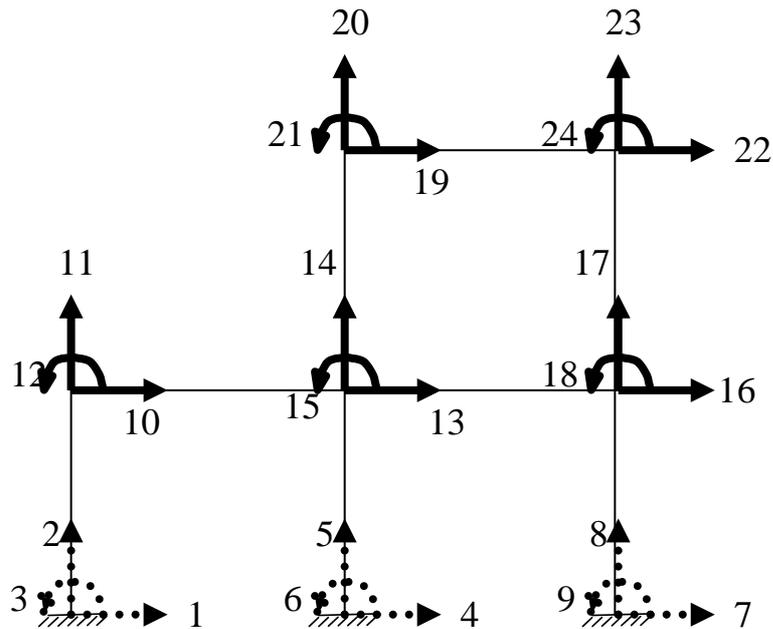


Figura 8.25

8.3.6 Matriz de rigidez de la estructura

El proceso a seguir consiste en plantear, en primer lugar, la matriz de rigidez de una barra (primero en ejes locales de la barra y, luego, en ejes globales de la estructura) y después mediante un proceso sistemático denominado “ensamblaje”, montar la matriz de rigidez de la estructura completa.

8.3.6.1 Matriz de rigidez de una barra en ejes locales.-

Barra empotrada.-

Sea la barra de la figura 8.26 que va del nudo inicial **i** (en lo que sigue, al nudo inicial de la barra le denominaremos **1**) y al nudo final **j** (numerado como **2** en lo que sigue). No hay que confundir esta numeración (nudos **1** y **2**) que emplearemos en ejes locales con la numeración de nudos global que, previamente, se ha realizado en toda la estructura.

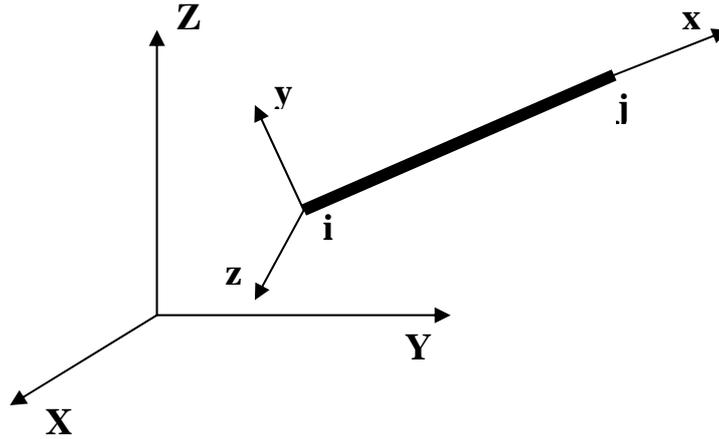


Figura 8.26

En el caso de una estructura plana, los esfuerzos en los nodos a los que la barra puede estar sometida (S'_{x1} , S'_{y1} , $S'_{\theta 1}$, S'_{x2} , S'_{y2} , $S'_{\theta 2}$) así como los correspondientes movimientos de dichos nodos (u'_1 , v'_1 , θ'_1 , u'_2 , v'_2 , θ'_2) son los que se especifican en la figura 8.27.

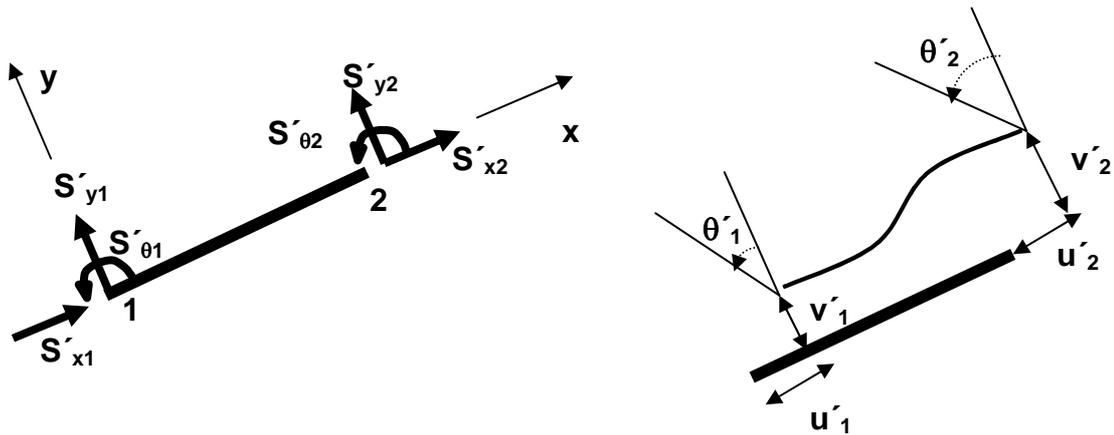


Figura 8.27

A continuación se plantean las relaciones existentes entre los esfuerzos y los movimientos en los nodos extremos de la barra.

a) *Esfuerzos axiales.-*

Si L es la longitud inicial y L' la longitud final,

$$L' = L + (u'_2 - u'_1)$$

y, por equilibrio,

$$S'_{x1} + S'_{x2} = 0$$

El alargamiento de la barra vendrá dado por

$$u'_2 - u'_1 = (S'_{x2} L)/(EA)$$

de donde

$$S'_{x2} = EA/L (u'_2 - u'_1) \quad (1)$$

y como $S'_{x1} = -S'_{x2}$ resulta

$$S'_{x1} = (EA/L) (u'_1 - u'_2) \quad (2)$$

b) *Momentos flectores*

Utilizando las expresiones deducidas en 8.1.3 se relacionan los movimientos en los nodos con los momentos aplicados en estos:

$$S'_{\theta 1} = (4EI/L)\theta'_1 + (2EI/L)\theta'_2 + (6EI/L^2) (v'_1 - v'_2) \quad (3)$$

$$S'_{\theta 2} = (2EI/L)\theta'_1 + (4EI/L)\theta'_2 + (6EI/L^2) (v'_1 - v'_2) \quad (4)$$

c) *Esfuerzos cortantes*

Estableciendo el equilibrio de fuerzas en dirección perpendicular a la barra así como el equilibrio de momentos:

$$S'_{y1} = (S'_{\theta 1} + S'_{\theta 2})/L = -S'_{y2}$$

de donde

$$S'_{y1} = (6EI/L^2)\theta'_1 + (6EI/L^2)\theta'_2 + (12EI/L^3)(v'_1 - v'_2) \quad (5)$$

$$S'_{y2} = -(6EI/L^2)\theta'_1 - (6EI/L^2)\theta'_2 - (12EI/L^3)(v'_1 - v'_2) \quad (6)$$

Las ecuaciones anteriores pueden expresarse en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{\theta 1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S'_{x2} \\ S'_{y2} \\ S'_{\theta 2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix}$$

y, llamando:

$$S'_1 = \begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{\theta 1} \end{Bmatrix} \quad S'_2 = \begin{Bmatrix} S'_{x2} \\ S'_{y2} \\ S'_{\theta 2} \end{Bmatrix} \quad d'_1 = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \end{Bmatrix} \quad d'_2 = \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix}$$

y, tambien:

$$S' = \begin{Bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{Bmatrix} \quad d' = \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{Bmatrix}$$

resulta que:

$$\begin{Bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{Bmatrix}$$

y, en forma matricial compacta:

$$\{S'\} = [K'] \{d'\}$$

La matriz **[K']** es la matriz de rigidez de la barra expresada en ejes locales de la misma.

