

3.- CONCEPTOS BÁSICOS

3.1 ESFUERZOS EN BARRAS: CONVENIO DE SIGNOS

Los esfuerzos en los elementos estructurales lineales deberán seguir el convenio de signos que se esquematiza a continuación. Los esfuerzos que en la figura 3.1 actúan sobre la rebanada son, en cada uno de los tres casos (flector, cortante y axil) considerados como positivos.

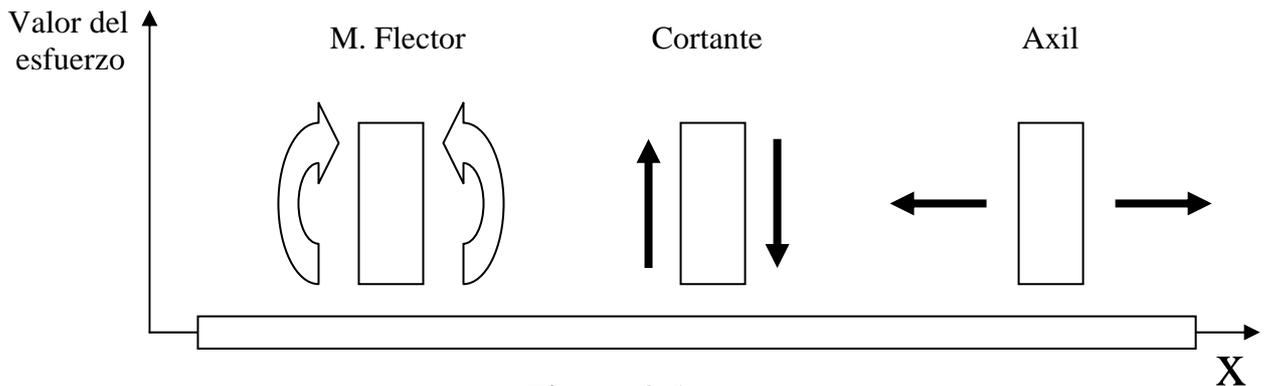


Figura 3.1

3.2 DEFORMACIÓN Y ENERGÍA DE DEFORMACIÓN DE PIEZAS PRISMÁTICAS

Energía de deformación en una rebanada

Una rebanada en una barra o pieza prismática constituyente de una estructura es un segmento de la pieza delimitado por dos secciones (normales a la directriz de la pieza) y separadas una distancia dS . La rebanada es el elemento más pequeño que se identifica en la barra o pieza prismática a efectos de plantear las deformaciones a las que dan lugar los esfuerzos resultantes de la aplicación de un estado de cargas sobre la estructura. Las deformaciones en la barra se obtendrán por suma (integración) de las deformaciones de las rebanadas.

Se recuerdan, a continuación, las deformaciones producidas en una rebanada por los diferentes tipos de esfuerzos que ésta puede sufrir.

a) **Esfuerzo axil.**- Sea una rebanada sometida a un esfuerzo axil como se muestra en la figura 3.2.

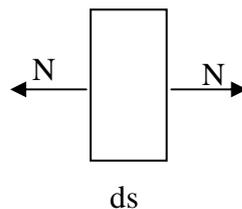


Figura 3.2

La relación entre el alargamiento de la rebanada $\Delta(ds)$ y el axil aplicado \mathbf{N} viene dada por

$$\frac{\Delta(ds)}{ds} = \frac{N}{\Omega} \cdot \frac{1}{E} \Rightarrow \Delta(ds) = \frac{N}{E\Omega} ds$$

siendo Ω el área de la sección, ds su espesor y \mathbf{E} el módulo de elasticidad del material.

Si el esfuerzo axil se aplica incrementando su valor desde 0 hasta N , el trabajo total realizado sobre la rebanada y, por tanto, la energía de deformación que ésta acumula, es:

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2} N \Delta(ds) = \frac{1}{2} \frac{N^2}{E\Omega} ds$$

b) Momento flector.- Sea una rebanada sometida a un momento flector como se muestra en la figura 3.3.

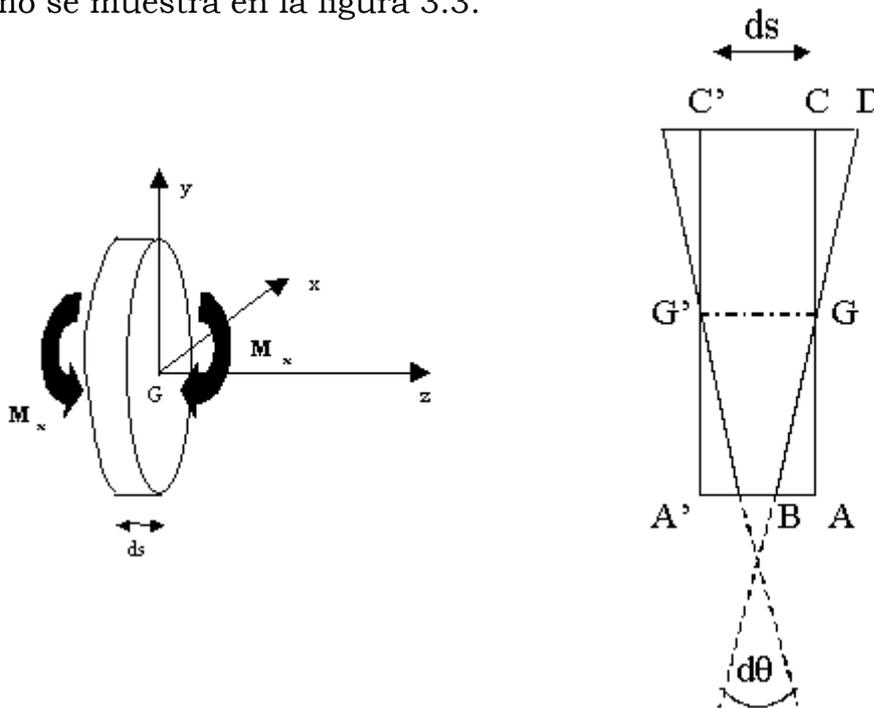


Figura 3.3

La relación entre el giro relativo $d\theta$ entre las dos secciones que delimitan la rebanada y el momento flector aplicado \mathbf{M} viene dada por

$$d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

siendo \mathbf{I} el momento de inercia de la sección, ds su espesor y \mathbf{E} el módulo de elasticidad del material.

Si el momento se aplica incrementando su valor desde 0 hasta M , el trabajo total realizado sobre la rebanada y, por tanto, la energía de deformación que ésta acumula, es:

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2} M d\theta = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} ds$$

c) Esfuerzo cortante.- Sea una rebanada sometida a un esfuerzo cortante, como se muestra en la figura 3.4.

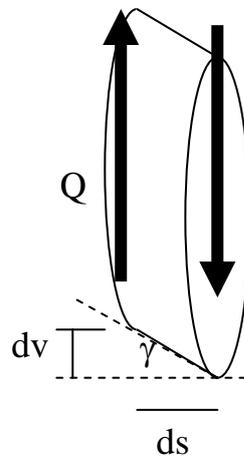


Figura 3.4

La relación entre el desplazamiento relativo dv entre las dos secciones que delimitan la rebanada y el esfuerzo cortante Q aplicado viene dada por

$$dv = \frac{Q}{GA_c} ds$$

siendo A_c el área a cortante de la sección, ds su espesor y G el módulo de cortadura del material.

Si el cortante se aplica incrementando su valor desde 0 hasta Q , el trabajo total realizado sobre la rebanada y, por tanto, la energía de deformación que ésta acumula, es:

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2} Q d\theta = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{GA_c} ds$$

d) Momento torsor.- Sea una rebanada sometida a un momento torsor, tal como se muestra en la figura 3.5.

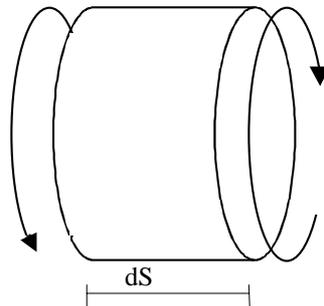


Figura 3.5

La relación entre el giro relativo $d\theta$ (según un eje perpendicular a las secciones) entre las dos caras de la rebanada y el momento torsor M_T aplicado viene dado por:

$$d\theta = \omega ds = \frac{M_T}{GK} ds$$

siendo ω el giro relativo por unidad de longitud de rebanada, G el módulo de cortadura del material y K el módulo de torsión.

Si el momento se aplica incrementando su valor desde 0 hasta M_T , el trabajo total realizado sobre la rebanada, que queda almacenado como energía de deformación en la misma, es:

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2} \frac{M_T^2}{GK} ds$$

Energía de deformación en una pieza prismática

La energía de deformación acumulada por una pieza prismática (barra) de extremos las secciones A y B es la suma (integral) de las energías de deformación acumuladas por todas las rebanadas de la barra comprendidas entre ambas secciones.

$$U = \int_A^B \left[\frac{1}{2} N^2 \frac{ds}{E\Omega} + \frac{1}{2} M^2 \frac{ds}{EI} + \frac{1}{2} Q^2 \frac{ds}{GA_c} + \frac{1}{2} M_T^2 \frac{ds}{GK} \right]$$

Energía de deformación en un conjunto de piezas prismática

La energía de deformación acumulada por un conjunto de barras prismáticas (estructura) es la suma de las energías de deformación de todas y cada una de las barras:

$$U = \sum \int_A^B \left[\frac{1}{2} N^2 \frac{ds}{E\Omega} + \frac{1}{2} M^2 \frac{ds}{EI} + \frac{1}{2} Q^2 \frac{ds}{GA_c} + \frac{1}{2} M_r^2 \frac{ds}{GK} \right]$$

3.3 TEOREMAS ENERGÉTICOS (RECORDATORIO)

3.3.1 Principio de los trabajos virtuales (Jean Bernoulli s. XVIII)

3.3.1.1 Trabajo de las acciones externas.

Trabajo de una fuerza.- Considérese una fuerza \mathbf{F} cuyo punto de aplicación es el punto A (figura 3.6). Si el punto de aplicación A de la fuerza F se desplaza hasta A' , el trabajo realizado por la fuerza viene dado por la expresión

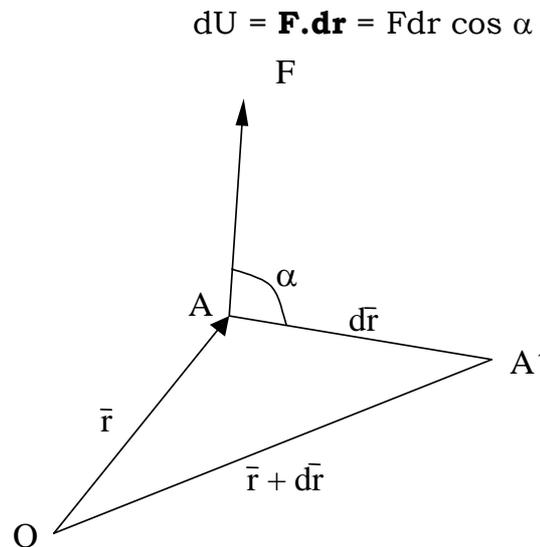


Figura 3.6

Una fuerza puede no realizar trabajo si su línea de acción es ortogonal al desplazamiento del punto sobre el que actúa ($\cos \alpha = 0$)

Supóngase ahora que el punto de aplicación de la fuerza F sigue una trayectoria definida por una curva C (figura 3.7).

