

CONCEPTOS BÁSICOS DEL CÁLCULO ESTRUCTURAL

Prof. Carlos Navarro

Departamento de Mecánica de Medios Continuos
y Teoría de Estructuras

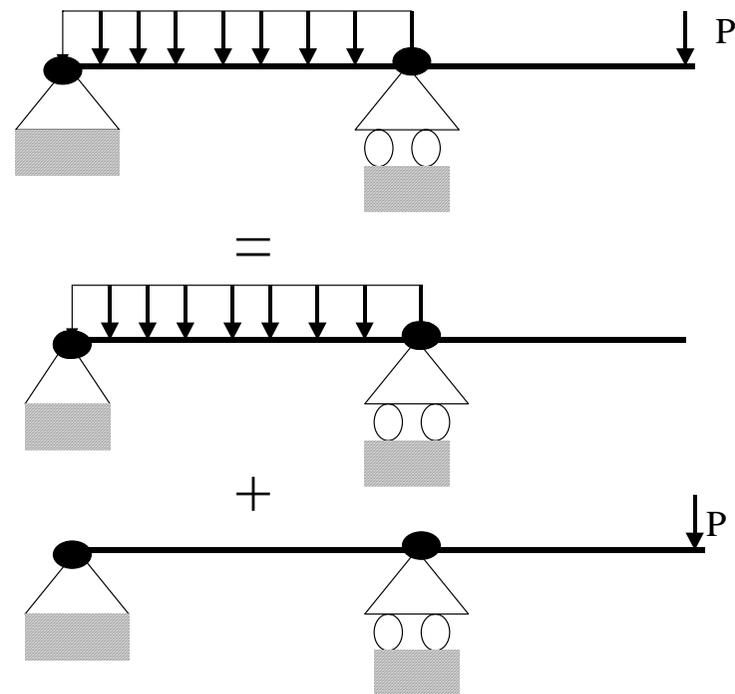
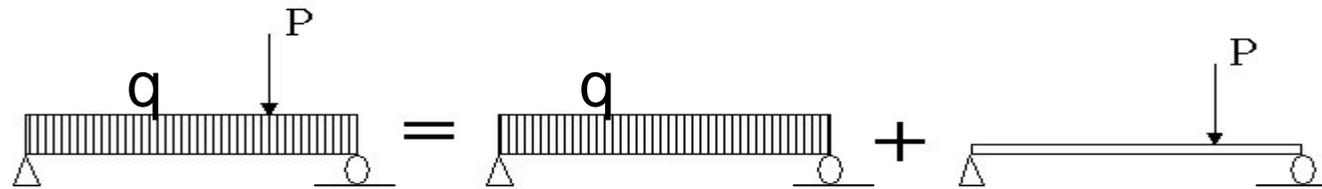
MODELO DEL MATERIAL

Mientras no digamos lo contrario, supondremos que el material del que está realizada la estructura muestra un comportamiento elástico-lineal hasta rotura

MODELO DE DEFORMACIÓN

Mientras no digamos lo contrario, supondremos que consideramos la hipótesis de pequeñas deformaciones

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION



ENERGÍA INTERNA, ELÁSTICA O DE DEFORMACIÓN

Supongamos que las cargas aplicadas al sólido crecen, progresivamente, desde cero hasta su valor final de una manera continua. En ese caso, el trabajo W realizado por todas las cargas que actúan sobre el sólido quedaría almacenado como energía elástica de deformación U en el sólido y, por tanto:

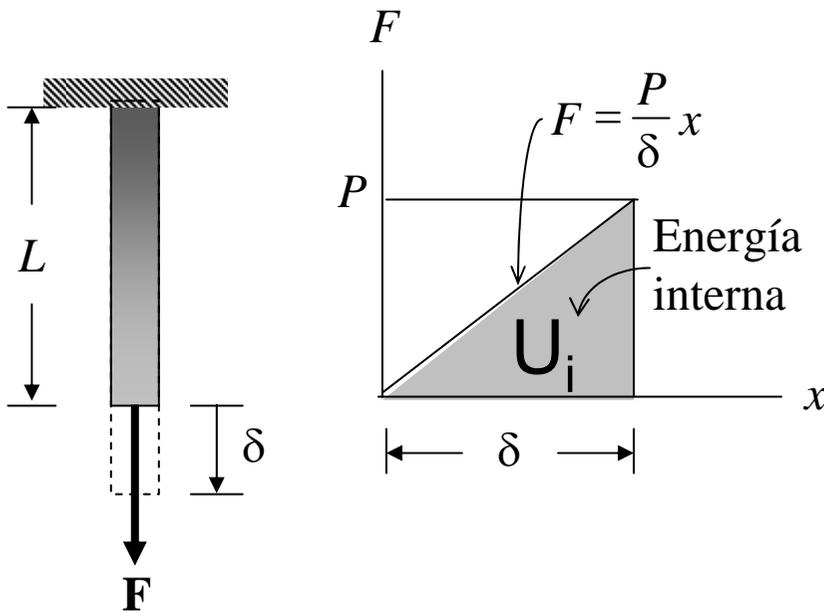
$$U = W$$

Trabajo externo y energía de deformación

La mayoría de los métodos energéticos en el cálculo de estructuras se basan en el **Principio de la conservación de la energía**, que establece que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema estructural, W_e , coincide con la energía de deformación que almacena dicho sistema, U_i .

$$W_e = U_i$$

• Trabajo de una fuerza exterior



$$dW_e = F dx$$

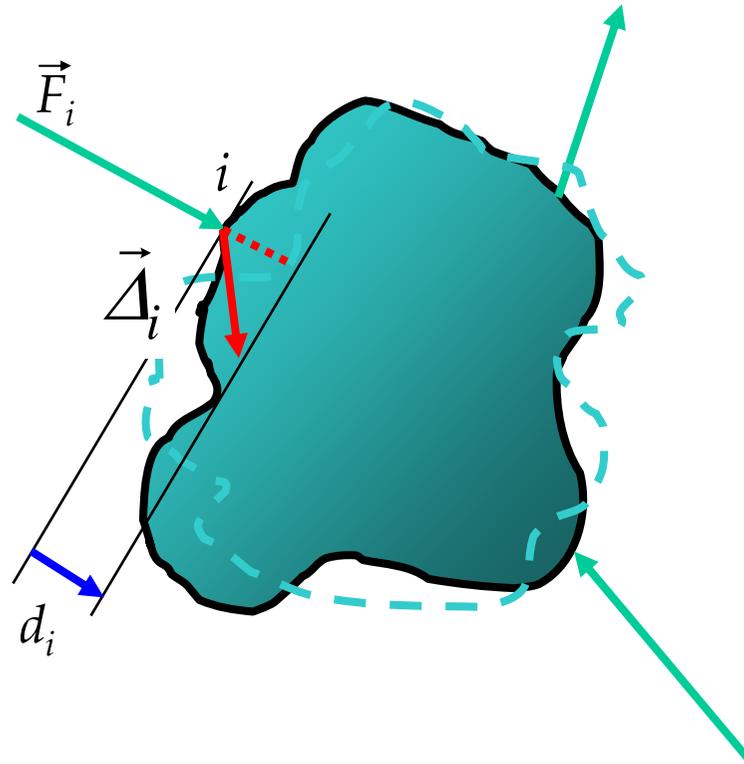
$$W_e = \int_0^x F dx$$

Cuando la fuerza \mathbf{F} se incrementa desde cero hasta un valor final $F = P$, la elongación de la Barra resulta ser Δ :

$$W_e = \int_0^{\Delta} \left(\frac{P}{\delta} x\right) dx$$

$$U_e = \left(\frac{P}{2\delta} x^2\right) \Big|_0^{\Delta} = \frac{1}{2} P \delta$$

El trabajo realizado por las cargas exteriores aplicadas a un sólido es la mitad de la suma del producto de dichas cargas por los desplazamientos de sus puntos de aplicación (en las dirección de las mismas, por supuesto).