Barra biarticulada.-

Sea la barra biarticulada de la figura 8.28. La relación entre esfuerzos (axiles) y movimientos (en dirección del eje de la barra) es, en este caso, (ley de Hooke):

$$\begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{x2} \end{Bmatrix} = EA/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix}$$

y, por tanto, la matriz de rigidez, es

$$EA/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

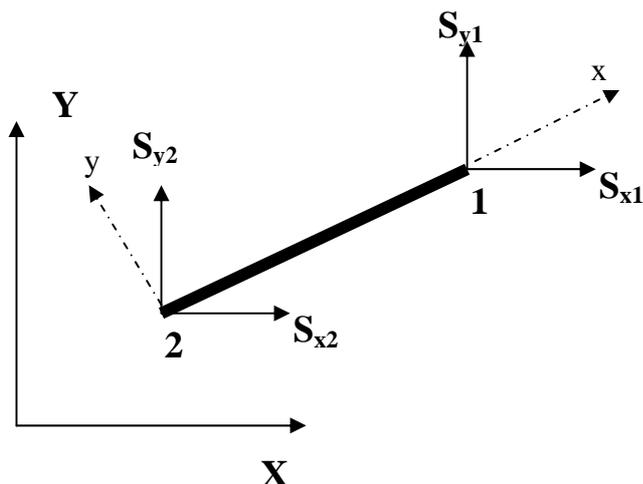


Figura 8.28

8.3.6.2 Transformación de coordenadas

Para poder plantear las ecuaciones que establecen el equilibrio de un nudo sometido a las cargas que actúan directamente sobre él y a las acciones de las barras que en él confluyen, es necesario que todas estas cargas estén referidas a los mismos ejes globales de la estructura.

La relación entre los ejes locales de una barra y los ejes globales de la estructura es la correspondiente a un cambio de sistema de referencia y se establece a través de una matriz de transformación **[T]**. Así, por ejemplo, los esfuerzos en extremos de barra se expresan en ejes globales en función de su valor en ejes locales del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x & X_y & X_z & 0 & 0 & 0 \\ Y_x & Y_y & Y_z & 0 & 0 & 0 \\ Z_x & Z_y & Z_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_x & X_y & X_z \\ 0 & 0 & 0 & X_x & X_y & X_z \\ 0 & 0 & 0 & X_x & X_y & X_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_x \\ S'_y \\ S'_z \\ S'_{\theta x} \\ S'_{\theta y} \\ S'_{\theta z} \end{pmatrix}$$

donde X_n es el coseno del ángulo que el eje local n forma con el eje global N.

La expresión matricial de la igualdad anterior es

$$\{S\} = [T] \{S'\}$$

ecuación que permite obtener los esfuerzos en los extremos de barra en función de los mismos expresados en ejes locales.

En el caso de los desplazamientos:

$$\{d\} = [T] \{d'\}$$

La matriz **[T]** es ortogonal es decir:

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

con lo cual

$$\{S'\} = [T]^T \{S\} \quad \text{y} \quad \{d'\} = [T]^T \{d\}$$

En el caso plano la matriz de transformación es

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Barra biarticulada.-

En la barra biarticulada de la figura 8.28, la matriz de rigidez en ejes globales es:

$$\begin{pmatrix} S_{x1} \\ S_{y1} \\ S_{x2} \\ S_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

siendo:

$$[K_{11}] = [K_{22}] = EA/L \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \text{ sen}\alpha \\ \cos\alpha \text{ sen}\alpha & \text{sen}^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$[K_{12}] = [K_{21}] = -EA/L \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \text{ sen}\alpha \\ \cos\alpha \text{ sen}\alpha & \text{sen}^2\alpha \end{pmatrix}$$

8.3.6.3 Esfuerzos en cada barra a partir de los desplazamientos de sus nodos extremos.-

a) *En coordenadas locales.*

Los esfuerzos en extremos de barra se relacionan con los movimientos en nodos en coordenadas locales mediante las expresiones

$$\{S'_1\} = [K'_{11}] \{d'_1\} + [K'_{12}] \{d'_2\}$$

$$\{S'_2\} = [K'_{21}] \{d'_1\} + [K'_{22}] \{d'_2\}$$

Pero dado que

$$\{d'_1\} = [T]^T \{d_1\} \quad \text{y} \quad \{d'_2\} = [T]^T \{d_2\}$$

resulta:

$$\{S'_1\} = [K'_{11}][T]^T \{d_1\} + [K'_{12}] [T]^T \{d_2\}$$

$$\{S'_2\} = [K'_{21}][T]^T \{d_1\} + [K'_{22}][T]^T \{d_2\}$$

que proporciona los esfuerzos que aparecen en los extremos de las barras en ejes locales debido a los movimientos en los extremos de estas expresados en ejes globales.

b) *En coordenadas globales.-*

Pre-multiplicando las expresiones anteriores por $[T]$, se obtiene:

$$[T]\{S'_1\} = \{S_1\} = [T][K'_{11}][T]^T \{d_1\} + [T][K'_{12}][T]^T \{d_2\}$$

$$[T]\{S'_2\} = \{S_2\} = [T][K'_{21}][T]^T \{d_1\} + [T][K'_{22}][T]^T \{d_2\}$$

Como $[K_{ij}] = [T][K'_{ij}][T]^T$ se obtiene:

$$\{S_1\} = [K_{11}]\{d_1\} + [K_{12}]\{d_2\}$$

$$\{S_2\} = [K_{21}]\{d_1\} + [K_{22}]\{d_2\}$$

o, en expresión matricial,

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

es decir: $\{S\} = [K]\{d\}$

8.3.6.4 Ensamblaje de las matrices elementales de rigidez.-

Considérese una estructura como la que se muestra en la figura 8.29.