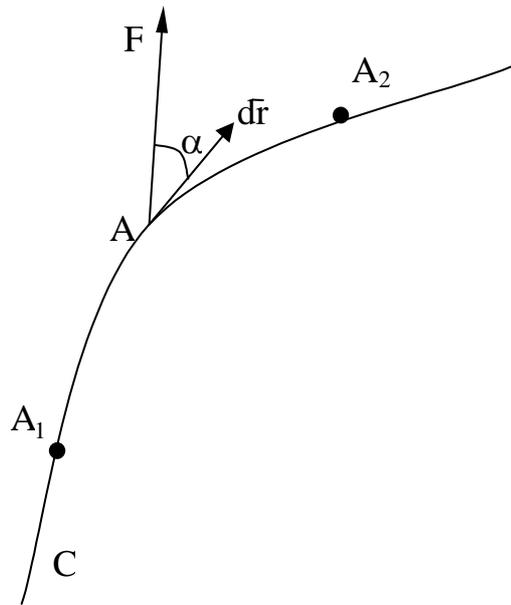


Figura 3.7

Aproximando el movimiento de A a lo largo de C como una sucesión de incrementos diferenciales rectilíneos, y dado que el trabajo realizado en cada desplazamiento diferencial es

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dr \cos \alpha$$

integrando a lo largo de la línea C desde A1 hasta A2, se obtiene el trabajo total realizado por la fuerza como

$$U_{A_1-A_2} = \int_{A_1}^{A_2} \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \int_{S_1}^{S_2} F \cos \alpha ds$$

Trabajo de un par (momento).- Supóngase un momento **M** actuando sobre un sólido y produciendo en éste un giro $d\theta$ como se indica en la figura 3.8.

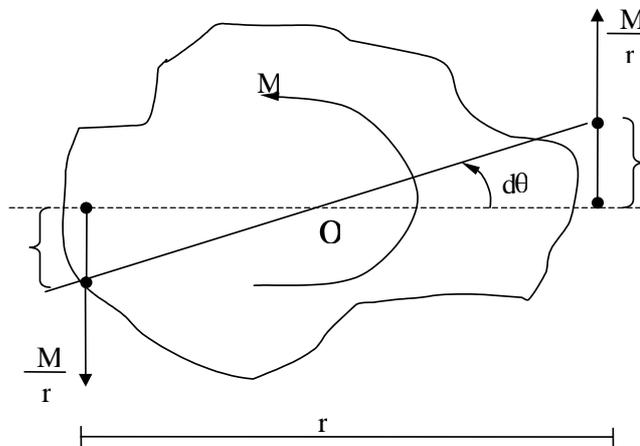


Figura 3.8

Desglosado el momento M en un par de fuerzas M/r y $-M/r$, el trabajo realizado resulta

$$dU = \frac{M}{r} r d\theta + \frac{M}{r} r d\theta = Md\theta$$

Supóngase ahora que, bajo la acción de un momento \mathbf{M} , el sólido gira (figura 3.9) desde una posición inicial definida por un ángulo θ_1 hasta una posición final definida por un ángulo θ_2 .

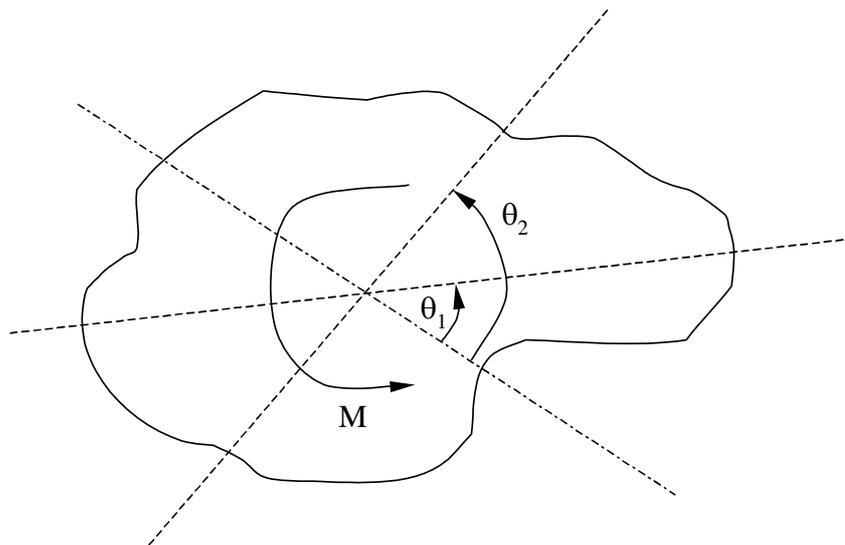


Figura 3.9

Aproximando el movimiento del sólido como una sucesión de giros incrementales, el trabajo realizado en cada giro diferencial es:

$$dU = Md\theta$$

de donde, integrando, se obtiene:

$$U_{\theta_1-\theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta$$

3.3.1.2 Principio de los trabajos virtuales para sólidos rígidos.-

Sea una partícula sobre la que actúan varias fuerzas que mantienen a la partícula en equilibrio; supóngase que la partícula, inicialmente en la posición A, realiza un desplazamiento pequeño (imaginario, virtual) hasta el punto A' (figura 3.10).

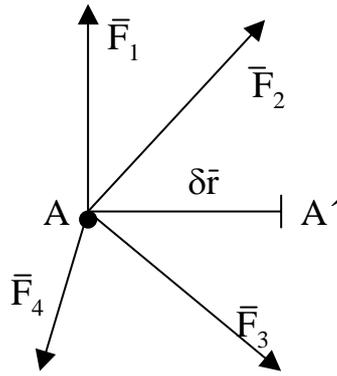


Figura 3.10

El trabajo del sistema de fuerzas sería:

$$\delta U = F_1 \delta \mathbf{r} + F_2 \delta \mathbf{r} + F_3 \delta \mathbf{r} + F_4 \delta \mathbf{r} = (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \delta \mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}$$

Si la partícula está en equilibrio ($\mathbf{R} = 0$) con lo cual $\delta U = 0$

“Si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas que actúan sobre ella es cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula”

Considérese el sólido deformable de la figura 3.11 que está en equilibrio bajo la acción de fuerzas por unidad de volumen \vec{f}_V y fuerzas en el contorno \vec{f}_Ω .

Supóngase que se somete al sólido a un movimiento virtual compatible con la condición de continuidad de la materia y con los vínculos del sólido.

Las fuerzas internas (acción y reacción) en el sólido (rígido) realizan trabajos iguales en valor absoluto pero de distinto signo con lo cual el trabajo de estas fuerzas es nulo.

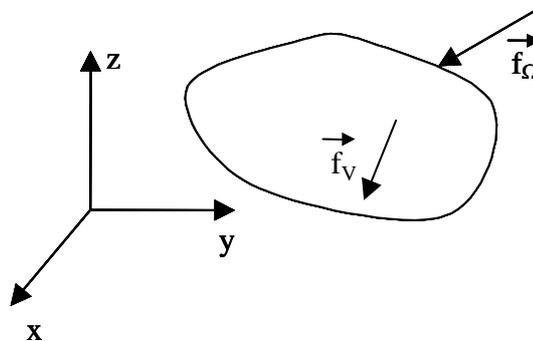


Figura 3.11

“Si un sólido rígido está en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas, el trabajo virtual total de las fuerzas externas que actúan sobre él es cero para cualquier desplazamiento virtual del sólido”

El principio de los trabajos virtuales es también aplicable a un sistema de sólidos rígidos unidos, si el sistema permanece unido durante el desplazamiento virtual, pues el trabajo de las fuerzas internas es cero.

3.3.1.3 Trabajo de las fuerzas internas.

3.3.1.4 Principio de los trabajos virtuales para sólidos deformables.-

Considérese el sólido deformable de la figura 3.12 que está en equilibrio bajo la acción de fuerzas por unidad de volumen \vec{f}_V y fuerzas en el contorno \vec{f}_Ω y del que se conocen los tensores de tensión $[\mathbf{T}]$, de deformación $[\mathbf{D}]$, así como el campo de desplazamientos \vec{u} .

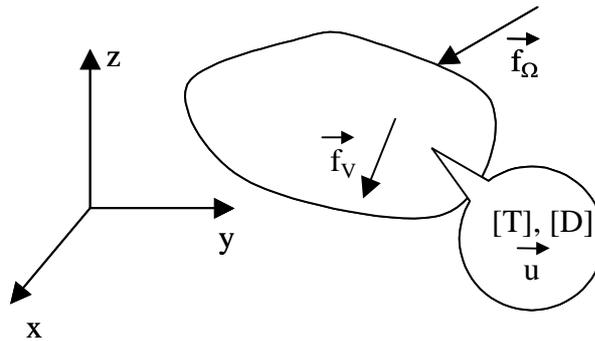


Figura.3.12

Supóngase que se somete el sólido a unos desplazamientos virtuales δ de sus puntos, compatibles con la condición de continuidad de la materia y con los vínculos del sólido. Estos desplazamientos virtuales dan lugar a un campo de deformaciones (virtual) ε^δ .

Puede demostrarse la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \vec{f}_V \cdot \vec{\delta} dVol + \iint_\Omega \vec{f}_\Omega \cdot \vec{\delta} dVol = \\ & = \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \tau_{xy} \gamma_{xy}^\delta + \tau_{xz} \gamma_{xz}^\delta + \tau_{yz} \gamma_{yz}^\delta) dVol \end{aligned}$$

El primer miembro de la igualdad es el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas al sólido (por unidad de volumen y en el contorno) y el segundo miembro representa el trabajo de las fuerzas internas que se acumularía en el sólido caso de que sufriera el campo de desplazamientos virtuales (las componentes de tensión son las que,

realmente, existen dentro del sólido, mientras que las componentes de deformación que aparecen se deducen del campo de desplazamientos virtuales).

3.2.2 Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti

Sea el caso, por ejemplo, de una ménsula sometida a dos estados de carga diferentes: uno, el constituido por una carga F_1 aplicada en la sección A y otro, el que corresponde a una carga F_2 aplicada en la sección media C de la ménsula, (figura 3.13).

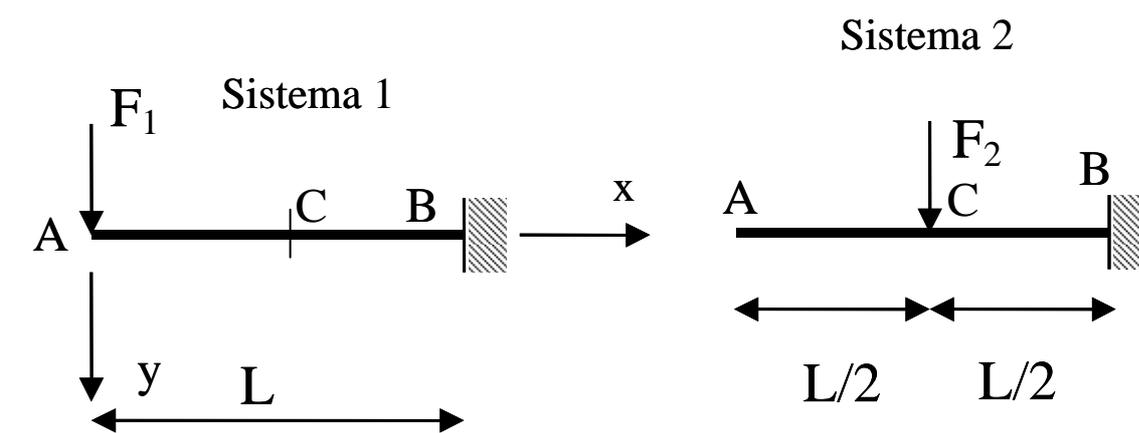


Figura 3.13

El teorema de reciprocidad permite relacionar ambos estados de carga.