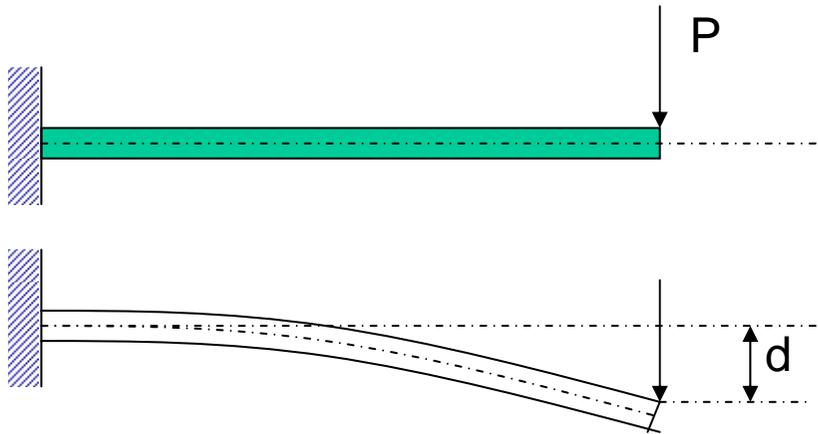


$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_i$$

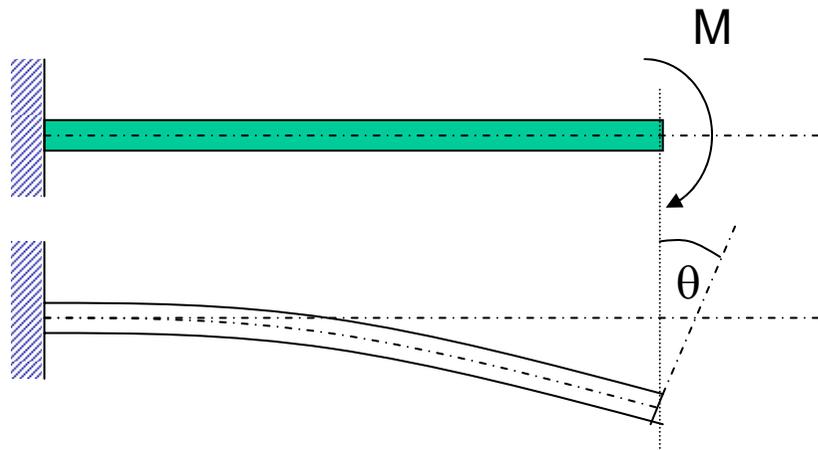
Si entre las cargas aplicadas existiera algún momento, bastaría con tener en cuenta que:

- donde se dijera fuerza se debería decir momento
- donde se dijera desplazamiento se debería decir giro
- donde se expresara trabajo ($W=Fd$, en el caso de fuerzas) se debería escribir $W=M\theta$.

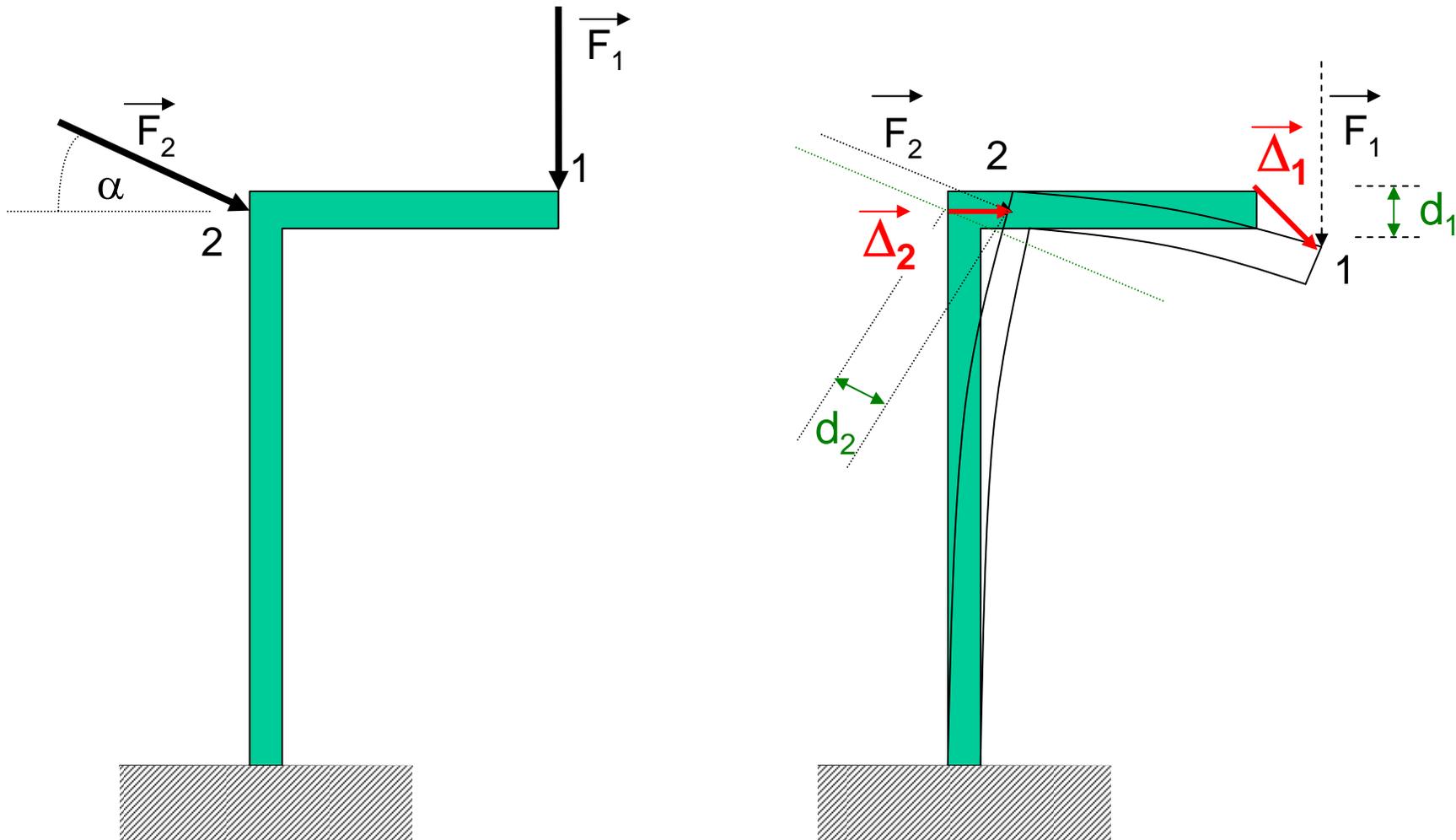
EJEMPLOS:



$$W = \frac{1}{2} P \cdot d$$



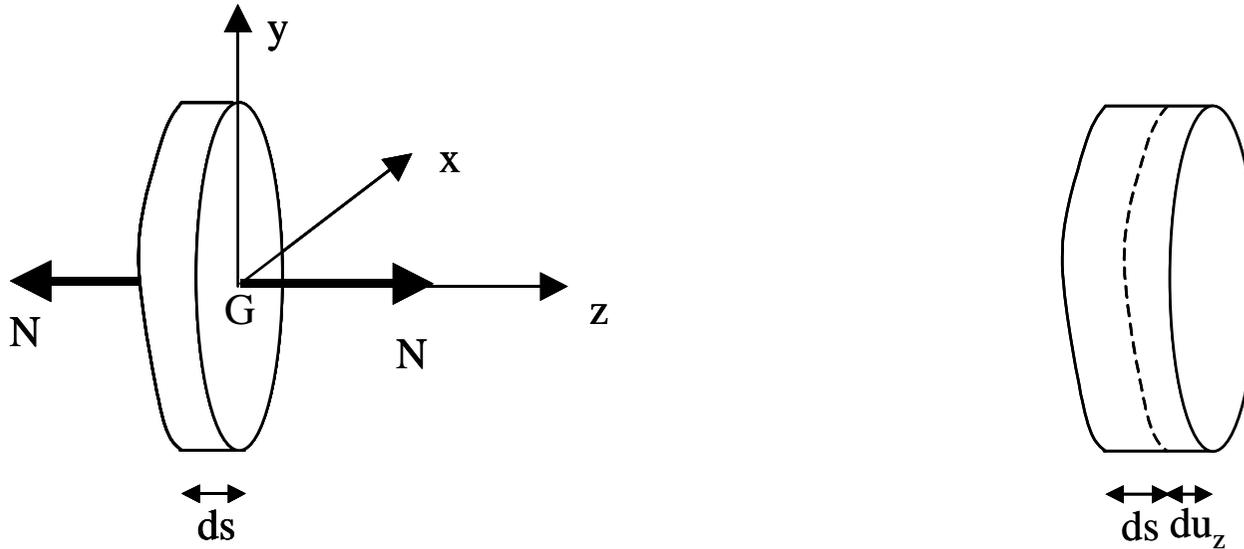
$$W = \frac{1}{2} M \cdot \theta$$



$$W = U = \frac{1}{2} |\vec{F}_1| d_1 + \frac{1}{2} |\vec{F}_2| d_2$$

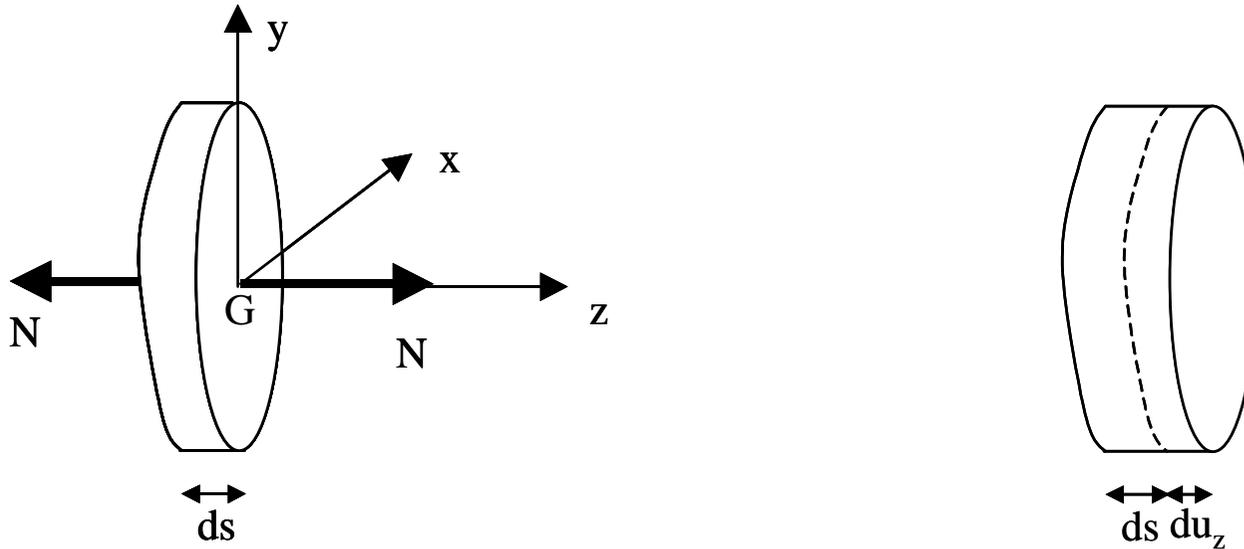
¡Las reacciones en el empotramiento (fuerzas y momento) no producen Trabajo, pues la sección sobre la que actúan no sufre movimientos!

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR ESFUERZO AXIL



$$du_z = \varepsilon ds = \frac{\sigma}{E} ds = \frac{N}{EA} ds$$

¿Qué energía elástica almacena una rebanada sometida a esfuerzo axial?



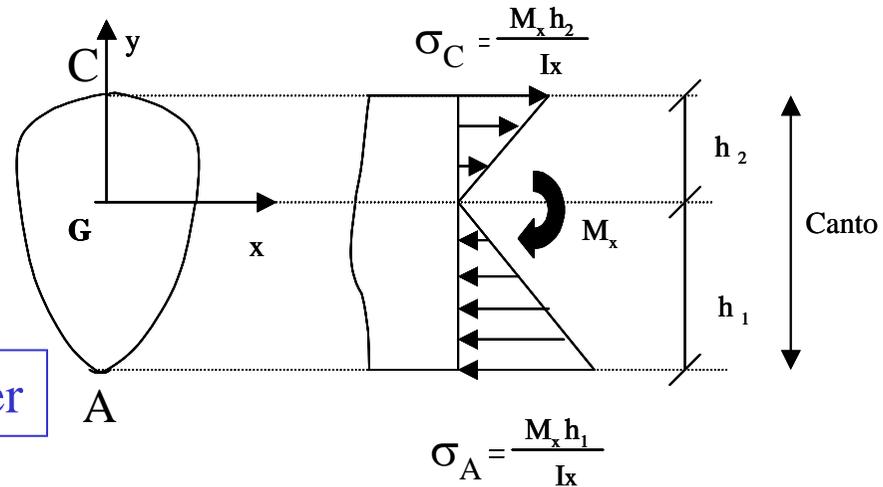
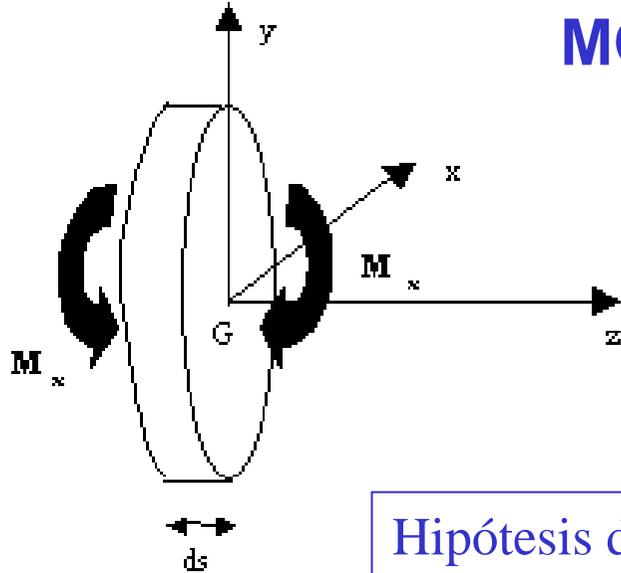
$$du_z = \varepsilon ds = \frac{\sigma}{E} ds = \frac{N}{AE} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} N \cdot du_z = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} ds$$

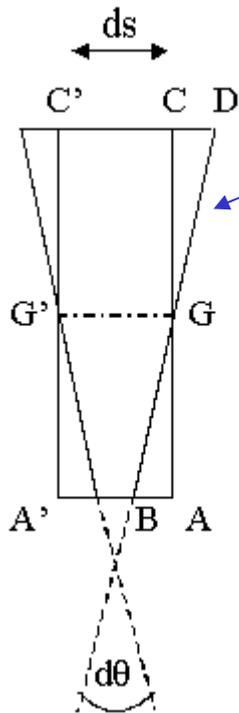
LA HIPÓTESIS DE NAVIER (FLEXIÓN)

Una cara de cualquier rebanada, que era plana antes de deformarse la pieza, sigue permaneciendo plana una vez que la pieza se ha deformado.

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR MOMENTO FLECTOR



Hipótesis de Navier



$$\sigma_A = \frac{M_x AG}{I_x} \quad (\text{compresión})$$

$$\sigma_C = \frac{M_x CG}{I_x} \quad (\text{tracción})$$

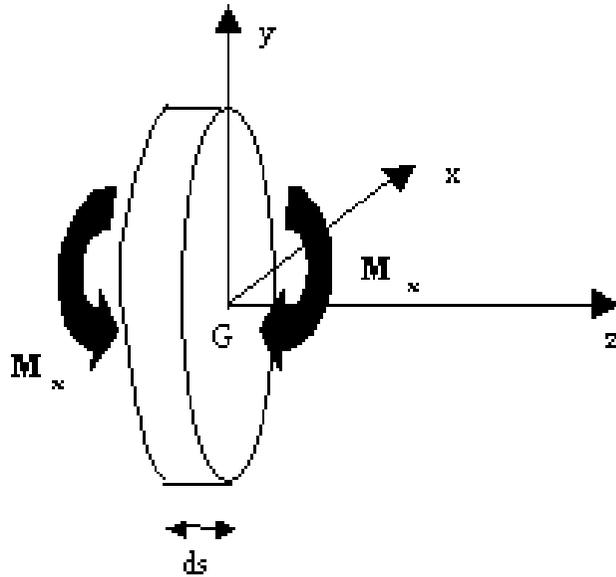
$$\frac{d\theta_x}{2} = \frac{AB}{AG} = \frac{CD}{CG} = \frac{M_x}{2EI_x} ds$$

$$2AB = \varepsilon_{AA'} ds = \frac{\sigma_A}{E} ds = \frac{M_x AG}{EI_x} ds$$

$$2CD = \varepsilon_{CC'} ds = \frac{\sigma_C}{E} ds = \frac{M_x CG}{EI_x} ds$$

$$d\theta_x = \frac{M_x}{EI_x} ds$$

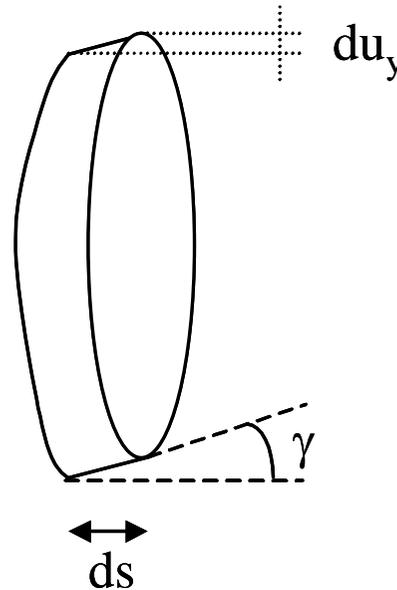
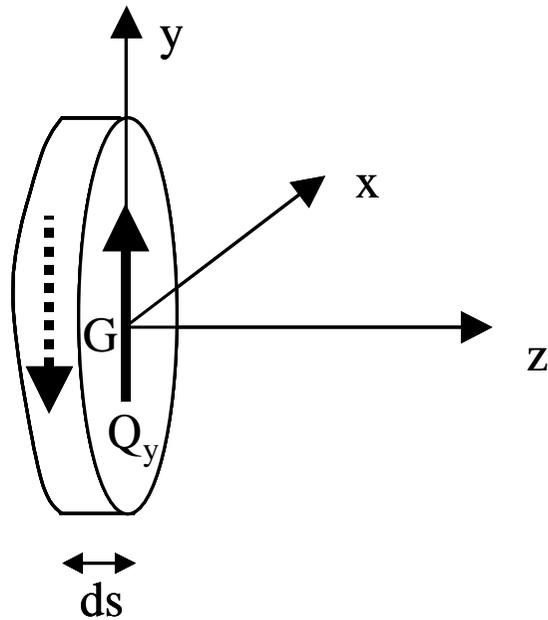
¿Qué energía elástica almacena una rebanada sometida a momento flector?