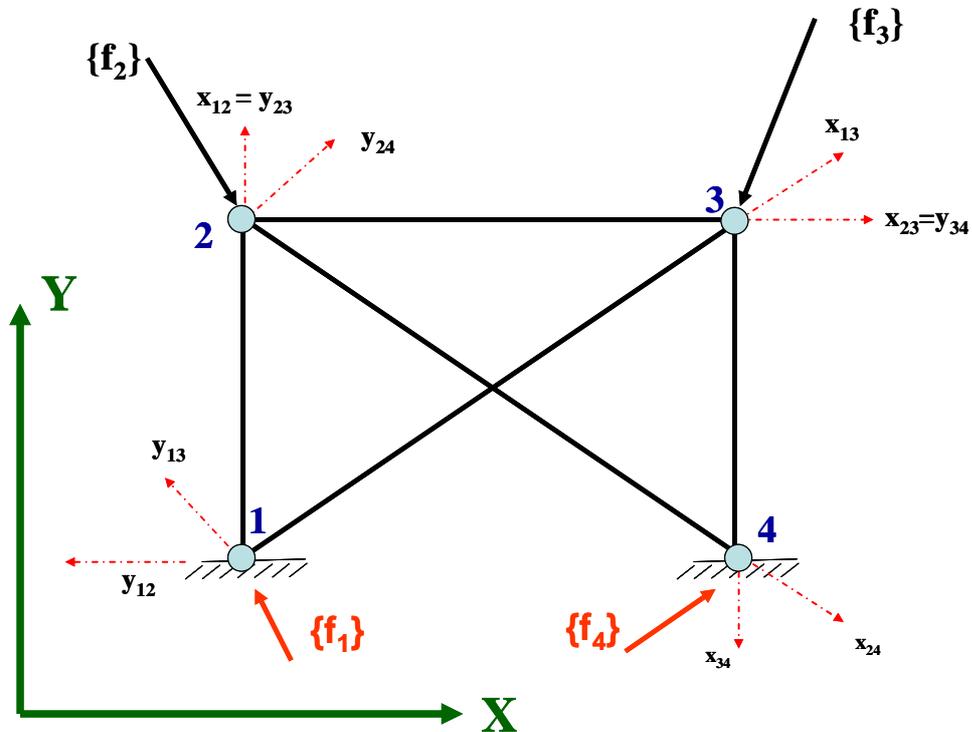


Figura 8.29

Supóngase que para cada una de las barras de la estructura se han calculado $[K_{11}]$, $[K_{12}]$, $[K_{21}]$ y $[K_{22}]$ de forma que

$$\{S_1\} = [K_{11}] \{d_1\} + [K_{12}] \{d_2\}$$

$$\{S_2\} = [K_{21}] \{d_1\} + [K_{22}] \{d_2\}$$

siendo 1 el nodo inicial y 2 el nodo final de la barra.

Las ecuaciones que establecen el equilibrio de cada uno de los 4 nodos de la estructura son las siguientes.

Nodo 1.-

La figura 8.30 representa el nodo 1 de la estructura y las fuerzas que sobre él actúan.

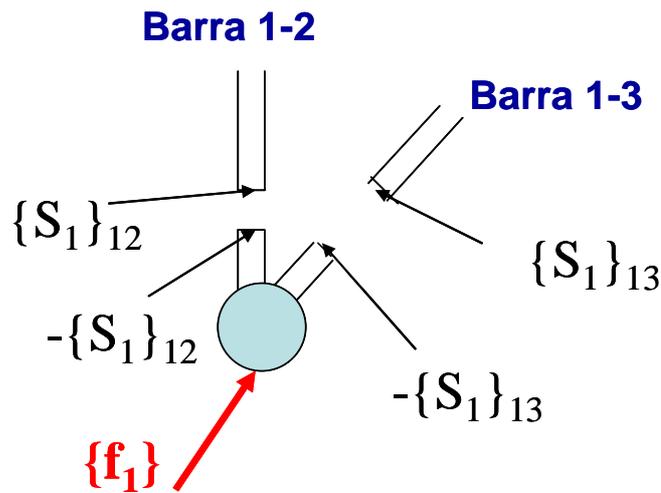


Figura 8.30

Planteando el equilibrio de estas fuerzas se obtiene

$$\{f_1\} - \{S_1\}_{12} - \{S_1\}_{13} = \{0\}$$

con lo cual:

$$\{f_1\} = \{S_1\}_{12} + \{S_1\}_{13} = [K_{11}]_{12} \{d_1\} + [K_{12}]_{12} \{d_2\} + [K_{11}]_{13} \{d_1\} + [K_{12}]_{13} \{d_3\}$$

Nodo 2.-

$$\{f_2\} - \{S_2\}_{12} - \{S_1\}_{23} - \{S_1\}_{24} = \{0\}$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} \{f_2\} &= \{S_2\}_{12} + \{S_1\}_{23} + \{S_1\}_{24} = \\ &= [K_{21}]_{12} \{d_1\} + [K_{22}]_{12} \{d_2\} + [K_{11}]_{23} \{d_2\} + [K_{12}]_{23} \{d_3\} + [K_{11}]_{24} \{d_2\} + [K_{12}]_{24} \{d_4\} \end{aligned}$$

Nodo 3.-

$$\{f_3\} - \{S_2\}_{13} - \{S_2\}_{23} - \{S_1\}_{34} = \{0\}$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} \{f_3\} &= \{S_2\}_{13} + \{S_2\}_{23} + \{S_1\}_{34} = \\ &= [K_{21}]_{13} \{d_1\} + [K_{22}]_{13} \{d_3\} + [K_{21}]_{23} \{d_2\} + [K_{22}]_{23} \{d_3\} + [K_{11}]_{34} \{d_3\} + [K_{12}]_{34} \{d_4\} \end{aligned}$$

Nodo 4.-

$$\{f_4\} - \{S_2\}_{24} - \{S_2\}_{34} = \{0\}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \{f_4\} &= \{S_2\}_{24} + \{S_2\}_{34} = \\ &= [K_{21}]_{24}\{d_2\} + [K_{22}]_{14}\{d_4\} + [K_{21}]_{34}\{d_3\} + [K_{22}]_{34}\{d_4\} \end{aligned}$$

Matricialmente, las ecuaciones anteriores se pueden expresar como:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{11})_{12} & (K_{12})_{12} & (K_{12})_{13} & 0 \\ (K_{11})_{13} & & & \\ (K_{21})_{12} & (K_{22})_{12} + (K_{11})_{23} + (K_{11})_{24} & (K_{12})_{23} & (K_{12})_{24} \\ (K_{21})_{13} & (K_{21})_{23} & (K_{22})_{13} + (K_{22})_{23} + (K_{11})_{34} & (K_{12})_{34} \\ 0 & (K_{21})_{24} & (K_{21})_{34} & (K_{22})_{24} + (K_{22})_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

es decir

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{K}] \{\mathbf{d}\}$$

siendo

$\{\mathbf{f}\}$ el vector de fuerzas actuantes en nodos

$[\mathbf{K}]$ la matriz de rigidez de la estructura

$\{\mathbf{d}\}$ el vector de movimientos en los grados de libertad

Observación.- Todos los vectores y matrices se encuentran referidos a los ejes globales

Propiedades.-

a) La matriz K (matriz de rigidez global de la estructura) es **simétrica.-**

Esto es así por serlo $[K_{11}]$ y $[K_{22}]$ y traspuestas una de la otra $[K_{12}]$ y $[K_{21}]$

b) La matriz K es **singular**.-

Dado que en el proceso de obtención de la matriz K no se han considerado, aún, las condiciones de apoyo de la estructura, al vector de fuerzas $\{f\}$ no le corresponde un único vector de movimientos $\{d\}$. Si $\{d_1\}$ fuera un vector de movimientos compatible con el vector de fuerzas $\{f\}$, un vector $\{d_1 + d_{sr}\}$, siendo $\{d_{sr}\}$ un vector de movimientos correspondientes a un movimiento global de la estructura como sólido rígido, es también compatible con $\{f\}$ dado que este movimiento como sólido rígido ni afecta ni es afectado por las cargas. En consecuencia, en el sistema de ecuaciones $\{f\} = [K] \{d\}$ a un vector de términos independientes $\{f\}$ le corresponden infinitos vectores solución $\{d\}$ por lo que la matriz del sistema $[K]$ ha de ser singular.