“En un sólido elástico el trabajo realizado por un sistema de cargas \mathbf{F} al aplicar otro sistema de cargas \mathbf{G} , es idéntico al trabajo realizado por el sistema de cargas \mathbf{G} al aplicar el sistema de cargas \mathbf{F} ”

En el caso de la figura 3.13, lo anterior conduce a que:

$$F_1 \cdot f_A^{\text{sistema 2}} = F_2 \cdot f_C^{\text{sistema 1}}$$

en donde $f_A^{\text{sistema 2}}$ es el desplazamiento vertical (flecha) de la sección A cuando actúa sobre la ménsula sólo y exclusivamente el sistema de cargas 2 y $f_C^{\text{sistema 1}}$ la flecha de la sección C cuando solamente actúa el sistema de cargas 1.

Este teorema se puede aplicar al caso de una misma estructura sometida a dos estados de carga diferentes (estados 1 y 2). Si existieran momentos exteriores actuando sobre la estructura, sustituiríamos fuerzas por momentos y flechas por giros.

3.2.3 Teorema de Castigliano (1847-1884)

“En una estructura sometida a un sistema de cargas (fuerzas y momentos), la derivada de la energía elástica respecto a una de las acciones (fuerzas o momentos) es igual al valor del movimiento (desplazamiento o giro) en la sección de aplicación de la acción y según la dirección de la misma”.

EJEMPLO 1.- Considérese la ménsula de longitud L de la figura 3.14 que tiene una carga P aplicada en el extremo libre

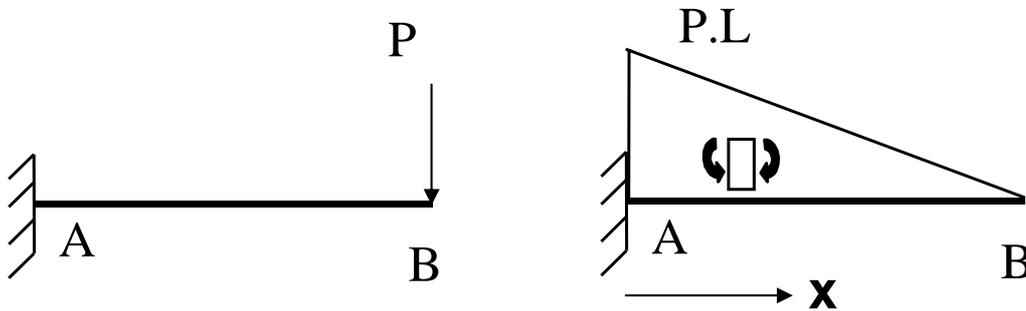


Figura 3.14

La ley de momentos flectores obedece a la expresión

$$M = P(L - x)$$

Si no se considera la contribución del cortante, la energía elástica almacenada es:

$$\begin{aligned} U &= \int_A^B \frac{1}{2} M^2 \frac{dx}{EI} = \\ &= \frac{P^2}{2EI} \int_{x=0}^{x=L} (L - x)^2 dx = \frac{P^2}{2EI} \left[-\frac{(L - x)^3}{3} \right]_0^L = \frac{P^2 L^3}{6EI} \end{aligned}$$

Derivando la expresión de la energía elástica se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI}$$

EJEMPLO 2.-Considérese la barra biapoyada de la figura 3.15 que tiene un momento M aplicado en un extremo

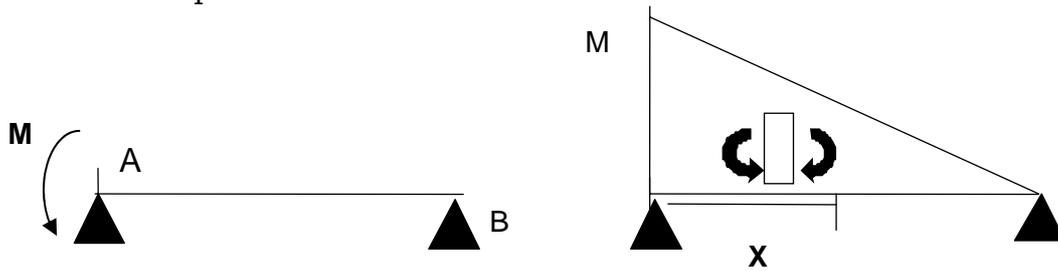


Figura 3.15

La expresión de la energía elástica, en este caso, es:

$$U = \int_A^B \frac{1}{2} M^2 \frac{dx}{EI} = \frac{M^2}{2L^2 EI} \int_{x=0}^{x=L} (L-x)^2 dx = \frac{M^2 L}{6EI}$$

Derivando la expresión de la energía elástica se obtiene:

$$T.Castigliano : \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{ML}{3EI} = \theta_A$$

Variante “práctica” del Teorema de Castigliano.-

Considérese el caso de la ménsula de longitud L con una carga P aplicada en su extremo libre que se muestra en la figura 3.16. ¿Cómo calcular el desplazamiento δ en punto C diferente al de aplicación de la carga?

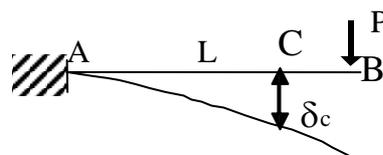


Figura 3.16

ALTERNATIVA 1.-

Una primera posibilidad es suponer aplicada también en C una carga auxiliar F (figura 3.17), obtener la expresión de la energía elástica $u=u(P,F)$ (que dependerá de P y de F), derivar esta expresión respecto a F y finalmente hacer $F=0$. Este procedimiento puede resultar largo desde el punto de vista operativo.



Figura 3.17

ALTERNATIVA 2.-

La energía elástica obedece a la expresión

$$U = \int_A^B \left[\frac{1}{2} N^2 \frac{ds}{E\Omega} + \frac{1}{2} M^2 \frac{ds}{EI} + \frac{1}{2} Q^2 \frac{ds}{GA_c} + \frac{1}{2} M_T^2 \frac{ds}{GK} \right]$$

y su derivada

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_A^B \left[N \frac{\partial N}{\partial F} \frac{ds}{E\Omega} + M \frac{\partial M}{\partial F} \frac{ds}{EI} + Q \frac{\partial Q}{\partial F} \frac{ds}{GA_c} + M_T \frac{\partial M_T}{\partial F} \frac{ds}{GK} \right]$$

Las derivadas de N, M y M_T respecto a F que aparecen en la expresión anterior pueden interpretarse como las variaciones del axil, del flector y del torsor en el estado real al variar la carga aplicada F en una unidad. A partir de esta interpretación, la expresión anterior puede escribirse como

$$\delta = \int_A^B \left[N^0 N^I \frac{ds}{E\Omega} + M^0 M^I \frac{ds}{EI} + Q^0 Q^I \frac{ds}{GA_c} + M_T^0 M_T^I \frac{ds}{GK} \right]$$

siendo:

N⁰, M⁰, Q⁰ y M_T⁰ el axil, el flector, el cortante y el torsor en el estado real, y

N^I, M^I, Q^I y M_T^I el axil, el flector, el cortante y el torsor en un estado ficticio sin carga exterior alguna excepto una carga unidad (fuerza si se quiere calcular desplazamientos o momento si lo que se quiere es giro) en la dirección del movimiento que se desea calcular.

EJEMPLO.- Considérese el caso de la ménsula de longitud L con una carga P aplicada en su extremo libre que se muestra en la figura 3.18, y supongamos que deseamos determinar el giro que experimenta la sección B.

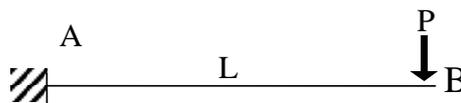


Figura 3.18

La ley de Momentos flectores del estado 0, ó estado real, se muestra en la figura 3.19

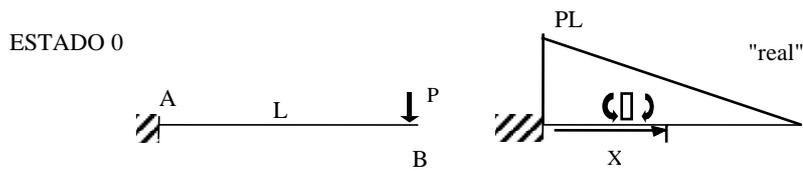


Figura 3.19

La ley de Momentos flectores del estado 1, ó estado ficticio o auxiliar se muestra en la figura 3.20

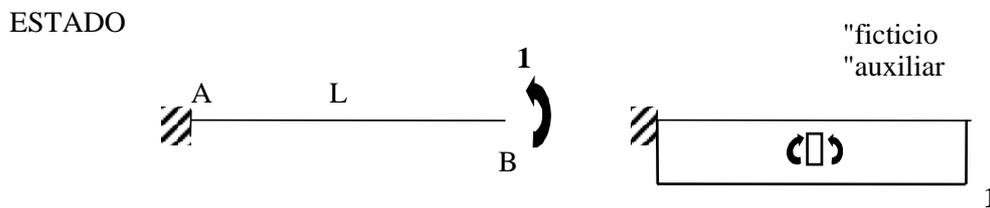


Figura 3.20

Aplicando la expresión anterior, el giro en el nudo B se obtiene como:

$$\theta_B = \int_A^B \frac{1}{EI} [-P(L-x)] dx = -\frac{P}{EI} \left[-\frac{(L-x)^2}{2} \right]_0^L = -\frac{PL^2}{2EI}$$

En este caso,

$(M_f)_{\text{aux}}$ es la tasa de variación del M_f con respecto a un momento $M = 1$ aplicado en B

$(M_f)_{\text{real}}$ es $-P(L-x)$

2.4 MOVIMIENTOS EN BARRAS PRISMÁTICAS

3.4.1 Fórmulas de Navier-Bresse

Considérese una pieza (barra) prismática alabeada como la de la figura 3.21 y en ella dos puntos A y B.

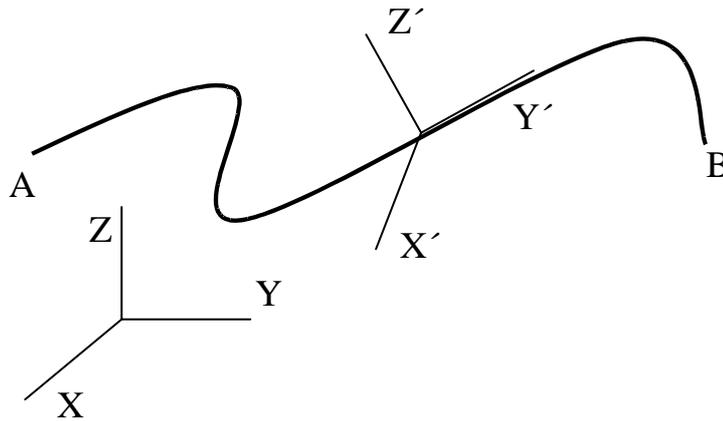


Figura 3.21

Las fórmulas de Navier-Bresse plantean las expresiones de los movimientos (traslaciones y giros) de un punto de la barra (el B) en función de los movimientos del punto A y de los esfuerzos de la barra en el tramo AB.

Primera fórmula.- El movimiento de traslación del punto B según el eje x (por ejemplo)

- son los del punto A

$$\vec{U}_B = \vec{U}_A \quad \text{más...}$$

- la contribución del giro de A

$$\vec{U}_B = \vec{U}_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{AB} \quad \text{más...}$$

- la acumulación de movimientos de las rebanadas entre A y B

$$\vec{U}_B = \vec{U}_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{AB} + \int_A^B d\vec{u} \quad \text{más...}$$

- la acumulación de las contribuciones de los giros de las rebanadas entre A y B

$$\vec{U}_B = \vec{U}_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{AB} + \int_A^B d\vec{u} + \int_A^B d\vec{\theta} \wedge \vec{r}$$

Segunda fórmula.- El giro del punto B

- es el del punto A

$$\vec{\theta}_B = \vec{\theta}_A \quad \text{más...}$$

- la acumulación de los giros de las rebanadas entre A y B

$$\vec{\theta}_B = \vec{\theta}_A + \int_A^B d\vec{\theta}$$

3.4.2 Las fórmulas de Navier-Bresse en barras rectas con cargas en un plano

En el caso de que la pieza sea recta con cargas en el plano, las expresiones de los teoremas de Navier-Bresse pasan a ser las siguientes:

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

$$u_B = u_A + \int_A^B \frac{N}{EA} dx$$

$$v_B = v_A - \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \frac{Q}{GA_C} dx - \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx$$

3.4.3 Teoremas de Mohr

Considérese una barra de sección constante que se deforma principalmente bajo la acción de una ley o distribución de momentos flectores (se desprecia el efecto de los esfuerzos cortante y axil) producidos por un cierto estado de cargas como se esquematiza en la figura 3.22.