$$d\theta_x = \frac{M_x}{EI_x} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} M \cdot d\theta_x = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI_x} ds$$

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR ESFUERZO CORTANTE



$$du_y = \gamma ds = \frac{\tau_m}{G} ds$$

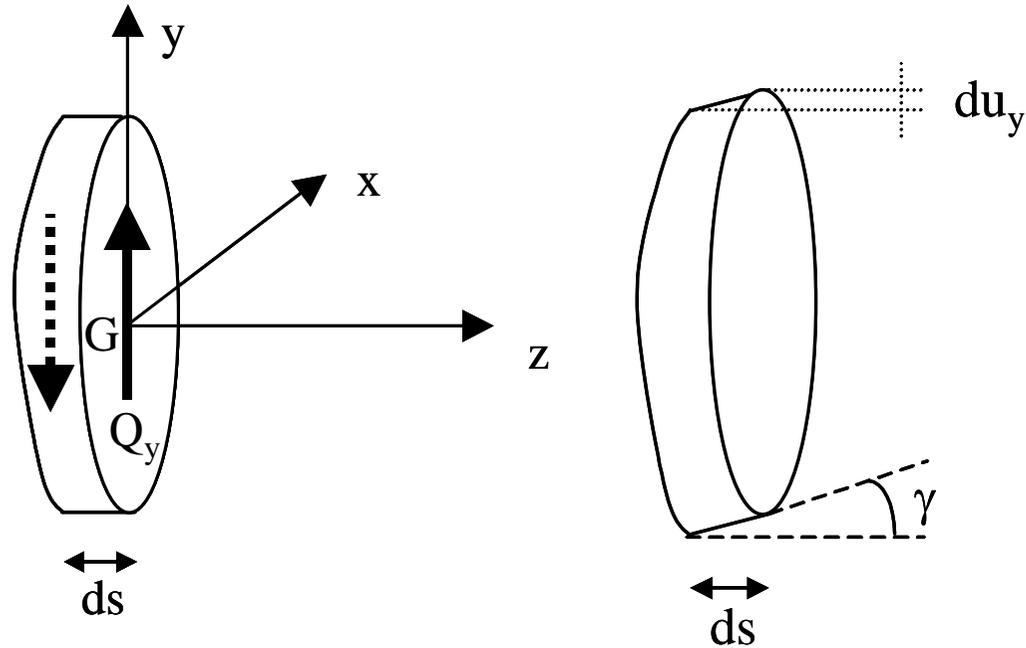
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\tau_m = \frac{Q_y}{\Omega_c}$$

El área a cortante Ω_c depende de la geometría de la sección y, en general, se puede escribir como: $\Omega_c = \Omega/k$. Para el caso de una sección rectangular $k=6/5$ (para el caso de una sección circular, por ejemplo, $k=10/9$)

$$du_y = \gamma ds = \frac{Q_y}{G\Omega_c} ds$$

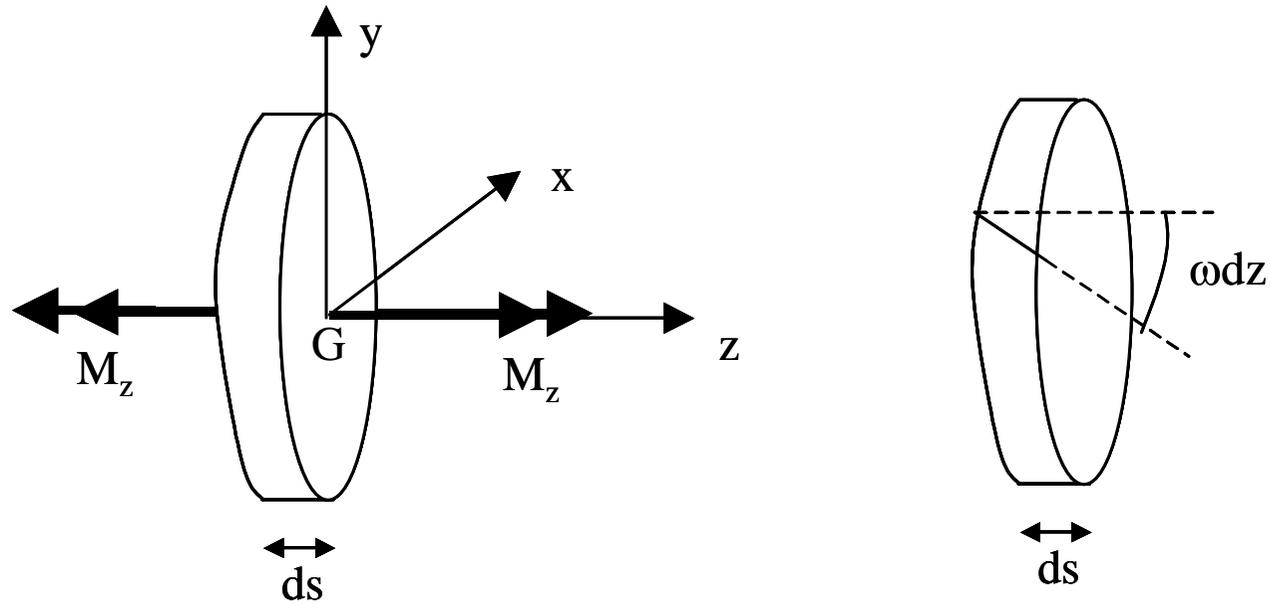
¿Qué energía elástica almacena una rebanada sometida a esfuerzo cortante?



$$du_y = \gamma ds = \frac{Q_y}{G\Omega_c} ds$$

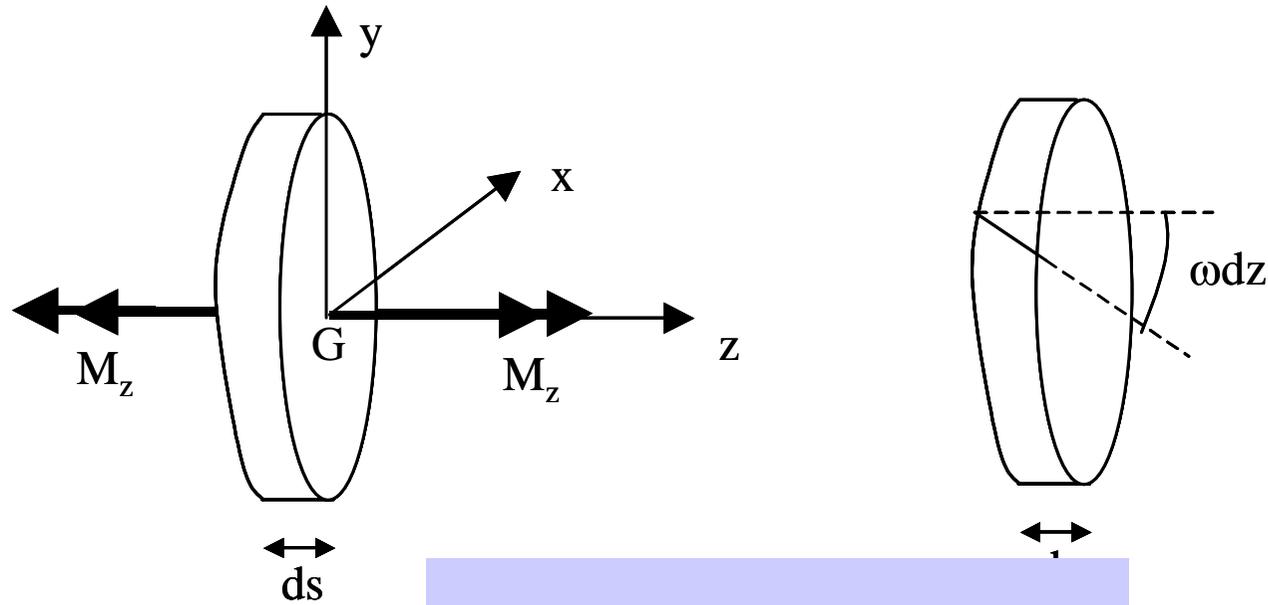
$$dU = \frac{1}{2} Q_y \cdot du_y = \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{G\Omega_c} ds$$