Reglas para la formación de la matriz K .-

Considerando una barra genérica cuyo primer nodo es el i de la estructura y cuyo segundo nodo es el j de la estructura,

$$\{S_1\}_{ij} = [K_{11}]_{ij} \{d_i\} + [K_{12}]_{ij} \{d_j\}$$

$$\{S_2\}_{ij} = [K_{21}]_{ij} \{d_i\} + [K_{22}]_{ij} \{d_j\}$$

al plantear (separadamente) el equilibrio de los nudos i y j se obtiene:

$$\{f_i\} = \{S_1\}_{ij} + \text{contribución de las otras barras que concurren en el nudo } i$$

$$\{f_j\} = \{S_2\}_{ij} + \text{contribución de las otras barras que concurren en el nudo } j$$

siendo las contribuciones de las otras barras los vectores $\{S_1\}$ para las barras con el extremo 1 en el nodo considerado ó $\{S_2\}$ para las barras con el extremo 2 en el nodo considerado. Es decir

- $\{f_i\} = [K_{11}]_{ij} \{d_i\} + [K_{12}]_{ij} \{d_j\} + \text{contribución de las barras que concurren en el nudo } i$
- $\{f_j\} = [K_{21}]_{ij} \{d_i\} + [K_{22}]_{ij} \{d_j\} + \text{contribución de las barras que concurren en el nudo } j$

Por tanto, la barra que conecta los nudos i y j aporta a la matriz de rigidez de la estructura global las submatrices $[K_{ij}]$ del siguiente modo:

	Columna i	Columna j
Fila i	$[K_{11}]_{ij}$	$[K_{12}]_{ij}$
Fila j	$[K_{21}]_{ij}$	$[K_{22}]_{ij}$

- El elemento de la diagonal principal de la fila i -ésima es la suma de las submatrices $[K_{11}]$ ó $[K_{22}]$ de todas las barras que concurren en el nudo i ($[K_{11}]$ si la barra tiene su extremo 1 en i , $[K_{22}]$ si la barra tiene su extremo 2 en i).
- El elemento fuera de la diagonal en la fila i -ésima y columna j -ésima es la submatriz $[K_{12}]$ de la barra que une el nudo i con el nudo j ; si un nudo k no está unido directamente por ninguna barra con el nudo i , los elementos $[K_{ik}]$ y $[K_{ki}]$ estarían ocupados por la matriz nula.

Ancho de banda.-

Si los nudos i y j no están directamente unidos por un elemento estructural, el término K_{ij} de la matriz de rigidez de la estructura estará ocupado por la matriz (3x3) nula. Esto hace que las matrices de rigidez de estructuras lineales sean matrices con “muchos ceros” (matrices dispersas). Se define como “ancho de banda” el valor de la mayor diferencia entre la numeración de los nudos de la estructura que están directamente unidos por elementos. Así, por ejemplo, en la matriz que se esquematiza en la figura 8.31 en la que las celdas oscuras están ocupadas por elementos no nulos, el ancho de banda es 3 obtenido como la diferencia 7-4 (obsérvese que el elemento K_{74} es no nulo).

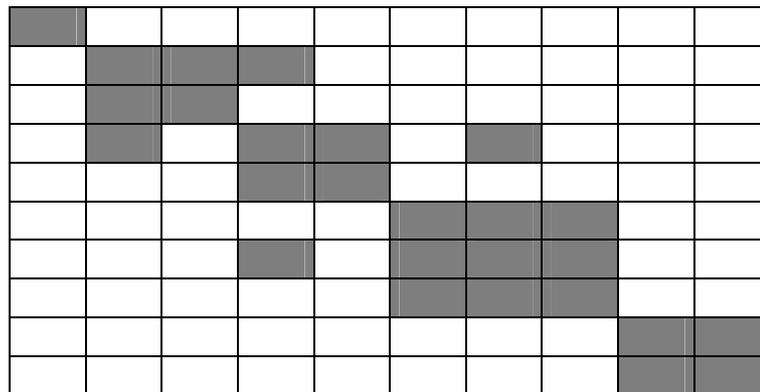


Figura 8.31

Una numeración oportuna puede disminuir el ancho de banda de una matriz aumentando con ello la eficiencia de los algoritmos numéricos que se utilizarán, después, para resolver el sistema de ecuaciones.

8.3.7 Construcción del vector de cargas.-

a) *Vector de cargas por barra.-*

En análisis matricial solamente se consideran cargas actuando en los nudos de la estructura. El vector de cargas estará constituido, en este caso, por las cargas actuantes en los nudos.

Si las cargas de la estructura actúan directamente sobre los elementos (barras) una primera opción es crear nodos en los puntos de aplicación. Este incremento del número de nodos da lugar, obviamente, a mayor trabajo de preparación del input, a mayor tiempo de ejecución y al aumento del "volumen" de resultados. Si las fuerzas actuantes son de tipo repartido habría, además, que proceder a concentrarlas introduciendo con ello fuertes imprecisiones.

El proceso más recomendable a seguir consiste en llevar las cargas de los elementos a los nodos (figura 8.32) siempre que estas cargas equivalentes actuando en los nodos del elemento den lugar a los mismos movimientos en dichos nodos que el sistema original de cargas actuante sobre el elemento. Una vez obtenidos los esfuerzos en los elementos asociados a los movimientos de sus nodos, se habrán de superponer los esfuerzos en el elemento producidos directamente por las cargas actuantes (en su sitio) en el elemento.

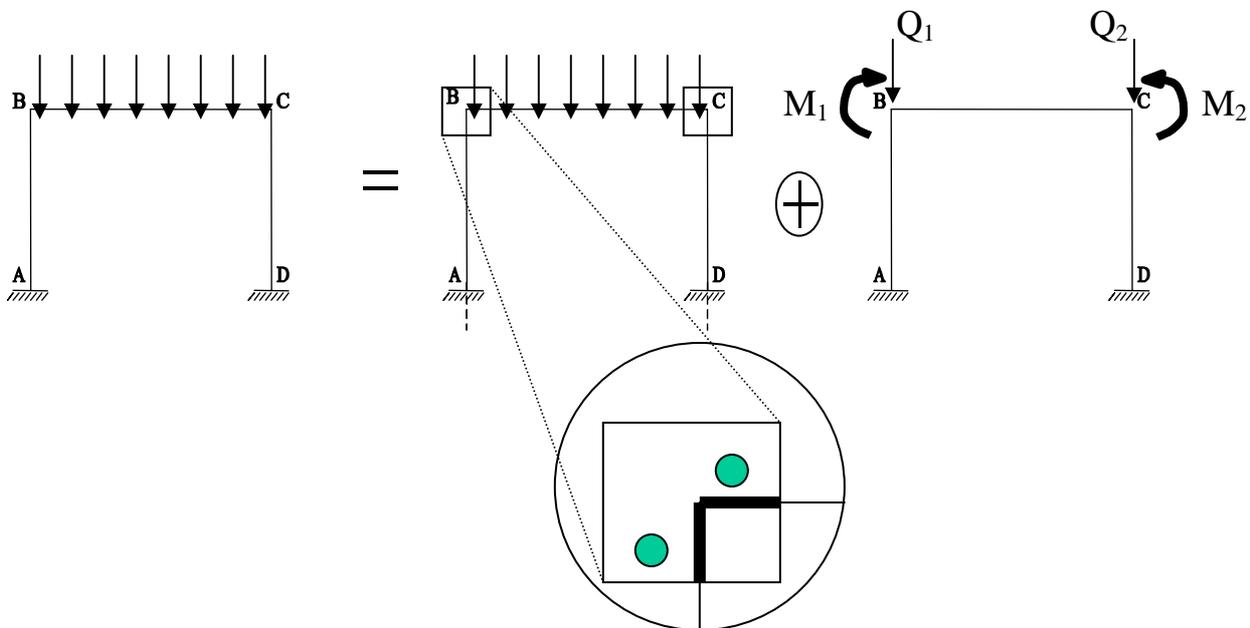


Figura 8.32

Así, en una barra como la **BC** sometida a una carga distribuida **q**, se terminarían las reacciones $\{r^{e_1}\}$ y $\{r^{e_2}\}$ en los empotramientos en ejes locales. Estas reacciones, en este caso son $\{r^{e_1}\} = (0, Q_1, M_1)^T$ y $\{r^{e_2}\} = (0, Q_2, M_2)^T$ siendo

$$Q_1 = Q_2 = qL/2 \text{ y } M_1 = -M_2 = qL^2/12.$$

Cargas térmicas.-

Las cargas térmicas actuantes sobre una estructura son generalmente gradientes a través del espesor de los elementos. Estos gradientes producen elongaciones de las piezas y, sobre todo, curvaturas como

resultado del diferente alargamiento de las fibras de una misma sección.