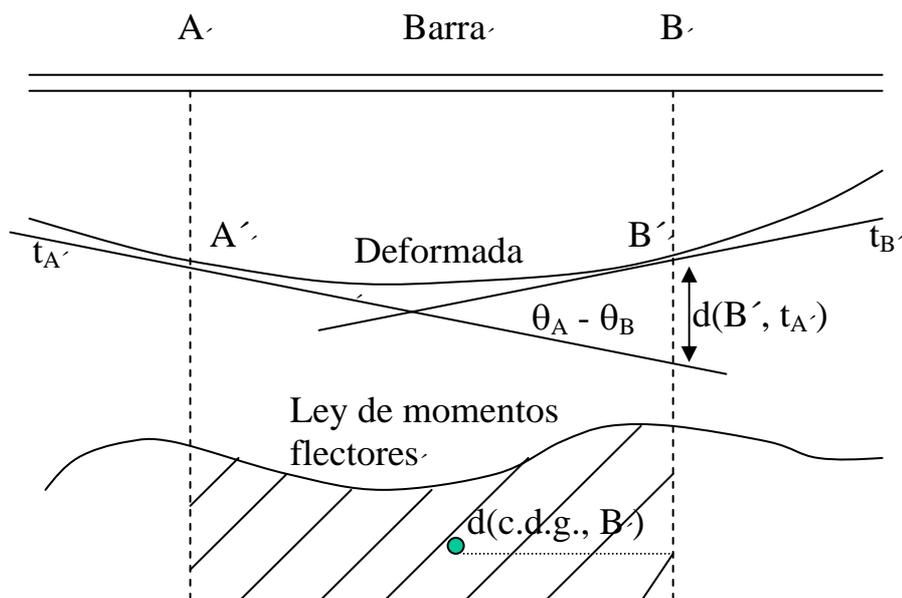


Figura 3.22

Fijados dos puntos A y B de la barra, en la figura 3.22 se identifican los siguientes parámetros y elementos geométricos

- Rectas tangentes a A' y B' en la deformada.
- Distancia desde B' a la recta t_{A'} (tangente a la deformada en A')
- Área M_{fAB} del recinto delimitado por la representación gráfica de la distribución de momentos flectores (diagrama de momentos).
- Centro de gravedad c.d.g. del recinto anterior
- Distancia paralela a la barra desde c.d.g. hasta B'

A partir de estos parámetros se enuncian los teoremas de Mohr que son los siguientes.

Primer Teorema.-

“El giro relativo $\theta_B - \theta_A$ entre dos secciones de la barra es igual al área del diagrama de momentos flectores entre A y B dividida por EI”

$$\theta_B - \theta_A = \frac{1}{EI} (M_f)_{AB}$$

Segundo Teorema.-

“La distancia d desde un punto B' de la directriz deformada a la tangente en otro punto A' es igual al momento estático del área (M_f)_{AB} de momentos flectores entre A y B, respecto al eje perpendicular a la barra que pasa por B, dividido por EI”

$$d = \frac{1}{EI} (M_f)_{AB} d(c.d.g., e_B)$$

En estas expresiones se consideran despreciables los efectos en la deformación de la barra del esfuerzo cortante y del esfuerzo axial; es decir que se considera que la deformada se produce fundamentalmente por efecto del momento flector, lo que es una hipótesis plausible en el caso de las barras.

3.4.4 Generalización de los teoremas de Mohr a piezas rectas con puntos angulosos en su directriz.

Considérese una estructura (barra con dos puntos angulosos) como la de la figura 3.23 sometido a un estado de cargas; en la sección A de la estructura, se quiere obtener el valor del giro absoluto θ_A y del desplazamiento δ_A en la dirección definida por el eje δ .

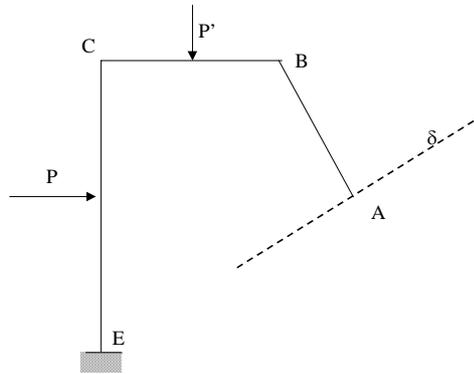


Figura 3.23

Primer teorema generalizado de Mohr.-

Este teorema posibilita el cálculo de los giros de secciones de una estructura con puntos angulosos. Supongamos que la ley de momentos flectores de la pieza es la que se representa en la figura 3.24:

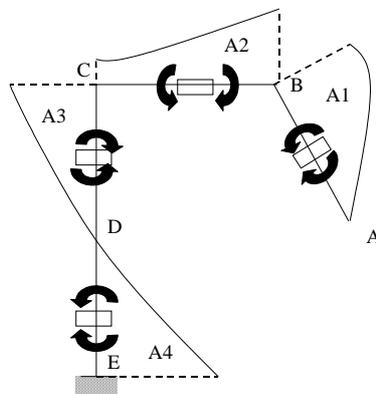


Figura 3.24

Aplicando el primer teorema de Mohr a cada tramo recto de la estructura se obtienen los giros relativos de los nodos extremos del tramo.

Giro relativo entre A y B.

$$\theta_{AB} = A_1 / (EI)_{AB}$$

Giro relativo entre B y C.

$$\widehat{\theta}_{BC} = A_2/(EI)_{BC}$$

Giro relativo entre C y D.

$$\widehat{\theta}_{CD} = A_3/(EI)_{CD}$$

Giro relativo entre D y E.

$$\widehat{\theta}_{DE} = A_4/(EI)_{DE}$$

En las expresiones anteriores, A_i representa el área definida por la ley de momentos flectores en el correspondiente tramo. Dado que el sentido del giro viene dado por el de las flechas curvadas, las expresiones anteriores son todas positivas; en cualquier caso, al giro se suele considerar positivo cuando sigue el sentido contrario de las agujas del reloj.

Dado que el punto E no gira por ser un empotramiento, resulta:

$$\text{Giro absoluto de A} = \text{Giro relativo entre A y E}$$

El giro relativo entre A y E (y, por tanto, el giro absoluto de A) se obtiene como **suma algebraica** de los giros relativos entre B y C, entre C y D y entre D y E. Obsérvese que, los momentos positivos producen giros en el sentido contrario de las agujas del reloj y los negativos en el sentido de las agujas del reloj. Así, la contribución al giro de A de la ley de momentos flectores en el tramo DE tiene signo contrario a la contribución de las leyes de momentos flectores en los otros tramos.

$$\widehat{\theta}_A = A_1/(EI)_{AB} + A_2/(EI)_{BC} + A_3/(EI)_{CD} - A_4/(EI)_{DE}$$

Para aplicar este proceso de cálculo se han de determinar con exactitud los puntos de la estructura en los que cambia el signo del momento flector.

EJEMPLO. En la figura 3.25 se muestra una estructura (semipórtico) de la que se quiere conocer el giro del punto A.

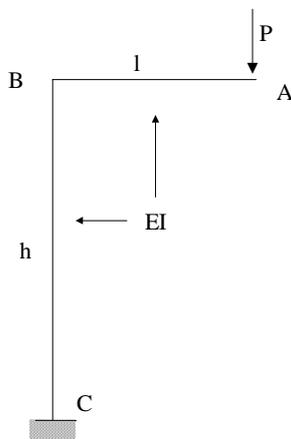


Figura 3.25

La ley de momentos flectores se representa en la figura 3.26

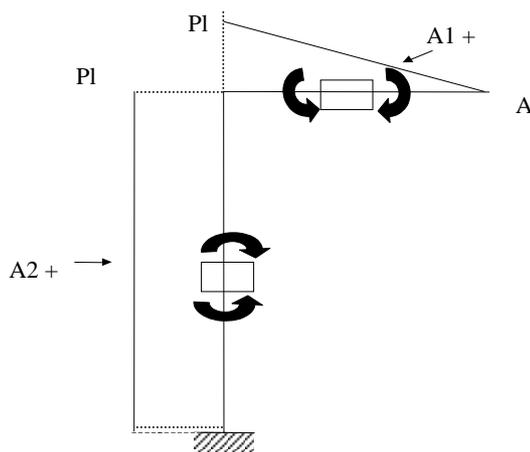


Figura 3.26

Aplicando el Primer Teorema Generalizado de Mohr, el valor del giro θ_A en el punto A resulta

$$\theta_A = \frac{\left(\frac{1}{2}Pl\right)l}{EI} + \frac{(Pl)h}{EI} = \frac{Pl\left(\frac{l}{2} + h\right)}{EI}$$

Segundo teorema generalizado de Mohr.-

Este teorema posibilita el cálculo de desplazamientos según una dirección determinada en estructuras con puntos angulosos. Se han de distinguir dos casos correspondientes a las situaciones de que el eje δ corte a la directriz de la estructura o que no la corte.

Caso 1) El eje δ no corta a la directriz en ningún otro punto

En la figura 3.27 se representa una estructura y la ley de momentos flectores producidos por un cierto sistema de cargas.

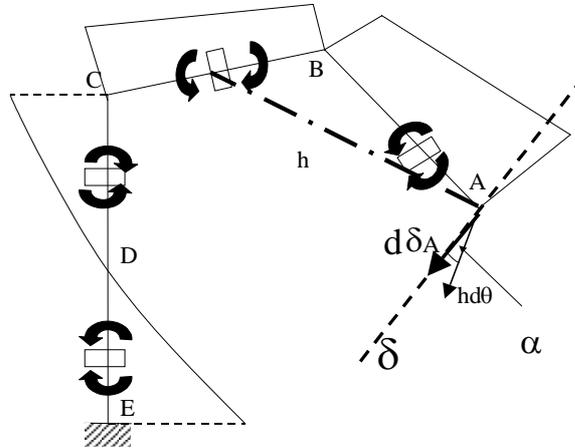


Figura 3.27

Considérese una rebanada del tramo CB; su giro, $d\theta$, “arrastra” al tramo que hay desde la rebanada hasta el punto A dando lugar a un movimiento de este punto en dirección perpendicular al radio vector rebanada-punto A y de valor $h \cdot d\theta$, siendo h la distancia desde la rebanada hasta A. La proyección de este movimiento en dirección del eje δ es:

$$d\delta_A = (h \, d\theta) \cdot \cos\alpha$$

En la expresión anterior, $h \cos \alpha$ representa la distancia, f , de la rebanada considerada a la línea hasta el eje δ (figura 3.28).