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR MOMENTO TORSOR



$$d\theta_z = \omega ds = \frac{M_z}{GK} ds$$

¿Qué energía elástica almacena una rebanada sometida a momento torsor?



$$d\theta_z = \omega ds = \frac{M_z}{GK} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} M_z \cdot d\theta_z = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{GK} ds$$

En resumen:

Axil

$$dU = \frac{1}{2} N \cdot du_z = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} ds$$

Flector

$$dU = \frac{1}{2} M \cdot d\theta_x = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI_x} ds$$

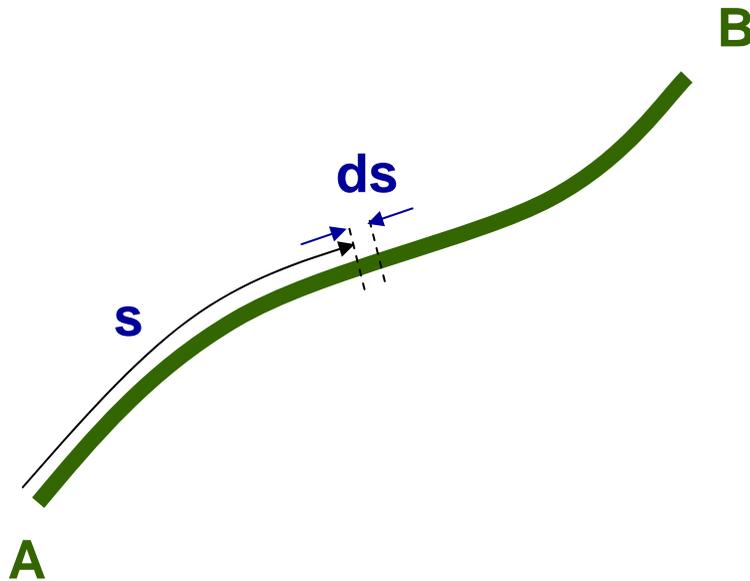
Cortante

$$dU = \frac{1}{2} Q_y \cdot du_y = \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{G\Omega_c} ds$$

Torsor

$$dU = \frac{1}{2} M_z \cdot d\theta_z = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{GK} ds$$

¿Qué energía interna se almacena en una pieza cargada en la que aparecen todos los tipos de esfuerzos en todas las secciones de la pieza?

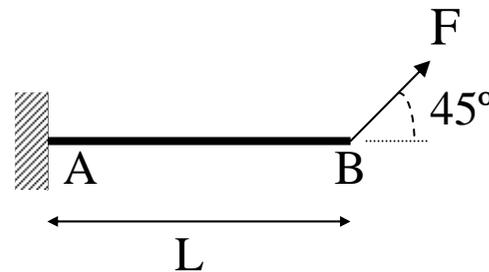


$$U = \frac{1}{2} \int_A^B \left[\frac{N^2(s)}{AE} + \frac{M^2(s)}{EI_x} + \frac{Q_y^2(s)}{G\Omega_c} + \frac{M_z^2(s)}{GK} \right] ds$$

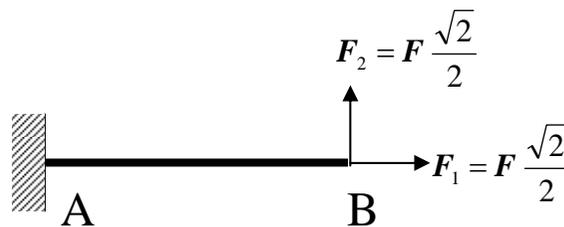
La variable “s” del integrando indica que los esfuerzos pueden variar a lo largo de la pieza en función del valor de dicha variables

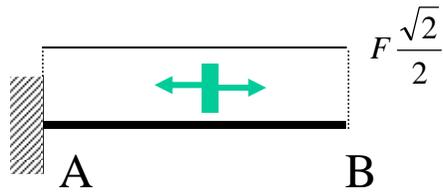
¿Podríamos calcular ya los desplazamientos en algún elemento estructural simple que se encuentre cargado?

Supongamos que nos piden los desplazamientos (horizontal y vertical) del extremo B de la ménsula de la figura sometida a la carga inclinada que se indica:

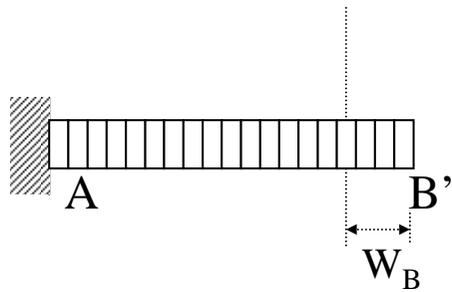
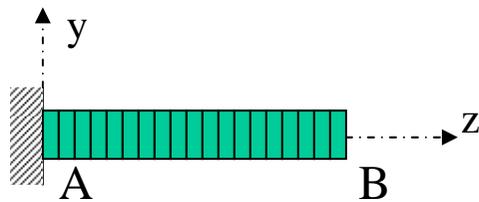


La carga anterior puede descomponerse en sus dos componentes:





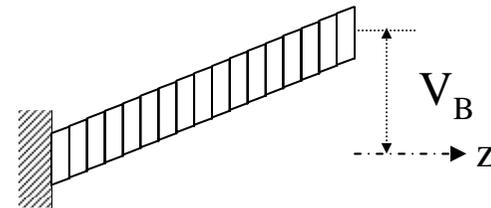
Ley de axiles



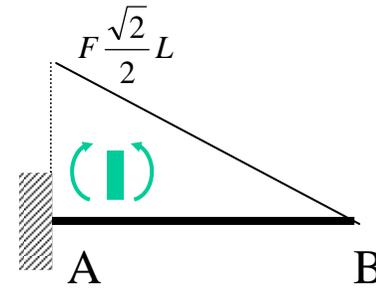
$$w_B = \int_0^L \left(\frac{F \sqrt{2}/2}{EA} \right) dz = \frac{F \sqrt{2}/2 \cdot L}{EA}$$



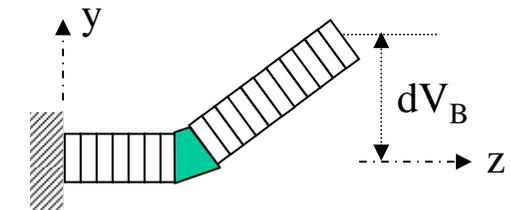
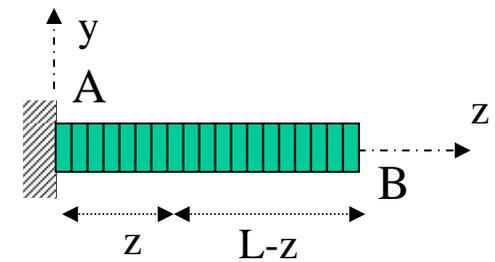
Ley de cortantes



$$v_B = \int_0^L \left(\frac{F \sqrt{2}/2}{G\Omega_c} \right) dz = \frac{F \sqrt{2}/2 \cdot L}{G\Omega_c}$$



Ley de flectores



$$\begin{aligned} dv_B &= d\theta \cdot (L-z) = \frac{M(z)}{EI} dz \cdot (L-z) = \\ &= \frac{F \sqrt{2}/2 \cdot (L-z)}{EI} dz \cdot (L-z) \\ v_B &= \frac{F \sqrt{2}/2}{EI} \int_0^L (L-z)^2 dz = \frac{F \sqrt{2}/2}{EI} \cdot \frac{L^3}{3} \end{aligned}$$

¿Qué cuantía tienen esos desplazamientos?