El proceso a seguir es similar al que se ha de aplicar en el caso de cargas actuantes sobre los elementos y consiste, esquemáticamente, en

- calcular los movimientos de los nodos del elemento libre sometido al gradiente térmico
- calcular las fuerzas en nodo necesarias para "devolver" al elemento a sus dimensiones originales
- construir el vector de cargas en nodos incluyendo las fuerzas anteriores

Descenso de apoyo.-

El proceso a seguir, en este caso, es el siguiente:

- en el vector (incógnita) de desplazamientos en nodos, sustituir los valores de los desplazamientos en los nodos que asientan
- resolver el subsistema constituido por las ecuaciones relativas a los nodos que no tienen asiento forzado
- obtener las reacciones en todos los nodos

b) Ensamblaje del vector de cargas.-

Para cada barra, las reacciones expresadas en ejes globales se obtendrían como

$$\{r^e_i\} = [T] \{r^e_i\}$$

El vector $\{f_i\}$ de cargas actuantes en el nudo i se obtendría sumando los vectores $-\{r^e_i\}$ de todas las barras que confluyen en el nudo i . Si, además, en el nudo i actuasen directamente cargas $\{P_i\}$, el vector de cargas $\{f_i\}$ se obtendrá como:

$$\{f_i\} = \{P_i\} - \sum \{r^e_i\}$$

estando el sumatorio extendido a todas las barras conectadas al nudo i .

El vector f de cargas en nodos de la estructura sería, finalmente,

$$f = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

8.3.8 Condiciones de contorno.-

Sea el sistema de ecuaciones

$$\{f\} = [K] \{d\}$$

En este sistema se conocen

- las fuerzas $\{f_i\}$ en los nodos donde se aplican cargas exteriores
- los movimientos $\{d_i\}$ en aquellos nodos donde existen ligaduras.

El balance es

n nodos

3*n g.d.l. (en el plano)

r coacciones

3*n-r movimientos desconocidos

El objetivo es obtener un sistema

$$\{f^*\} = [K^*] \{d^*\}$$

en el que se relacionen las cargas conocidas con los movimientos incógnitas.

Sea, por ejemplo, la estructura de la figura 8.33 en la cual, el movimiento horizontal del g.d.l. 7, entre otros, está impedido, es decir $d_7 = 0$.

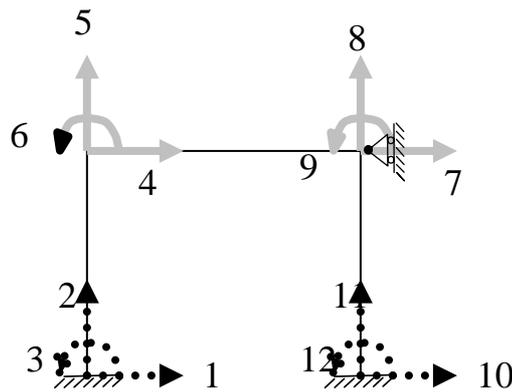


Figura 8.33

Para reflejar esta coacción en el sistema, se eliminan la fila 7 y la columna 7 del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l}
 f_1 = K_{11}d_1 + \dots + \mathbf{K_{17}d_7} + \dots + K_{1,12} d_{12} \\
 \dots\dots\dots \\
 \mathbf{f_7 = K_{71} d_1 + \dots + K_{77} d_7 + \dots + K_{7,12} d_{12}} \\
 \dots\dots\dots \\
 f_{12} = K_{12,1} d_1 + \dots + \mathbf{K_{12,7} d_7} + \dots + K_{12,12} d_{12}
 \end{array}$$

Con este criterio se eliminan también, las ecuaciones correspondientes a los g.d.l. 1, 2, 3, 10, 11 y 12 resultando un sistema de cinco ecuaciones y cinco incógnitas que son los movimientos de los g.d.l. 4, 5, 6, 8 y 9 (únicos g.d.l. no coaccionados) resultando un sistema cuya matriz de coeficientes (K^*) **ya no es singular**.

$$f_4 = K_{44}d_4 + K_{45}d_5 + K_{46} d_6 + K_{48}d_8 + K_{49}d_9$$

$$f_5 = K_{54}d_4 + K_{55}d_5 + K_{56} d_6 + K_{58}d_8 + K_{59}d_9$$

$$f_6 = K_{64}d_4 + K_{65}d_5 + K_{66} d_6 + K_{68}d_8 + K_{69}d_9$$

$$f_8 = K_{84}d_4 + K_{85}d_5 + K_{86} d_6 + K_{88}d_8 + K_{89}d_9$$

$$f_9 = K_{94}d_4 + K_{95}d_5 + K_{96} d_6 + K_{98}d_8 + K_{99}d_9$$

ó, en forma matricial,

$$\{f^*\} = [K^*] \{d^*\}$$

en el que la matriz $[K^*]$ ya no es singular y, por lo tanto, es invertible.

8.3.9 Resolución del sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones anterior se resuelve por métodos algebraicos que requieren invertir la matriz de rigidez.

$$\{d^*\} = [k^*]^{-1} \{f^*\}$$

La matriz de rigidez es simétrica y dispersa; estas circunstancias hacen especialmente aplicables técnicas numéricas específicas para la inversión de este tipo de matrices.

8.3.10 Cálculo de esfuerzos en cada barra.-

A los esfuerzos en extremos de barra producidos por los movimientos de los nodos de la barra

$$\{S'_1\} = [K'_{11}][T]^T\{d_1\} + [K'_{12}] [T]^T\{d'_2\}$$

$$\{S'_2\} = [K'_{21}][T]^T\{d_1\} + [K'_{22}] [T]^T\{d'_2\}$$

habrán de superponerse, en su caso, los esfuerzos de empotramiento debidos a las cargas que actuasen directamente sobre las barras.

$$\{S'_1\} = [K'_{11}][T]^T\{d_1\} + [K'_{12}] [T]^T\{d'_2\} + \{r'_1\}e$$

$$\{S'_2\} = [K'_{21}][T]^T\{d_1\} + [K'_{22}][T]^T\{d'_2\} + \{r'_2\}e$$

8.3.11 Cálculo de las reacciones en los apoyos.-

El vector de movimientos en todos los g.d.l. de la estructura (incluidos los coaccionados) se construye término a término asignando el valor obtenido a los g.d.l. que han intervenido en el cálculo y el valor 0 a los g.d.l. coaccionados.

Multiplicando este vector por las filas de la matriz del sistema relativas a los g.d.l. coaccionados (filas eliminadas al considerar las condiciones de contorno) se obtienen los esfuerzos aplicados a estos g.d.l., es decir, las reacciones. A estos reacciones habrán de sumársele las cargas que actuasen directamente sobre los g.d.l. coaccionados.