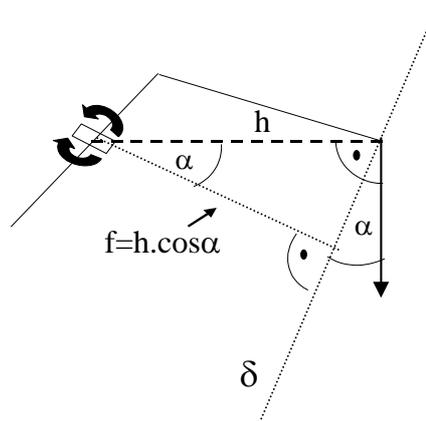


Figura 3.28

El giro de la rebanada $d\theta$ depende del valor del momento flector que actúa sobre ella, de forma tal que

$$d\delta_A = f d\theta = f \frac{M}{EI} ds$$

La contribución al movimiento de A del tramo BC completo es,

$$\delta_A = \int f d\theta = \int f \frac{M}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int f M ds$$

En la integral que aparece en el último miembro de la expresión anterior, el factor $1/EI$ se ha supuesto constante circunstancia que es frecuente en los elementos estructurales tipo barra. Por otro lado, esta tiene una clara interpretación geométrica basada en el concepto de centro de gravedad por lo que puede convertirse en el producto de dos factores: el área **A** de la región delimitada por la ley de momentos flectores y la distancia del punto G' al eje δ siendo G' el punto proyección del centro de gravedad de la región **A** sobre la directriz de la barra (figura 3.29).

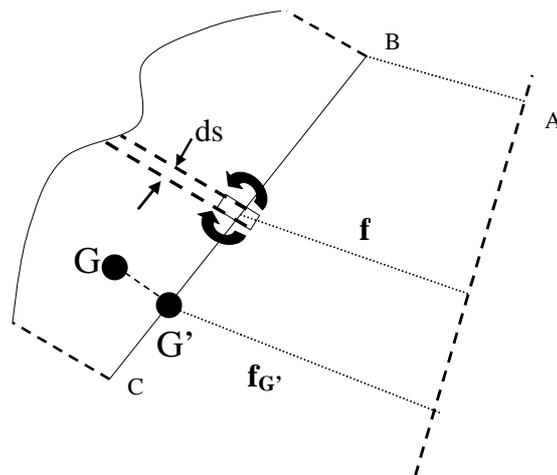


Figura 3.29

EJEMPLO 1.- En la estructura cuya geometría y cargas se incluyen en la figura 3.30, se pide calcular los desplazamiento vertical y horizontal del punto A.

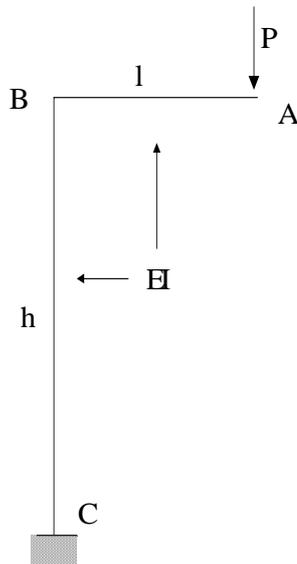


Figura 3.30

La ley de momentos flectores de la estructura se muestra en la figura 3.31

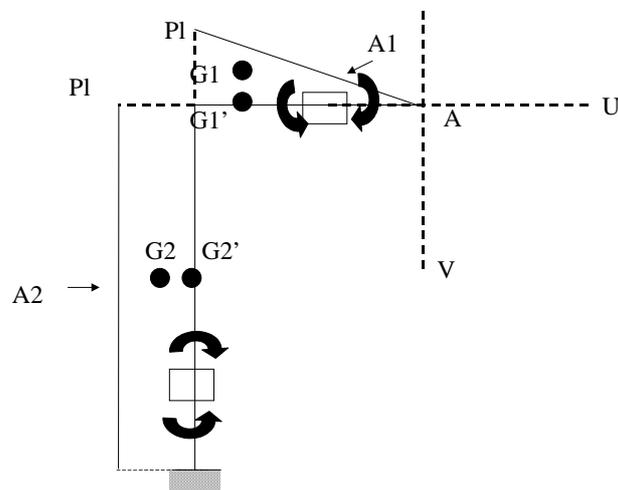


Figura 3.31

El movimiento vertical de A se obtiene como movimiento respecto al eje vertical V

$$V_A = \frac{1}{EI} [A_1 * d(G'_1, V) + A_2 * d(G'_2, V)] = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} PL^2 * \frac{2}{3} L + PL * h * L \right] =$$

$$= \frac{PL^2 \left(\frac{L}{3} + h \right)}{EI}$$

El desplazamiento horizontal se obtiene respecto al eje U

$$U_A = \frac{1}{EI} A_2 * d(G'_2, U) = \frac{1}{EI} PLh^2 \frac{h}{2} = \frac{PLh^3}{2EI}$$

Puede observarse en esta última expresión que la ley de momentos flectores del tramo AB no contribuye al desplazamiento horizontal de este punto.

EJEMPLO 2.- En la estructura cuya geometría y cargas se muestran en la figura 3.32 se pide determinar los desplazamientos horizontal y vertical de los puntos A y C. Considérese en los cálculos $(EI)_{AB} = (EI)_{DE} = 3(EI)_{BD} = 6000 \text{ t.m}^2$

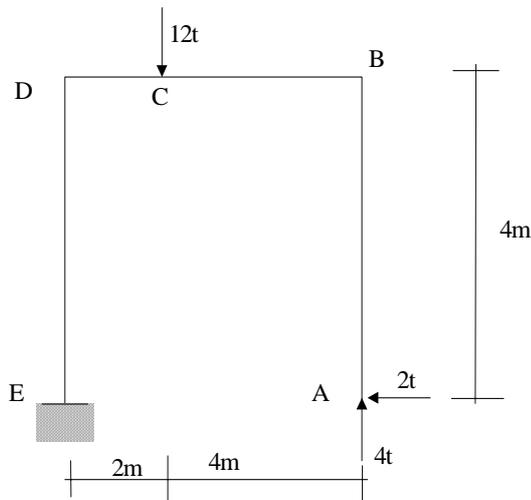


Figura 3.32

La ley de momentos flectores de la estructura se muestra en la figura 3.33 en la que se identifican seis (6) zonas diferentes.

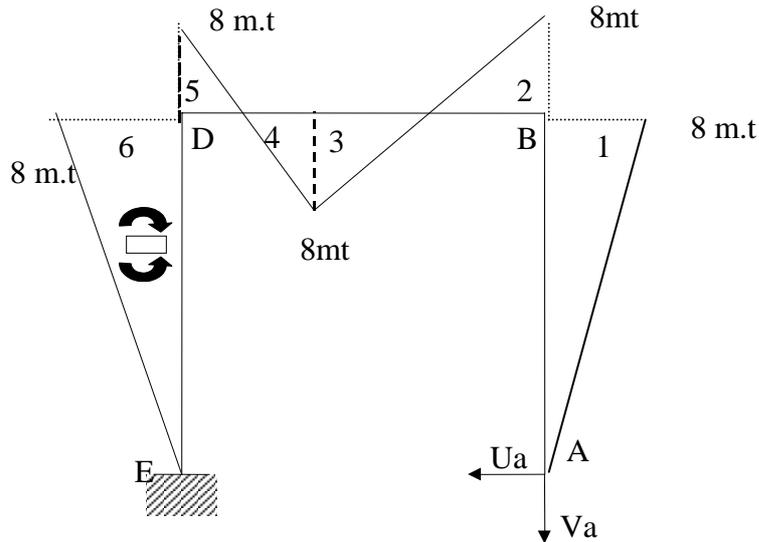


Figura 3.33

En la sección A de la figura 3.33 se identifican con vectores U y V el sentido positivo de los movimientos. Una organización posible para los cálculos (regla de buena práctica) es la que se presenta en la siguiente tabla:

Nº	Area ley M_f	Distancia de G' a una recta en la dirección de U pasando por A	Distancia de G' a una recta en la dirección de V pasando por A
1	$0.5 \cdot 8 \cdot 4 = 16$	$(2/3) \cdot 4 = 8/3$	0
2	$0.5 \cdot 8 \cdot 2 = 8$	4	$1/3 \cdot 2$
3	$0.5 \cdot 8 \cdot 2 = 8$	4	$2 + 2/3 \cdot 2$
4	$0.5 \cdot 8 \cdot 1 = 4$	4	$4 + 1/3 \cdot 1$
5	$0.5 \cdot 8 \cdot 1 = 4$	4	$5 + 2/3 \cdot 1$
6	$0.5 \cdot 8 \cdot 4 = 16$	$(2/3) \cdot 4 = 8/3$	6

$$U_A = (1/6000) \cdot (16 \cdot 8/3) + (1/2000) \cdot (8 \cdot 4) - (1/2000) \cdot (8 \cdot 4) +$$

$$(1/2000) \cdot (4 \cdot 4) + (1/2000) \cdot (4 \cdot 4) + (1/6000) \cdot (16 \cdot 8/3) = + 0.01422\text{m}$$

$$V_A = 0 + (1/2000) \cdot (8 \cdot 2/3) - (1/2000) \cdot (8 \cdot (2 + 4/3))$$

$$- (1/2000) \cdot (4 \cdot (4 + 1/3)) + (1/2000) \cdot (4 \cdot (5 + 2/3)) + (1/6000) \cdot (16 \cdot 6) =$$

$$-0.008\text{m}$$

$$U_C = -(1/6000) \cdot (16 \cdot 4/3) = -0.00355\text{m}$$

$$V_c = - (1/2000)*(4 * 1/3) + (1/2000)*(4*(1 + 2/3)) + (1/6000)*(16 * 2) =$$

$$+ 0.008m$$

Caso 2) El eje δ corta a la directriz en otro punto

Considérese la estructura cuya geometría, sistema de apoyos y ley de momentos flectores (producidos por un cierto sistema de cargas) se representa en la figura 3.34 y en la que se quiere conocer la magnitud del desplazamiento del punto A en la dirección del eje δ representado en línea de trazos.

En la figura se destacan dos rebanadas en la barra CD una a cada lado de la intersección de esta barra con el eje δ . Puede observarse que las contribución al desplazamiento de B, según el eje δ , del giro de ambas rebanadas tienen sentidos opuestos.

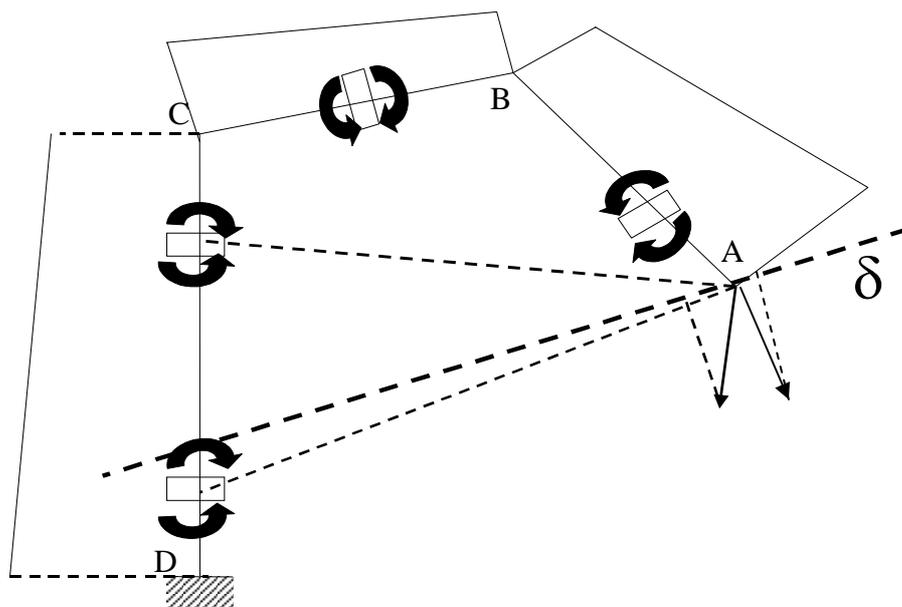


Figura 3.34

Las **rebanadas con momentos del mismo signo producen desplazamientos opuestos si se encuentran a diferentes lados del eje δ** . Es decir que, al definir el signo de la contribución del giro de una rebanada al movimiento de un punto según la dirección definida por un cierto eje δ , intervienen dos circunstancias:

- Signo del momento en la rebanada
- Situación de la rebanada a uno u otro lado del eje δ

Cada una de las dos circunstancias aporta un signo al desplazamiento del punto, debiéndose aplicar la regla de los signos para

obtener el signo final. Puede verse un ejemplo del proceso de establecimiento de signos en la figura 3.35.