Supongamos una viga en ménsula de sección cuadrada de 20 cm² de hormigón (E=20 GPa y ν=0,2) y de longitud 4 m. Supongamos F=20 kN.

$$A=0,04 \text{ m}^2$$

$$I=1,33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\Omega_c=A/1,2=0,0333$$

Desplazamiento según el eje de la viga

$$w_B = \frac{20000 \sqrt{2} / 2 \cdot 4}{20 \cdot 10^9 \cdot 0,04} = 7,07 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Flecha debida a cortante

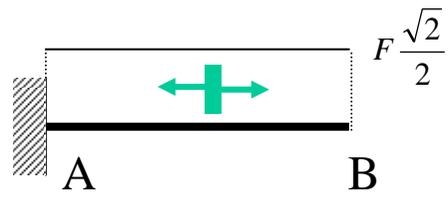
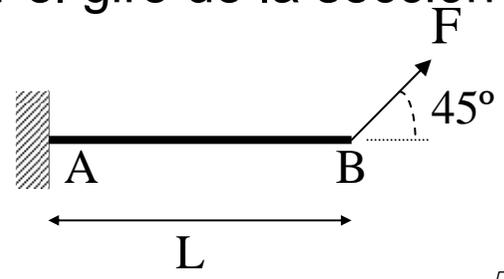
$$v_B = \frac{20000 \sqrt{2} / 2 \cdot 4}{8,33 \cdot 10^9 \cdot 0,0333} = 2,04 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Flecha debida a flexión

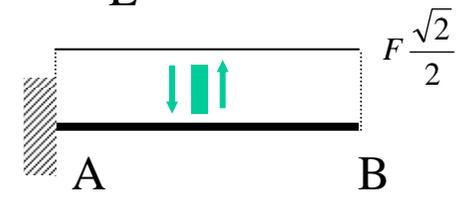
$$v_B = \frac{20000 \sqrt{2} / 2}{20 \cdot 10^9 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{4^3}{3} = 0,227 \text{ m}$$

¡Los desplazamientos debidos a flexión son mucho más grandes que los debidos a los esfuerzos axil y cortante!

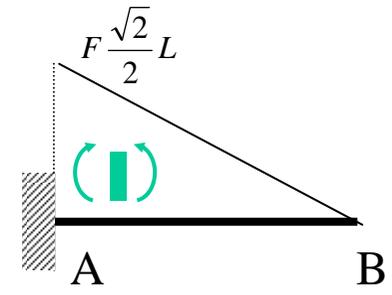
¿Cómo podríamos calcular el giro de la sección B?



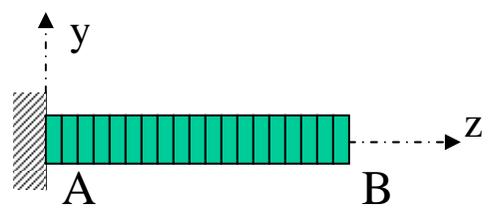
Ley de axiles



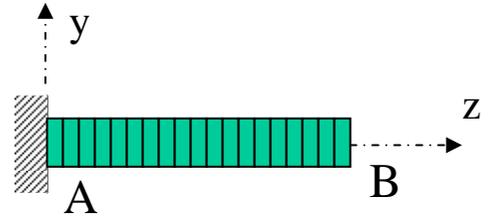
Ley de cortantes



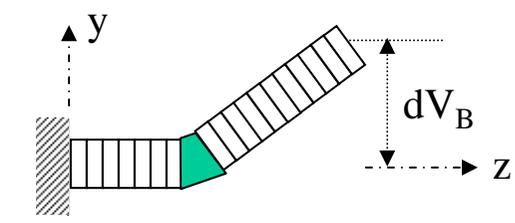
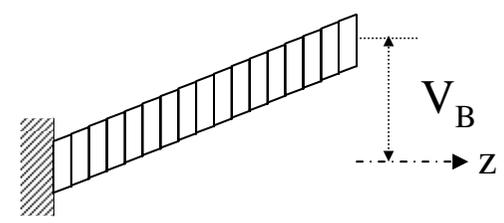
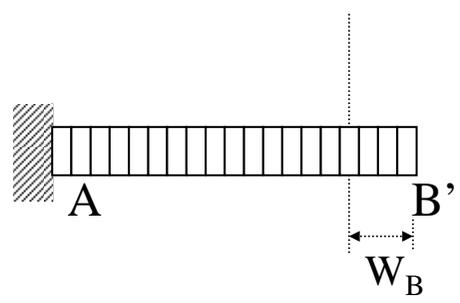
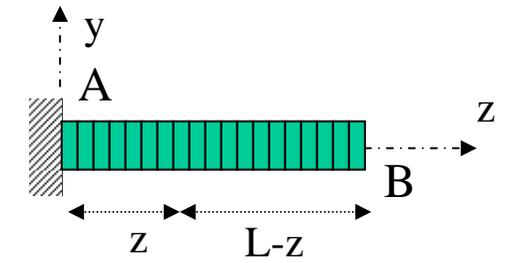
Ley de flectores



¡No gira!



¡No gira!



$$d\theta_B = \int_0^L d\theta = \int_0^L \frac{M(z)}{EI} dz = \frac{F\sqrt{2}/2}{EI} \cdot \frac{L^2}{2}$$

EL TEOREMA DE CASTIGLIANO

$$\frac{\partial U}{\partial F_j} = d_i$$

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CASTIGLIANO A ESTRUCTURAS RETICULADAS

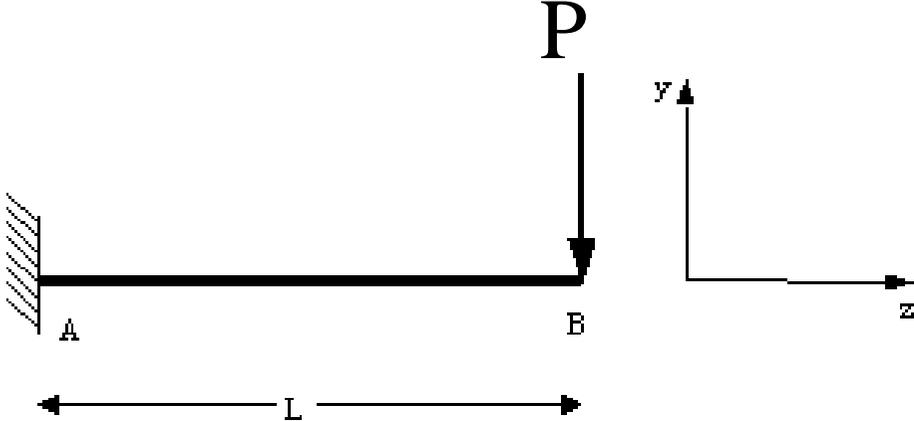
Problema de la aplicación del Teorema de Castigliano:

Este teorema sólo proporciona desplazamientos y giros en aquellas secciones de la pieza en las que actúa una fuerza o un momento, respectivamente.

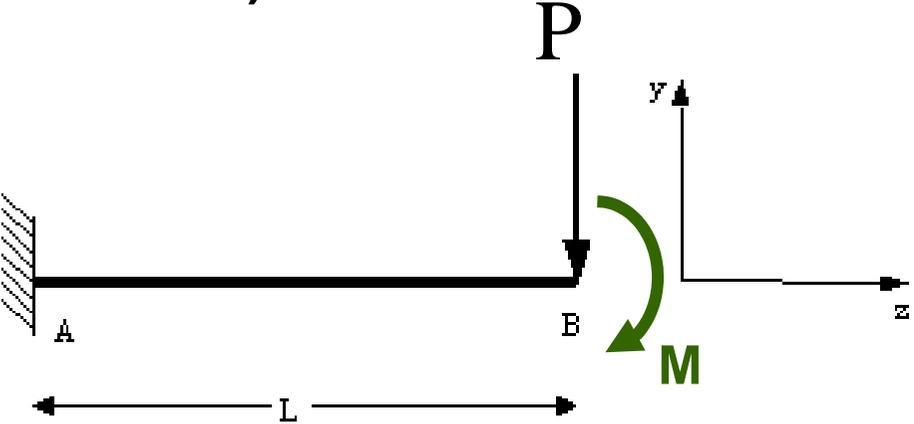
Es decir, si en una sección deseamos determinar el giro que experimenta no podemos aplicar (como hemos hecho antes) este teorema.