8.3.12 Condensación

Definición.- Se denomina *Condensación* al proceso de reducción del tamaño de la matriz de coeficientes del sistema $\{f\} = [K] \{d\}$ como resultado de la eliminación de g.d.l. Esta eliminación se desarrolla de modo tal que la influencia del g.d.l. eliminado se tiene en cuenta a través de las ecuaciones que describen el comportamiento deformacional de los g.d.l. no eliminados.

En el sistema inicial $\{f\} = [K]\{d\}$ se identifican separadamente las submatrices que engloban los g.d.l. que se condensan (eliminan) y los que se mantienen:

$$\begin{Bmatrix} f_p \\ f_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pc} \\ K_{cp} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_p \\ d_c \end{Bmatrix}$$

La expresión matricial anterior equivale a las ecuaciones matriciales

$$\{f_p\} = [K_{pp}]\{d_p\} + [K_{pc}] \{d_c\}$$

$$\{f_p\} = [K_{cp}]\{d_p\} + [K_{cc}] \{d_c\}$$

De la segunda ecuación se despeja $\{d_c\}$, obteniéndose

$$\{d_c\} = [K_{cc}]^{-1} (\{f_c\} - [K_{cp}]\{d_p\})$$

Substituyendo en la primera ecuación se obtiene

$$\{f_p\} = [K_{pp}] \{d_p\} + [K_{pc}] [K_{cc}]^{-1} (\{f_c\} - [K_{cp}]\{d_p\})$$

con lo cual

$$\{f_p\} - [K_{pc}] [K_{cc}]^{-1} \{f_c\} = ([K_{pp}] - [K_{pc}] [K_{cc}]^{-1} [K_{cp}])\{d_p\}$$

o, también,

$$\{f_p^*\} = [K_{pp}^*] \{d_p\}$$

El vector de cargas equivalente es, pues,

$$\{f_p^*\} = \{f_p\} - [K_{pc}] [K_{cc}]^{-1} \{f_c\}$$

y la matriz de rigidez equivalente es

$$[K_{pp}^*] = [K_{pp}] - [K_{pc}] [K_{cc}]^{-1} [K_{cp}]$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones condensado (y obtenido, en consecuencia, el vector $\{d_p\}$), el vector de movimientos de los g.d.l. condensados $\{d_c\}$ se obtiene (expansión) como

$$\{d_c\} = [K_{cc}]^{-1} (\{f_c\} - [K_{cp}]\{d_p\})$$

El procedimiento de condensación es utilizado, habitualmente, en análisis dinámico de estructuras pues el comportamiento dinámico de estas puede reflejarse adecuadamente suponiendo concentrada su masa en algunos nodos.

EJEMPLO.- Sea la viga de la figura 8.34 de la cual se desea conocer los movimientos de los puntos de aplicación de las cargas despreciando las deformaciones originadas por esfuerzo axial (caso de que los hubiera). El tramo 3-4 tiene una sección con un momento de inercia I , el tramo 2-3 $2xI$ y el tramo 1-2 $3xI$.

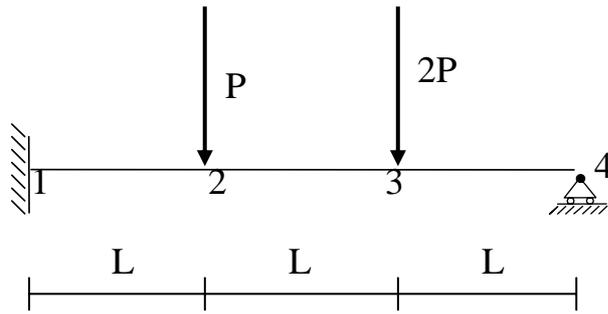


Figura 8.34

Considerando los cuatro nodos definidos en la estructura, el sistema tiene 12 g.d.l. En dirección de la barra no hay desplazamientos lo que permite no tener en cuenta los g.d.l. en esta dirección reduciéndose entonces el número a $12-4 = 8$ que corresponden a los movimientos verticales y giros de los cuatro nodos (figura 8.35).

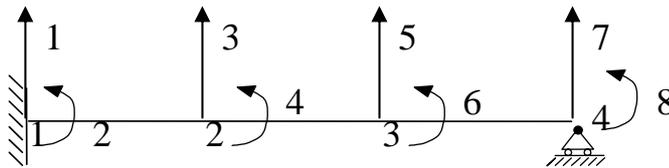


Figura 8.35

Las 3 coacciones de los apoyos (la traslación horizontal del nodo 1 ya ha sido considerada) reducen los 8 g.d.l. a $8-3$ (figura 8.36).

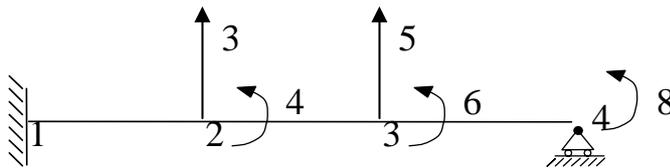


Figura 8.36

Sin embargo la información que se pide es exclusivamente el movimiento de los nodos 2 y 3 con lo cual el giro del nodo 4 sería una información no necesaria.

La matriz de rigidez de una barra es (en este caso en que no se consideran las deformaciones por axil) de orden 4

$$[K] = EI/L^3 \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{pmatrix}$$

y los vectores de carga y de movimientos

$$\begin{Bmatrix} S_{y1} \\ S_{\theta 1} \\ S_{y2} \\ S_{\theta 2} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

El proceso de ensamblaje de la matriz se esquematiza a continuación

$$\begin{pmatrix} (k_{11})^{12} & (k_{12})^{12} & 0 & 0 \\ & (k_{22})^{12} & (k_{12})^{23} & 0 \\ & + (k_{11})^{23} & & \\ & & (k_{22})^{23} & (k_{12})^{34} \\ & & + (k_{11})^{34} & \\ & & & (k_{22})^{34} \end{pmatrix}$$

Con lo cual la matriz de rigidez ensamblada (orden 8) es,

$$[K]=6EI/L^3 \begin{pmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2L^2 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 10 & -L & & -4 & 2L & 0 & 0 \\ & & & 10L^3/3 & -2L & 2L^2/3 & 0 & 0 \\ & & & & 6 & -L & -2 & L \\ & & & & & 2L^2 & -L & L^3/3 \\ & & & & & & 2 & -L \\ & & & & & & & 2L^2/3 \end{pmatrix}$$

Eliminando las filas y columnas correspondientes a los g.d.l. coaccionados (1,2 y 7) resulta

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = 6EI/L^3 \begin{pmatrix} 10 & -L & -4 & 2L & 0 \\ & 10L^3/3 & -2L & 2L^2/3 & 0 \\ & & 6 & -L & L \\ & & & 2L^2 & L^3/3 \\ & & & & 2L^2/3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

Para obtener los movimientos verticales en los puntos 2 y 3 se **condensan** los g.d.l. 4, 6 y 8 reduciéndose el sistema anterior a los g.d.l. 3 y 5.