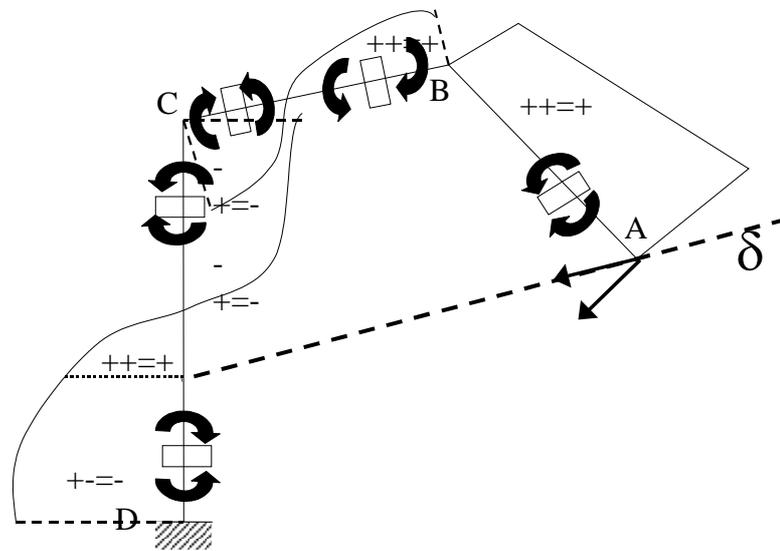


Figura 3.35

EJEMPLO.- En la estructura de la figura 3.36 obtener el desplazamiento horizontal del punto A. Considérese $(EI)_{AB} = (EI)_{BC} = 3(EI)_{CE}$

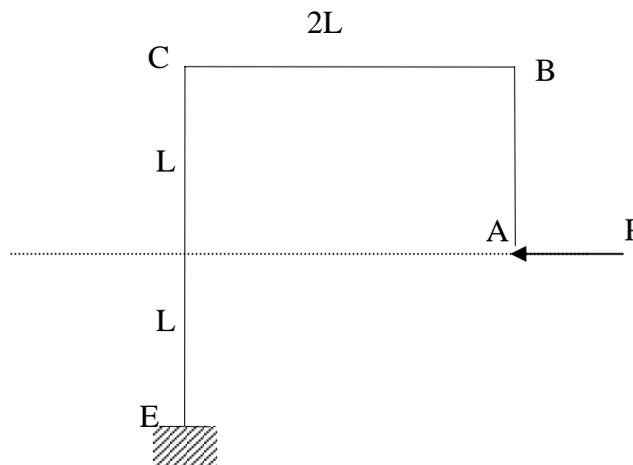


Figura 3.36

La ley de momentos flectores de la estructura producida por la carga P actuando en A se muestra en la figura 3.37. En la misma figura se muestran, también, los signos a utilizar al calcular la contribución del momento flector al desplazamiento horizontal de A en cada una de las regiones o zonas de la ley de momentos flectores.

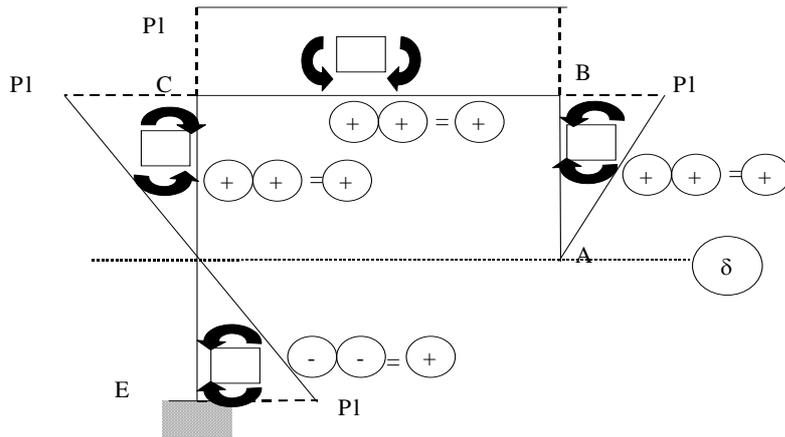


Figura 3.37

Aplicando el segundo teorema generalizado de Mohr se obtiene el desplazamiento horizontal del punto A:

$$\delta_A = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} PL \cdot L \cdot \frac{2}{3} L + PL \cdot 2L \cdot L + \frac{1}{2} PL \cdot L \cdot \frac{2}{3} L + \frac{1}{2} PL \cdot L \cdot \frac{2}{3} L \right] = \frac{3PL^3}{EI}$$

3.4.5 Movimientos en barras de directriz curva

La figura 3.38 representa una barra curva cuya directriz es una circunferencia y sobre la que actúa una carga P; se muestra también una rebanada de la barra localizada en ésta mediante el ángulo θ . Sobre la rebanada aparecen los esfuerzos que se indican:

$$M_f(\theta) = P R \cos \theta$$

$$N(\theta) = P \cos \theta$$

$$Q(\theta) = P \sen \theta$$

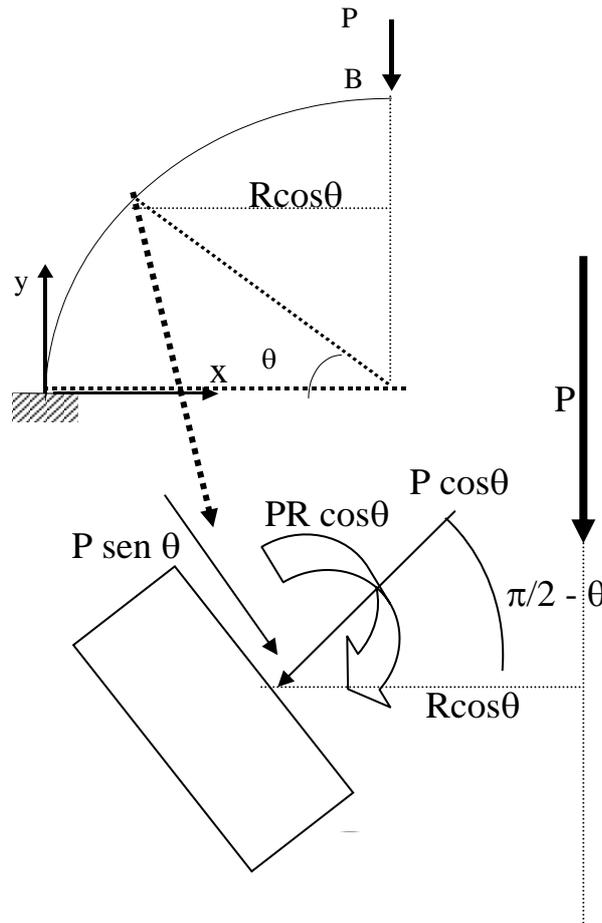


Figura 3.38

Obsérvese que la curvatura de la barra hace que con cargas perpendiculares a la directriz aparezcan también esfuerzos axiales mientras que si la barra fuese de directriz rectilínea, cargas normales a la directriz producirían flectores y cortantes pero no axiales.

Igualmente puede comprobarse que cuando actúan cargas en la dirección de la directriz, aparecen no solamente esfuerzos axiales sino, también, cortantes y flectores.

En la figura 3.39 se incluyen las gráficas de las leyes de esfuerzos del arco anterior sometido a la carga P.

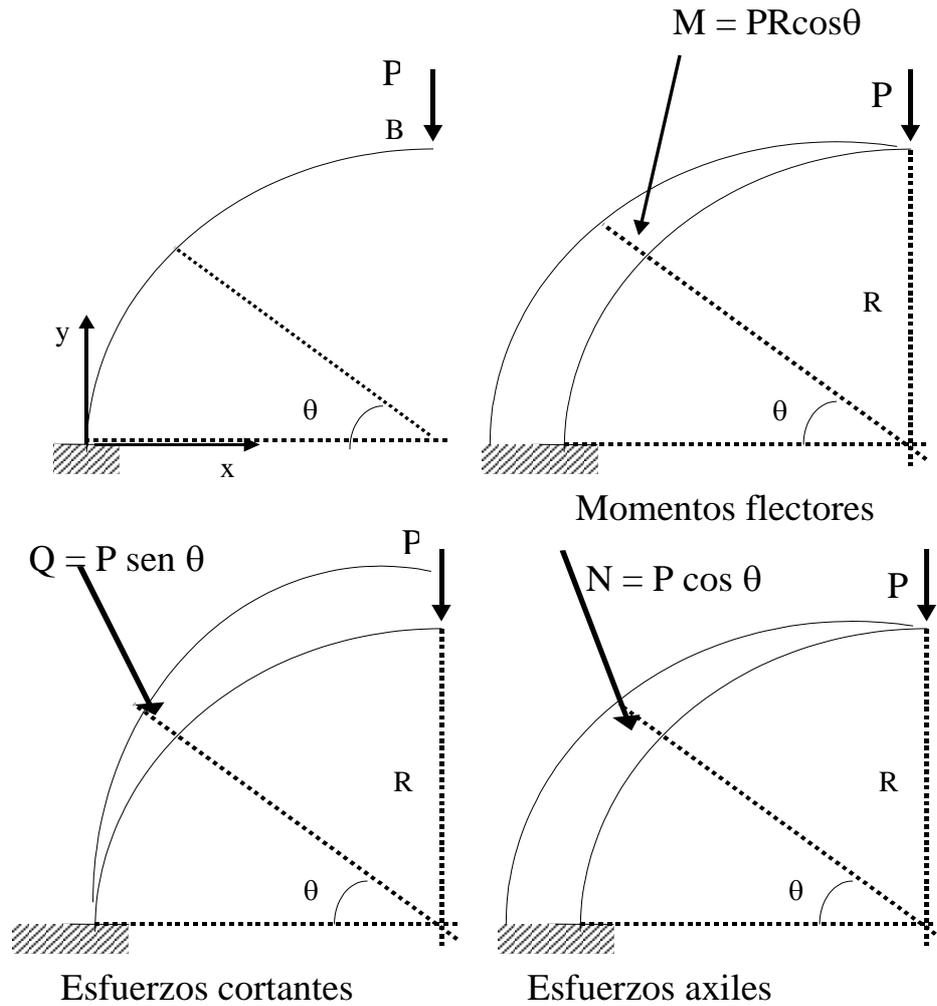


Figura 3.39

Para calcular los movimientos de una sección de una barra curva pueden utilizarse los teoremas de Mohr o el teorema de Castigliano.

En la figura 3.40 se muestra una barra de directriz circular y sometida a una carga en el extremo libre; se muestra, también la ley de momentos flectores correspondientes.

A continuación, se expone el proceso de cálculo de los movimientos horizontal, \mathbf{U}_B , vertical, \mathbf{V}_B y el giro, θ_B , del extremo de un arco empotrado, utilizando, a efectos comparativos, las dos herramientas citadas.