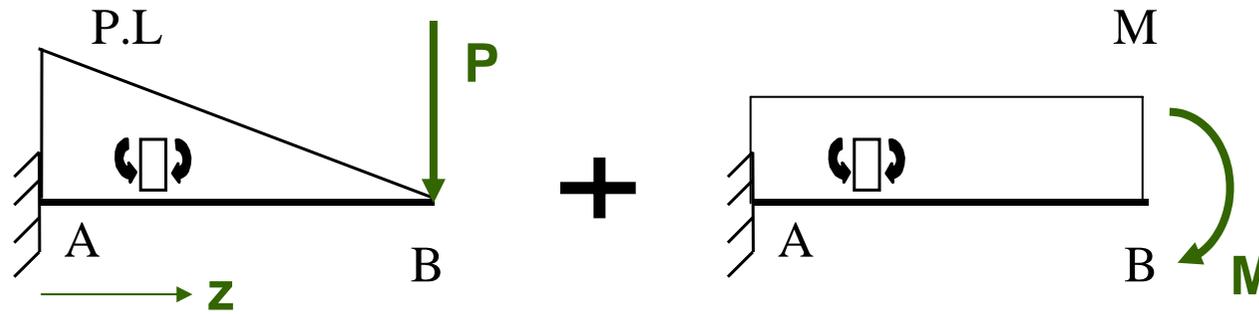
Para solventar esta dificultad, podemos proceder cómo se indica a continuación:

Obtener el giro en la sección *B* aplicando el Teorema de Castigliano



Estado auxiliar (ficticio) de cargas que se propone (además del ya existente):





(Los momentos flectores los consideraremos positivos si producen un giro en las rebanadas que induzcan un giro horario en B)

$$U = \frac{1}{2EI_x} \int_{z=0}^{z=L} [P(L-z) + M]^2 dz$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{P^2}{EI_x} \cdot \frac{L^3}{3} + \frac{2P \cdot M}{EI_x} \cdot \frac{L^2}{2} + \frac{M^2}{EI_x} \cdot L \right]$$

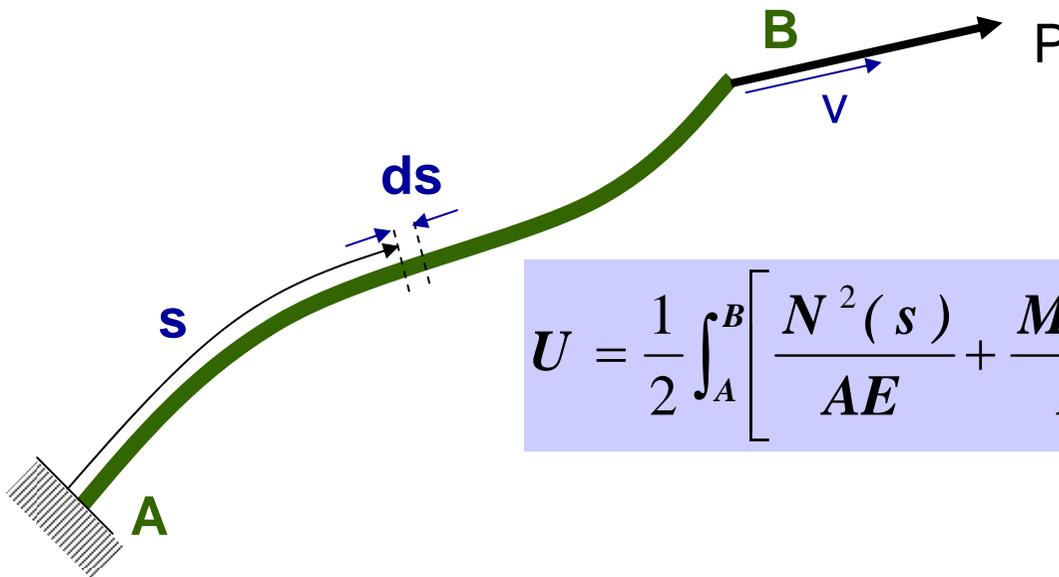
$$\hat{\theta}_B = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{P}{EI_x} \cdot \frac{L^2}{2} + \frac{M}{EI_x} \cdot L$$

Si $M=0$



$$\hat{\theta}_B = \frac{P}{EI_x} \cdot \frac{L^2}{2}$$

Cómo vamos a utilizar el teorema de Castigliano a lo largo de este curso



$$U = \frac{1}{2} \int_A^B \left[\frac{N^2(s)}{AE} + \frac{M^2(s)}{EI_x} + \frac{Q^2(s)}{G\Omega_c} + \frac{M_T^2(s)}{GK} \right] ds$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_A^B \left[\frac{N(s)}{AE} \frac{\partial N(s)}{\partial P} + \frac{M(s)}{EI_x} \frac{\partial M(s)}{\partial P} + \frac{Q(s)}{G\Omega_c} \frac{\partial Q(s)}{\partial P} + \frac{M_T(s)}{GK} \frac{\partial M_T(s)}{\partial P} \right] ds$$

$\frac{\partial N(s)}{\partial P}$ = Variación del esfuerzo axial por unidad de carga en la dirección y sentido de P

$\frac{\partial M(s)}{\partial P}$ = Variación del momento flector por unidad de carga en la dirección y sentido de P

$\frac{\partial Q(s)}{\partial P}$ = Variación del esfuerzo cortante por unidad de carga en la dirección y sentido de P

$\frac{\partial M_T(s)}{\partial P}$ = Variación del momento torsor por unidad de carga en la dirección y sentido de P

Es práctica habitual, en el cálculo manual de vigas y estructuras reticuladas, despreciar los efectos en los movimientos de una pieza causados por los esfuerzos axial y cortante.

Por otra parte, si la estructura es plana, y las cargas a las que se ve sometida están contenidas en el plano de la estructura, no aparecen momentos torsores en la misma.

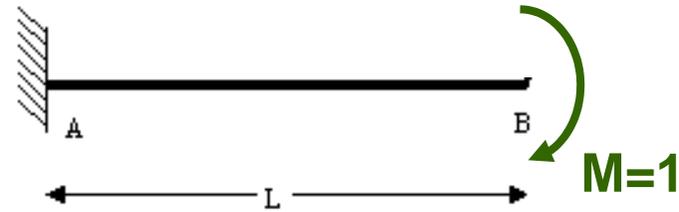
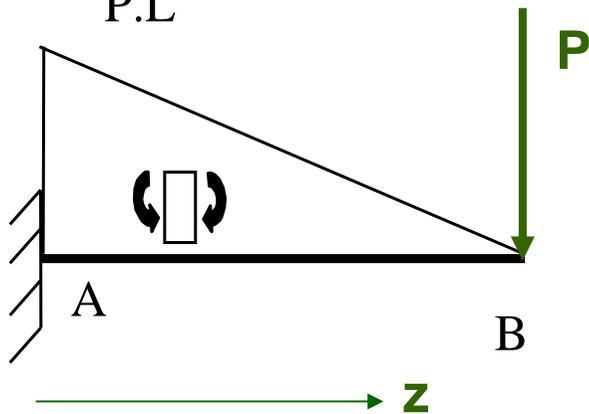
Por todo esto, la expresión del Teorema de Castigliano que utilizaremos será la que se deriva del ejemplo siguiente:

Veamos cómo aplicar esto último al problema que acabamos de analizar



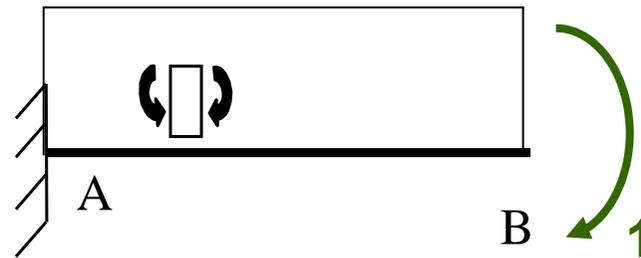
Estado 0 (estado real)

P.L



Estado I (estado auxiliar)

M



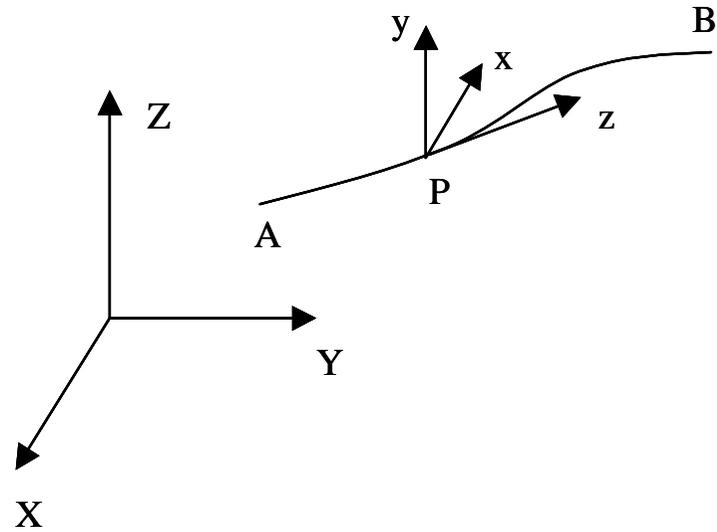
En el sentido del momento auxiliar unidad

$$\theta_B = \int_A^B \left[\frac{N^0(z)}{AE} N^I(z) + \frac{M^0(z)}{EI_x} M^I(z) + \frac{Q^0(z)}{G\Omega_c} Q^I(z) + \frac{M_T^0(z)}{GK} M_T^I(z) \right] dz$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI_x} \int_{z=0}^{z=L} [P(L-z)] [1] dz = \frac{PL^2}{2EI_x}$$