Reordenando el sistema:

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = 6EI/L^3 \begin{pmatrix} 10L^2/3 & 2L^2/3 & 0 & -L & -2L \\ & 2L^2 & L^2/3 & 2L & -L \\ & & 2L^2/3 & 0 & L \\ \hline & & & 10 & -4 \\ & & & & 6 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

Utilizando la expresión

$$[K^*_{pp}] = [K_{pp}] - [K_{pc}][K_{cc}]^{-1}[K_{cp}]$$

la matriz K^*_{pp} resulta

$$[K^*_{pp}] = EI/L^3 \begin{pmatrix} 41.12 & -19.06 \\ -19.06 & 15.53 \end{pmatrix}$$

y, en consecuencia, el vector de desplazamientos (incógnitas) puede obtenerse como

$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = [K^*_{pp}]^{-1} \{f^*_p\} = -L^3/EI \begin{pmatrix} 0.00564 & 0.0692 & 2P \\ 0.0692 & 0.1494 & P \end{pmatrix} = -PL^3/EI \begin{Bmatrix} 0.18 \\ 0.29 \end{Bmatrix}$$

Deshaciendo la expansión se obtienen los movimientos según el resto de g.d.l.

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = PL^2/EI \begin{Bmatrix} -0.2371 \\ 0.0493 \\ 0.4070 \end{Bmatrix}$$

8.3.14 Subestructuración

Definición.- Se califica de *subestructura* a aquella estructura que, a su vez, forma parte de una estructura mayor.

Definición.- *Subestructuración* es la técnica que habitualmente se utiliza en el análisis de estructuras que, bien por su gran tamaño o bien por sus características y/o disposiciones especiales no pueden ser resueltas en forma directa.

Considérese la estructura esquemática de la figura 8.37 constituida por dos partes S_1 y S_2 (subestructuras) que tienen en común un conjunto C_i de nodos.

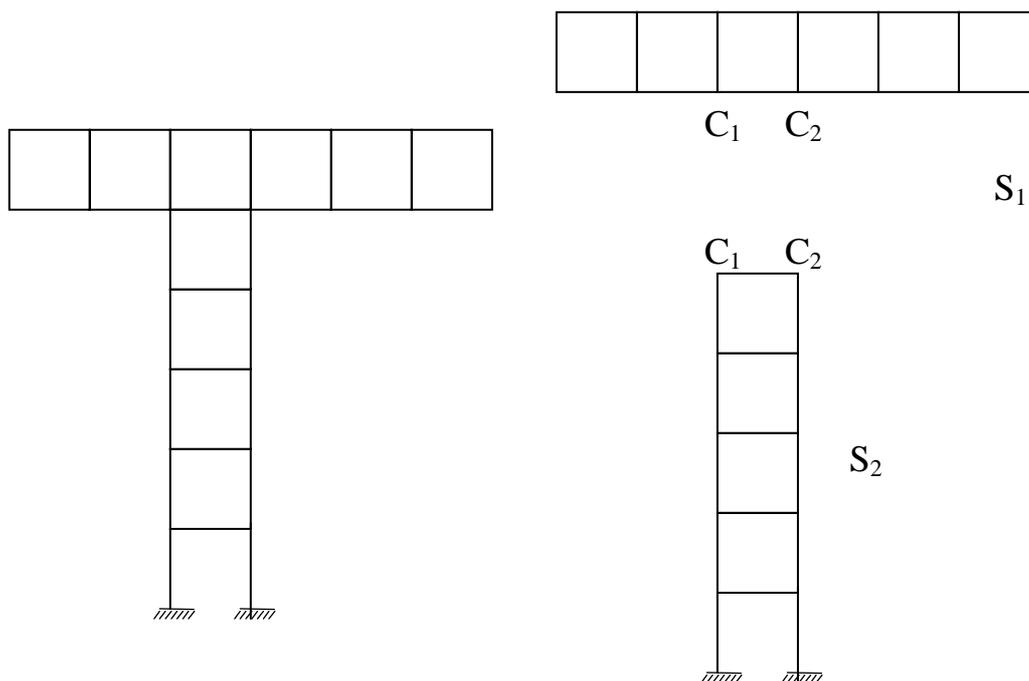


Figura 8.37

Ambas partes pueden ser consideradas separadamente si en los puntos de conexión se sitúan, en cada una de ellas, unas fuerzas equivalentes a las acciones ejercidas por la otra.

Las ecuaciones de comportamiento de ambas subestructuras son:

$$\begin{Bmatrix} f_e \\ f_c \end{Bmatrix}^{S1} = \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ec} \\ K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_e \\ d_c \end{Bmatrix}^{S1}$$

$$\begin{Bmatrix} f_e \\ f_c \end{Bmatrix}^{S2} = \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ec} \\ K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_e \\ d_c \end{Bmatrix}^{S2}$$

Ambos sistemas de ecuaciones se han reordenado para dejar matricialmente agrupadas las ecuaciones e incógnitas relativas a los g.d.l. de los nodos exclusivos de cada subestructura (subíndice **e**) y las relativas a los g.d.l. de los nodos compartidos (subíndice **c**).

Las condiciones de compatibilidad entre ambos subsistemas son:

- igualdad (acción-reacción) de las fuerzas actuantes sobre ambas subestructuras
- igualdad de los desplazamientos en los g.d.l. de los nodos compartidos,

$$\begin{aligned} f_c^{S1} &= -f_c^{S2} \\ d_c^{S1} &= -d_c^{S2} \end{aligned}$$

El subsistema que incluye las ecuaciones de comportamiento de cada una de las subestructuras se condensa en los g.d.l. correspondientes a los nodos exclusivos de la subestructura obteniéndose un sistema condensado

$$\{f_c^*\}^i = [K_{cc}^*]^i \{d_c\}^i$$

donde

$$\{f_c^*\}^i = \{f_c\}^i - [K_{cb}]^i ([K_{bb}]^i)^{-1} \{f_b\}^i = \{f_c\}^i - \{f_c^e\}^i$$

$$[K_{cc}^*]^i = [K_{cc}]^i - [K_{cb}]^i ([K_{bb}]^i)^{-1} [K_{bc}]^i$$

El vector de cargas del sistema condensado $\{f_c^*\}^i$ está compuesto de dos sumandos:

- $\{f_c\}^i$ que representa el vector de cargas externas (fuerzas y momentos) directamente aplicadas sobre los nodos de tipo c
- $\{f_c^e\}^i$ que se interpreta del siguiente modo:
 - $([K_{bb}]^i)^{-1}\{f_b\}^i$ que es el vector de movimientos de todos los nudos de la subestructura considerando que los nudos c están empotrados y que sobre la subestructura actúa el vector de cargas $\{f_b\}^i$
 - $[K_{cb}]^i ([K_{bb}]^i)^{-1}\{f_b\}^i$ vector de cargas (reacciones) que aparecerían en los nudos de tipo c en la hipótesis anterior.

Si existiesen cargas exteriores actuando en los nudos de la interfase, sólo se deberán tener en cuenta una vez en una cualquiera de las subestructuras involucradas en la interfase.

En el caso del ejemplo anterior los vectores de cargas de ambos sistemas condensados son:

$$\{f_c^*\}^{S1} = \{f_c\}^{S1} - \{f_c^e\}^{S1} = [K_{cc}^*]^{S1} \{d_c\}^{S1}$$

$$\{f_c^*\}^{S2} = \{f_c\}^{S2} - \{f_c^e\}^{S2} = [K_{cc}^*]^{S2} \{d_c\}^{S2}$$

Ensamblando convenientemente los vectores de carga y las matrices de rigidez de ambas subestructuras se obtiene el sistema final

$$\{f_c^*\} = [K_{cc}^*] \{d_c\}$$

Una vez tenidas en cuenta las condiciones de apoyo de la estructura, se resuelve el sistema obteniendo con ello los movimientos en los g.d.l. de los nodos de conexión.