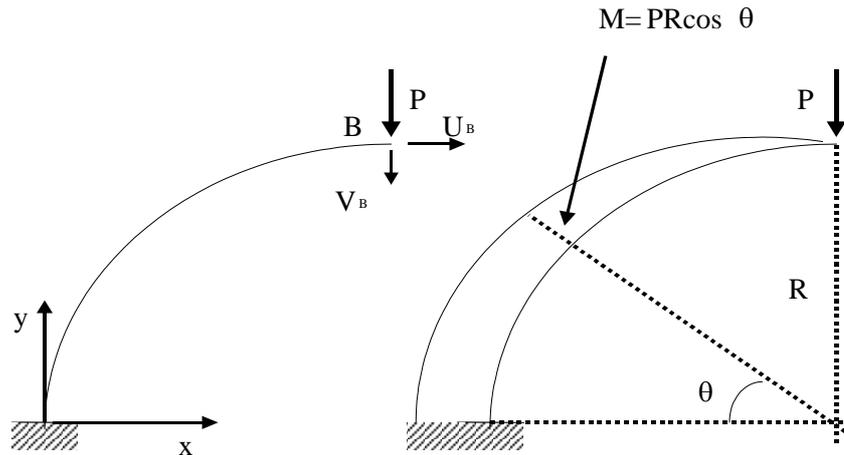


Figura 3.40 Ley de momentos flectores

a) Desplazamiento vertical V_B .

Utilizando los teoremas de Mohr

El giro $d\theta$ de una rebanada genérica contribuye al desplazamiento vertical de B con el producto $d\theta R \cos \theta$ (figura 3.41)

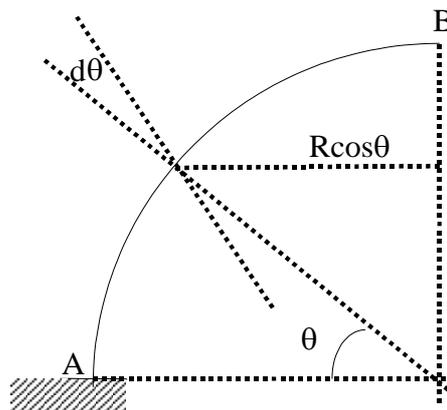


Figura 3.41

con lo cual

$$(V_B)_{d\theta} = d\theta R \cos \theta = \frac{M}{EI} R \cos \theta = \frac{PR^2 \cos \theta \cos \theta}{EI}$$

La contribución de todas las rebanadas es:

$$V_B = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR^2 \cos \theta \cos \theta ds$$

Observación.- El elemento ds de la integral es $Rd\theta$

Utilizando el teorema de Castigliano

Para utilizar este teorema se necesita un estado auxiliar consistente en una carga unidad en la dirección según la cual se quiere obtener el desplazamiento, que, en este caso, es la vertical. En la figura 3.42 se incluye la ley de momentos flectores producida por una carga vertical hacia abajo (estado auxiliar)

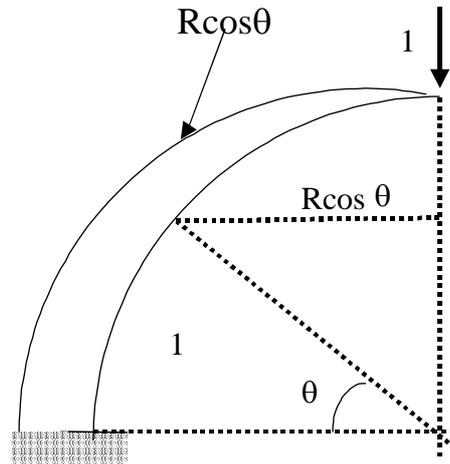


Figura 3.42

Según el teorema de Castigliano, el movimiento vertical se obtiene integrando a lo largo de la directriz de la barra el producto de las leyes de momentos flectores del estado real y la del estado auxiliar divididas por EI

$$V_B = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} PR \cos \theta R \cos \theta ds$$

b) Movimiento horizontal U_B .-

Utilizando los teoremas de Mohr

El giro $d\theta$ de una rebanada genérica contribuye al desplazamiento vertical de B con el producto $d\theta (R - R \text{ sen } \theta)$ (figura 3.43)

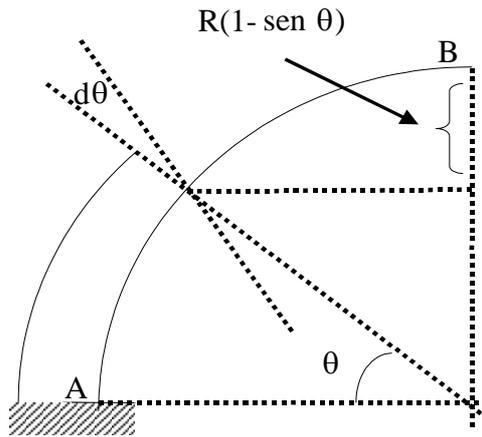


Figura 3.43

con lo cual

$$(U_B)_{d\theta} = d\theta R(1 - \text{sen}\theta) = \frac{M}{EI} R(1 - \text{sen}\theta) = \frac{PR^2 \cos\theta(1 - \text{sen}\theta)}{EI}$$

La contribución de todas las rebanadas es:

$$U_B = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} PR^2 \cos\theta(1 - \text{sen}\theta) ds$$

Observación.- El elemento **ds** de la integral es **Rdθ**

Utilizando el teorema de Castigliano

Para utilizar este teorema se necesita un estado auxiliar consistente en una carga unidad en la dirección según la cual se quiere obtener el desplazamiento, que, en este caso, es la horizontal. En la figura 3.44 se incluye la ley de momentos flectores producida por una carga horizontal hacia la derecha (estado auxiliar)

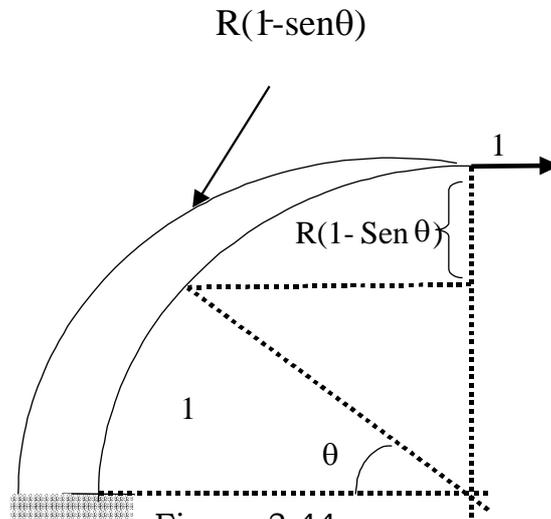


Figura 3.44

Según el teorema de Castigliano, el movimiento vertical se obtiene integrando a lo largo de la directriz de la barra el producto de las leyes de momentos flectores del estado real y la del estado auxiliar divididas por EI

$$U_B = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR \cos \theta R(1 - \text{sen} \theta) ds$$

c) Giro del punto B θ_B .

Utilizando los teoremas de Mohr

El giro $d\theta$ de una rebanada produce un giro igual del punto B (figura 3.45).

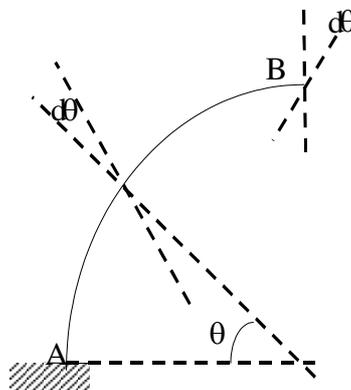


Figura 3.45

con lo cual

$$\theta_B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M dS = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR \cos \theta ds$$

Utilizando el teorema de Castigliano

Para utilizar este teorema se necesita, en este caso, un estado auxiliar consistente en un momento unidad aplicado en el punto en el se quiere obtener el giro. En la figura 3.46 se incluye la ley de momentos flectores producida por este momento.

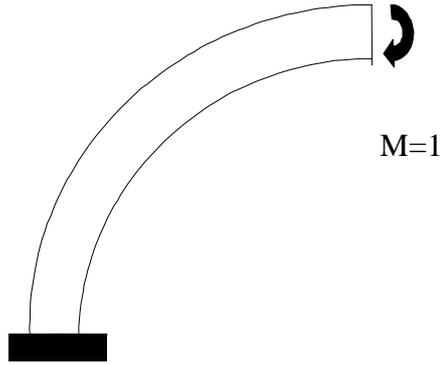


Figura 3.46

Según el teorema de Castigliano, el giro se obtiene integrando a lo largo de la directriz de la barra el producto de las leyes de momentos flectores del estado real y la del estado auxiliar divididas por EI

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} PR \cos \theta \cdot 1 \cdot ds$$

3.5 CARGAS TÉRMICAS

3.5.1 Deformación térmica de una rebanada

Una acción externa muy frecuente sobre las estructuras es la variación térmica del ambiente que las rodea. Si la temperatura del ambiente varía respecto a la que tenía inicialmente el material cuando se fabricó el elemento estructural, este va a sufrir deformaciones debidas a los gradientes térmicos que puedan producirse.

Sea, por ejemplo, el caso de una viga de sección rectangular de canto c sometida a un incremento de temperatura Δt_2 en su fibra superior y un incremento Δt_1 en su fibra inferior. La figura 3.47 representa una rebanada ABDC de la viga, delimitada por las secciones AEC y BFD y que se ha deformado hasta A'B'D'C'. Como hipótesis de cálculo se considera una variación de la temperatura lineal según el canto.

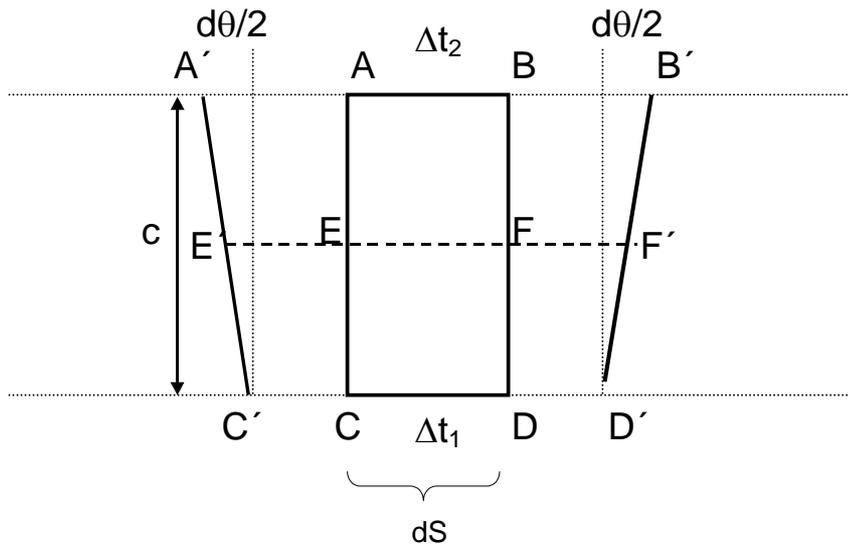


Figura 3.47

Siendo α el coeficiente de dilatación del material, el alargamiento de AB es

$$AA' + BB' = \alpha ds \Delta t_2$$

y el alargamiento de CD es

$$CC' + DD' = \alpha ds \Delta t_1$$

y como $AA' = BB'$ y $CC' = DD'$ resulta

$$BB' = \frac{\alpha ds \Delta t_2}{2}$$

$$DD' = \frac{\alpha ds \Delta t_1}{2}$$

y, por lo tanto,

$$FF' = \frac{BB' + DD'}{2} = \frac{1}{2} \alpha ds \frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{2}$$

con lo cual el alargamiento de la fibra EF o, lo que es lo mismo, el alargamiento de la rebanada, es

$$2FF' = \alpha ds \frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{2}$$

Por otro lado, el ángulo que forma la sección DB con su deformada D'B' es

$$\frac{1}{2} \alpha ds \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{c}$$

con lo cual el ángulo entre las secciones de la rebanada deformada resulta

$$d\theta = \frac{\alpha ds}{c} (\Delta t_2 - \Delta t_1)$$

3.5.2 Vigas de directriz recta.-

Para este tipo de vigas,

- sumando (integrando) los alargamientos de las rebanadas se obtiene el alargamiento total de la barra
- sumando (integrando) los giros de las rebanadas se obtiene el giro entre secciones extremas de barra
- el giro de cada rebanada contribuye al movimiento de un punto

EJEMPLO.- En la estructura de la figura 3.48 las barras BC y CD tiene una sección rectangular con 50 cm de canto siendo ambas de 2 m de longitud; la estructura está sometida al incremento térmico que se describe en la figura. Siendo el coeficiente de dilatación térmica del material $\alpha = 2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ se pide calcular el desplazamiento horizontal del punto D.

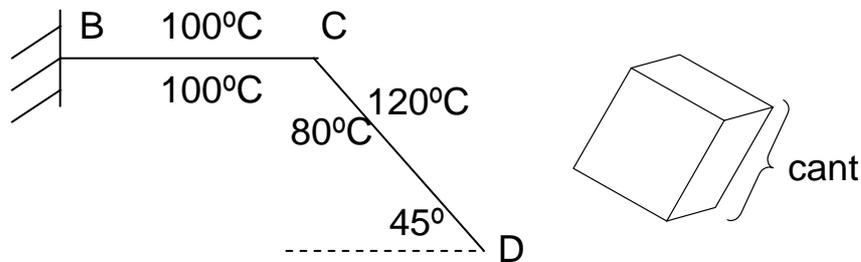


Figura 3.48

Contribución de la barra BC al movimiento horizontal de D:

- Por alargamiento de la barra

$$\int_B^C \alpha ds \frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{2} = \alpha BC \Delta t = 0.0004m$$

- Por giro de la secciones:

no hay giro en ninguna de la secciones

Contribución de la barra CD al movimiento horizontal de D:

- Por alargamiento de la barra

$$\int_C^D \alpha ds \frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{2} \cos 45 = \int_C^D 2 * 10^{-6} ds \frac{120 + 80}{2} \cos 45 = 0.000283m$$

- Por giro de las secciones

El giro de cada rebanada de la barra produce un movimiento del punto D en dirección perpendicular a la barra y de valor $s d\theta$, con lo cual

$$-\int_D^C s d\theta \cos 45 = -\int_D^C s \frac{\alpha ds}{c} (\Delta t_2 - \Delta t_1) \cos 45 = -\frac{\alpha}{c} (\Delta t_2 - \Delta t_1) \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^c \cos 45 =$$

$$= -0.0002263m$$

Total:

$$U_D = 0.0004 + 0.000283 - 0.0002263 = 0.0004567 \text{ m}$$

EJEMPLO.- En la estructura anterior se impide el desplazamiento horizontal del punto D como se indica en la figura 3.49. Se pide calcular la reacción en D sabiendo que el producto EI es 10^3 tm^2 .

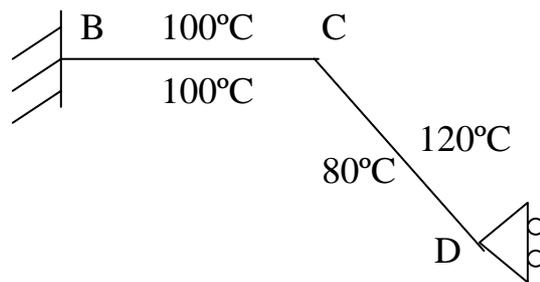


Figura 3.49

En el apoyo D aparece una reacción R cuando el punto D, como resultado del calentamiento, intenta moverse horizontalmente (figura 3.50). La actuación simultánea de la temperatura y de la reacción (desconocida) anulan el movimiento del punto D.

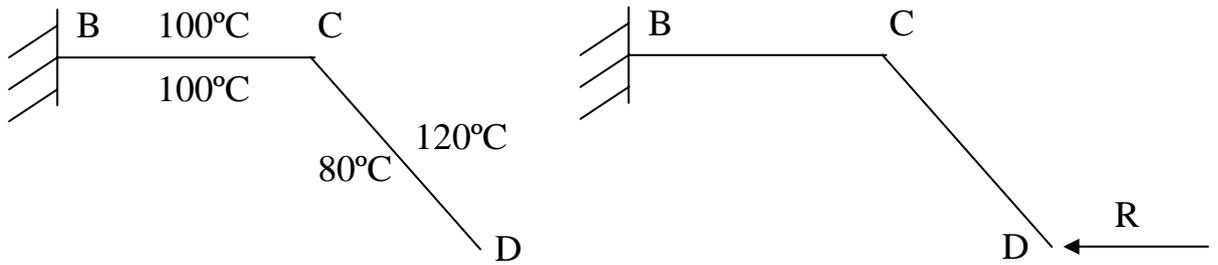


Figura 3.50

El desplazamiento horizontal de D es suma algebraica de los desplazamientos debidos a la temperatura y a la aplicación de la carga R (reacción). Para calcular este último se precisa la ley de momentos flectores (figura 3.51)

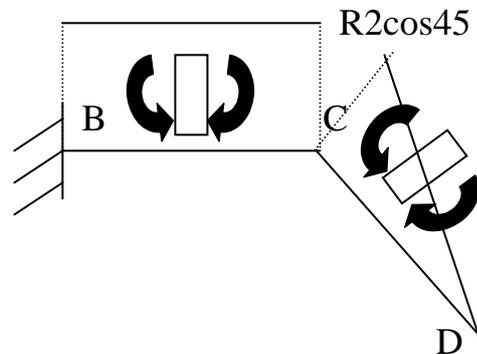


Figura 3.51

A partir de esta ley de momentos flectores y aplicando el 2º teorema generalizado de Mohr:

$$U_D = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (R \cos 45^\circ) 2 \frac{2}{3} 2 \cos 45^\circ + 2 (R \cos 45^\circ) 2 \cos 45^\circ \right] = \frac{16R}{3EI} = R 0.0053m$$

Como el movimiento de U ha de ser nulo

$$U_D = 0.0004567 - R 0.00533 = 0 \Rightarrow R = 0.0856 t$$

3.5.3 Barras de directriz curvilínea.-

Considérese el caso de la barra que se muestra en la figura 3.52 que tiene directriz curvilínea y sección constante, está empotrada en un extremo y es sometida a una variación de temperatura uniforme ($\Delta t_2 = \Delta t_1 = \Delta t$) de la que se quiere obtener el valor del movimiento del punto A en la dirección definida por un vector V.

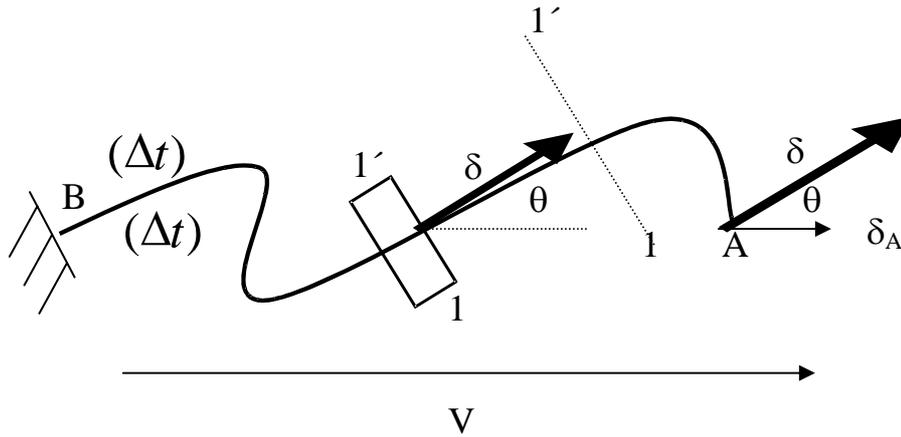


Figura 3.52

El alargamiento de una rebanada genérica 1-1' debido al incremento de temperatura es

$$\delta = \alpha ds \Delta t$$

Este alargamiento da lugar a un movimiento, con el mismo valor, del extremo A de la viga curvilínea en la dirección perpendicular a la rebanada. El movimiento de A en la dirección definida por el vector V es, entonces,

$$(U_A)_{ds} = (\alpha ds \Delta t) \cos \theta$$

Pero $ds \cos \theta$ es la proyección de ds sobre la dirección definida por el vector V con lo cual al sumar las contribuciones al movimiento de A de los alargamientos de todas las rebanadas se obtiene

$$U_A = \int_B^A (\alpha ds \Delta t) \cos \theta = \alpha \Delta t \int_B^A \cos \theta ds = \alpha \Delta t L$$

“El movimiento en una dirección definida por un vector, del extremo de una barra curvilínea en ménsula se obtiene multiplicando el coeficiente de dilatación por el incremento de temperatura y por la proyección en la dirección V de la directriz de la viga (figura 3.53)”.

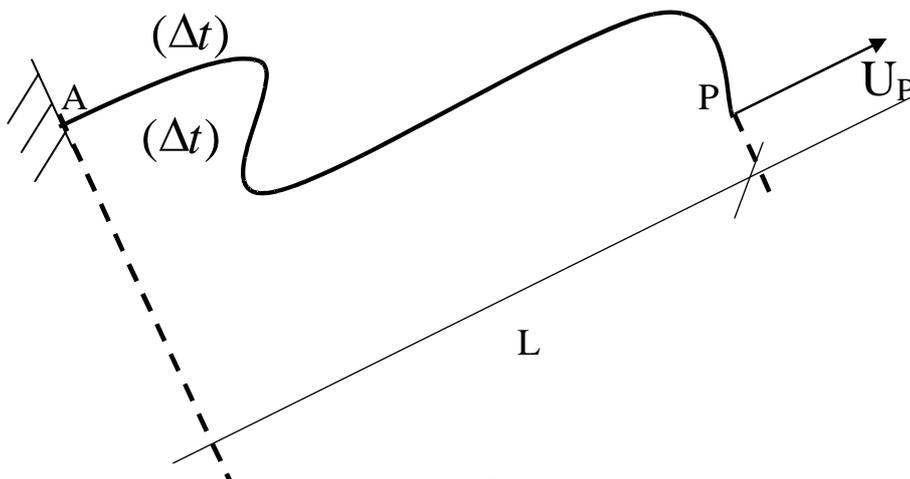


Figura 3.53

Esta propiedad se verifica incluso en el caso de que debido a las posibles incurvaciones de la barra, la proyección de dos rebanadas pudieran solaparse (figura 3.54).

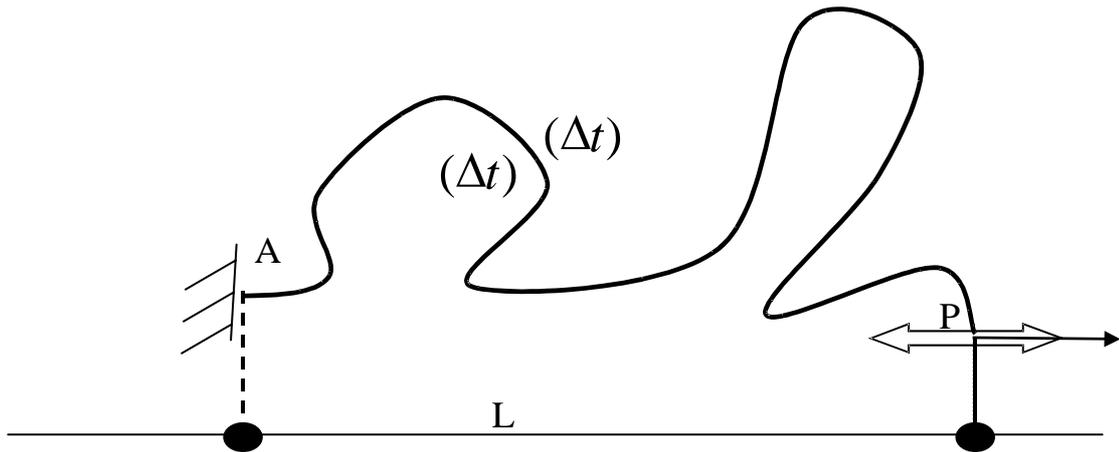


Figura 3.54