Utilizando las ecuaciones matriciales de la expansión en cada subestructura se obtienen los movimientos en los nodos exclusivos de cada subestructura.

$$\{d_b\}^{S1} = -[K_{bb}]^{-1 S1} [K_{bc}]^{S1} \{d_c\}^{S1} + [K_{bb}]^{-1 S1} \{f_b\}^{S1}$$

$$\{d_b\}^{S2} = -[K_{bb}]^{-1 S2} [K_{bc}]^{S2} \{d_c\}^{S2} + [K_{bb}]^{-1 S2} \{f_b\}^{S2}$$

La técnica de subestructuración se aplica generalmente a aquellas estructuras que por

- su gran tamaño (número de nodos que exceden la capacidad de cálculo,...)
 - sus características especiales (desglosables en partes claramente diferenciables,...)
 - su situación en el momento del análisis (una parte en estado avanzado de diseño y otra de la que se conocen solamente sus características globales de rigidez,...)
- así lo aconsejen.

Ha de considerarse que identificar una serie de subestructuras como integrantes de una estructura es un proceso formalmente idéntico a la modelización de la estructura con elementos más simples (barras,...). Cada subestructura puede ser considerada como un superelemento del que se obtiene su matriz de rigidez, matrices que a posteriori son ensambladas para obtenerse la matriz de rigidez de la estructura.

EJEMPLO.- Obténgase los desplazamientos horizontales de los nodos de la estructura articulada de la figura 8.38.

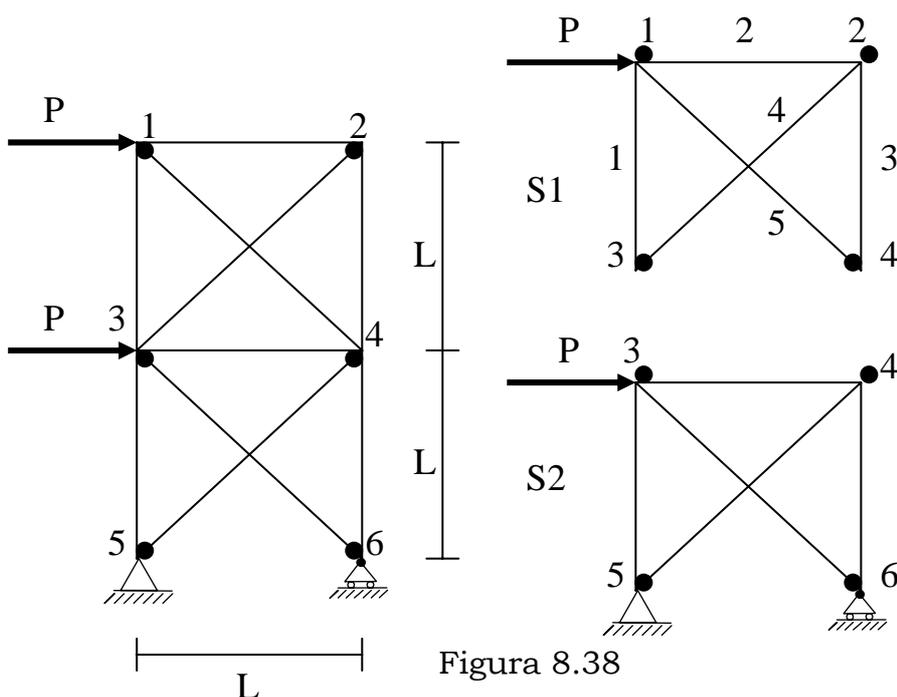


Figura 8.38

Las cajas de la matriz de rigidez de una barra biarticulada son:

$$[K_{11}] = [K_{22}] = EA/L \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$[K_{12}] = [K_{21}] = -EA/L \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \end{bmatrix}$$

con lo cual, en este caso, la matriz de rigidez de la subestructura S1 es

$$EA/(2L) \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y la de la S2 es

$$EA/(2L) \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Los vectores de desplazamientos y fuerzas en nudos en ambas subestructuras son:

$$\{d\}^1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad \{d\}^2 = \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad \{f\}^1 = \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ P_{y4} \end{Bmatrix} \quad \{f\}^2 = \begin{Bmatrix} P_{x5} \\ P_{y5} \\ P_{x6} \\ P_{y6} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ P_{y4} \end{Bmatrix}$$

- Las componentes de los vectores de fuerzas son todas nulas hecha excepción de P_{x1} y P_{x3} que son iguales a P . En cuanto a la

fuerza $P_{x3} = P$ puede incluirse en el vector $\{f\}^1$ o en el $\{f\}^2$ pero no en ambos.

- Los movimientos u_5, v_5, u_6 y v_6 son nulos; esta circunstancia debe ser tomada en cuenta en el proceso de condensación.

En la subestructura S1:

$$[K^*_{cc}]^{S1} = EA/(7L) \begin{pmatrix} u3 & v3 & u4 & v4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{f^*_c\}^1 = P/7 \begin{Bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \\ -7 \end{Bmatrix}$$

En la subestructura S2:

$$[K^*_{cc}]^{S2} = EA/(2L) \begin{pmatrix} u3 & v3 & u4 & v4 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \{f^*_c\}^2 = P \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y para la estructura completa

$$[K^*_{cc}] = EA/(14L) \begin{pmatrix} 23 & -7 & -16 & 0 \\ -7 & 21 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 23 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix} \{f^*_c\}^1 = P/7 \begin{Bmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \\ -7 \end{Bmatrix}$$

Invirtiendo se obtiene:

$$[K^*_{cc}]^{-1} = L/(EA) \begin{pmatrix} 1.69 & 0.56 & 1.31 & -0.44 \\ 0.56 & 0.85 & 0.44 & -0.15 \\ 1.31 & 0.44 & 1.69 & -0.56 \\ -0.44 & -0.15 & -0.56 & 0.85 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\{d_c\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = PL/EA \begin{Bmatrix} 4.16 \\ 2.06 \\ 3.84 \\ -1.95 \end{Bmatrix}$$

$$\{d_b\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = PL/EA \begin{Bmatrix} 9.69 \\ 2.67 \\ 9.31 \\ -2.33 \end{Bmatrix}$$

8.3.15 Modificación de la rigidez de la estructura.-

Si como resultado del estudio de los resultados del análisis se considerase necesario modificar las características de algún elemento estructural o de los materiales con los que van a ser fabricados o introducir cualquier otra modificación sobre la matriz de rigidez de la estructura, puede simularse esta modificación sin necesidad de repetir el proceso de resolución del sistema de ecuaciones.

El sistema de ecuaciones "modificado" sería

$$\{f\} = ([K] + [K'])\{d\}$$

donde $[K']$ es una matriz que incluye las modificaciones a la matriz $[K]$.

La expresión anterior puede escribirse como

$$\{f\} = [K](I + [K]^{-1}[K'])\{d\}$$

y, por tanto,

$$\{d\} = (I + [K]^{-1}[K'])^{-1} [K]^{-1} \{f\}$$

El factor $[K]^{-1} \{f\}$ coincide con el vector $\{d\}^0$ de movimientos en la estructura antes de la modificación (vector del que se dispone como resultado del previo análisis)

$$\{d\} = (I + [K]^{-1}[K'])^{-1} \{d\}^0$$

Por lo tanto el vector de movimientos del sistema "modificado" puede obtenerse a partir del vector $\{d\}^0$ y de las matrices $[K]$ y $[K']$. Esta última matriz es tratable de forma eficiente pues estará (si las

"modificaciones" no afectan a demasiados nodos) mayoritariamente formada por ceros; así, podrá ser razonablemente ordenada agrupando los g.d.l. afectados.