FÓRMULAS DE NAVIER-BRESSE

FÓRMULAS DE NAVIER-BRESSE



$$\vec{r} = \overrightarrow{PB}$$

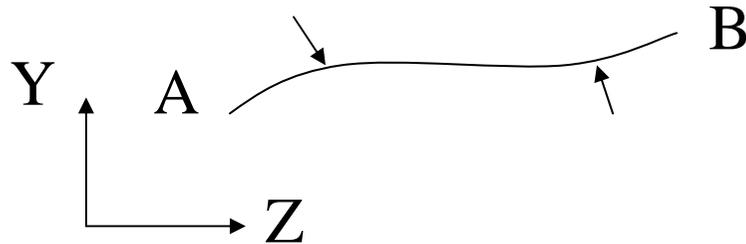
$$\vec{\theta}_B = \vec{\theta}_A + \int_A^B d\vec{\theta}$$

Giro sólido rígido Suma de giros de las rebanadas

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{r}_{AB} + \int_A^B d\vec{u} + \int_A^B d\vec{\theta} \wedge \vec{r}$$

Desplazamiento sólido rígido Desplazamiento inducido por los giros de las rebanadas Desplazamiento inducido por los propios de las rebanadas

PIEZA PLANA CON CARGAS EN SU PLANO



Esfuerzos y desplazamientos en ejes locales:

$$Q_x = M_z = M_y = 0$$

$$u_x = \theta_y = \theta_z = 0$$

$$M_x = M$$

$$u_y = v$$

$$Q_y = Q$$

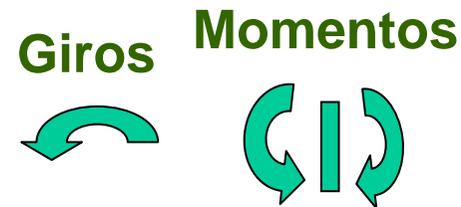
$$u_z = w$$

$$\theta_x = \theta$$

Giros y desplazamientos en ejes globales:

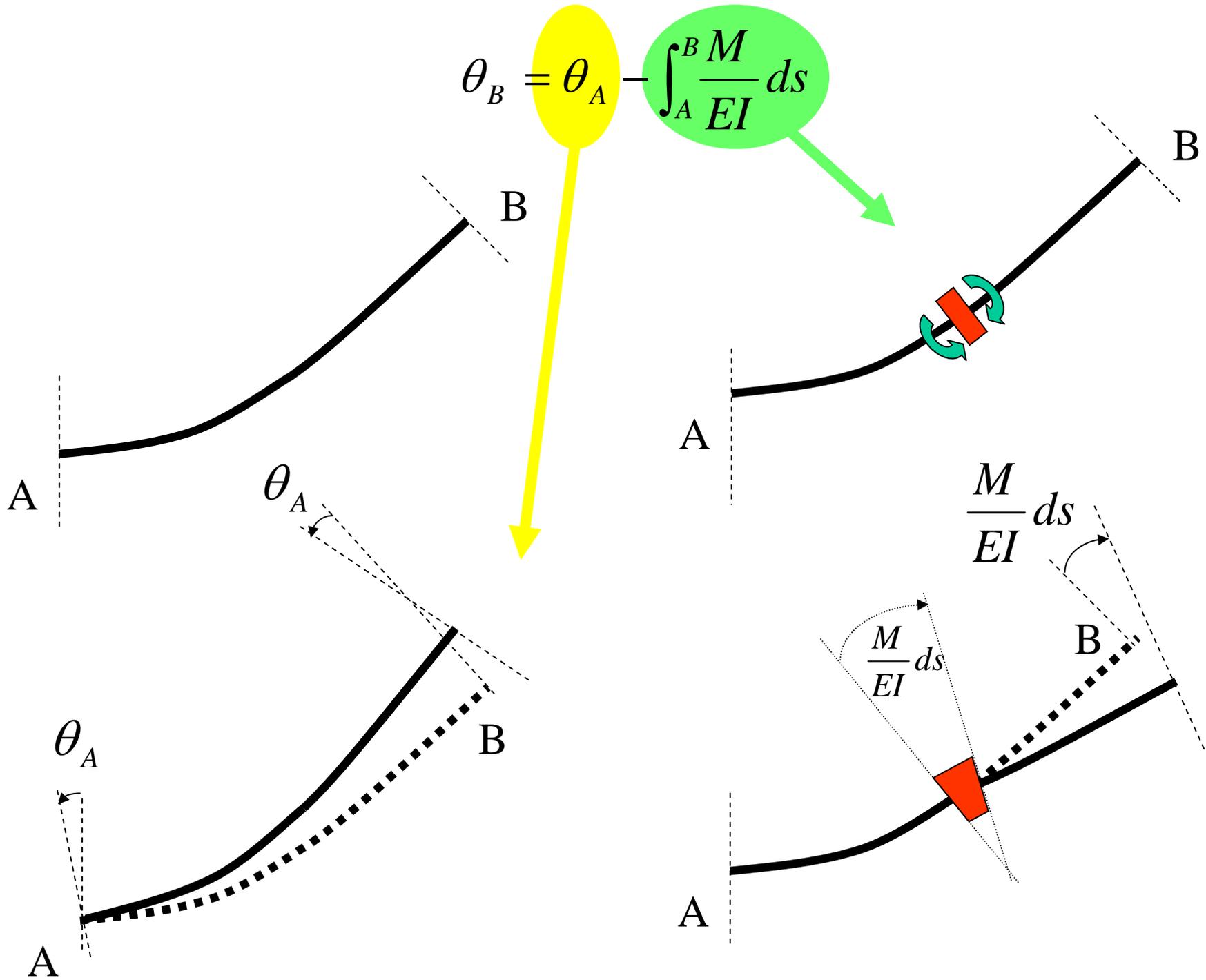
$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M}{EI} ds$$

Criterios de signos:



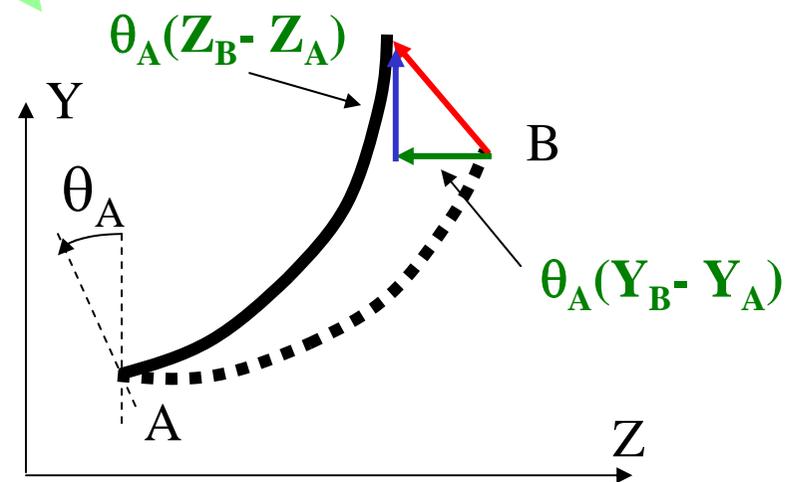
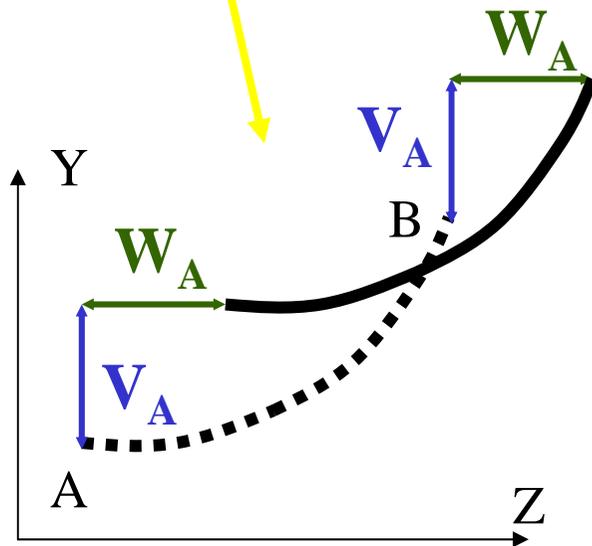
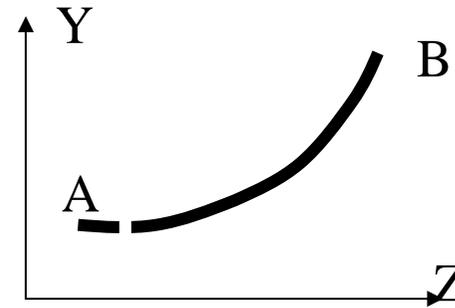
$$v_B = v_A + \theta_A (Z_B - Z_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{G\Omega_c} dZ \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (Z_B - Z) ds$$

$$w_B = w_A + \theta_A (Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dZ - \frac{Q}{G\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$



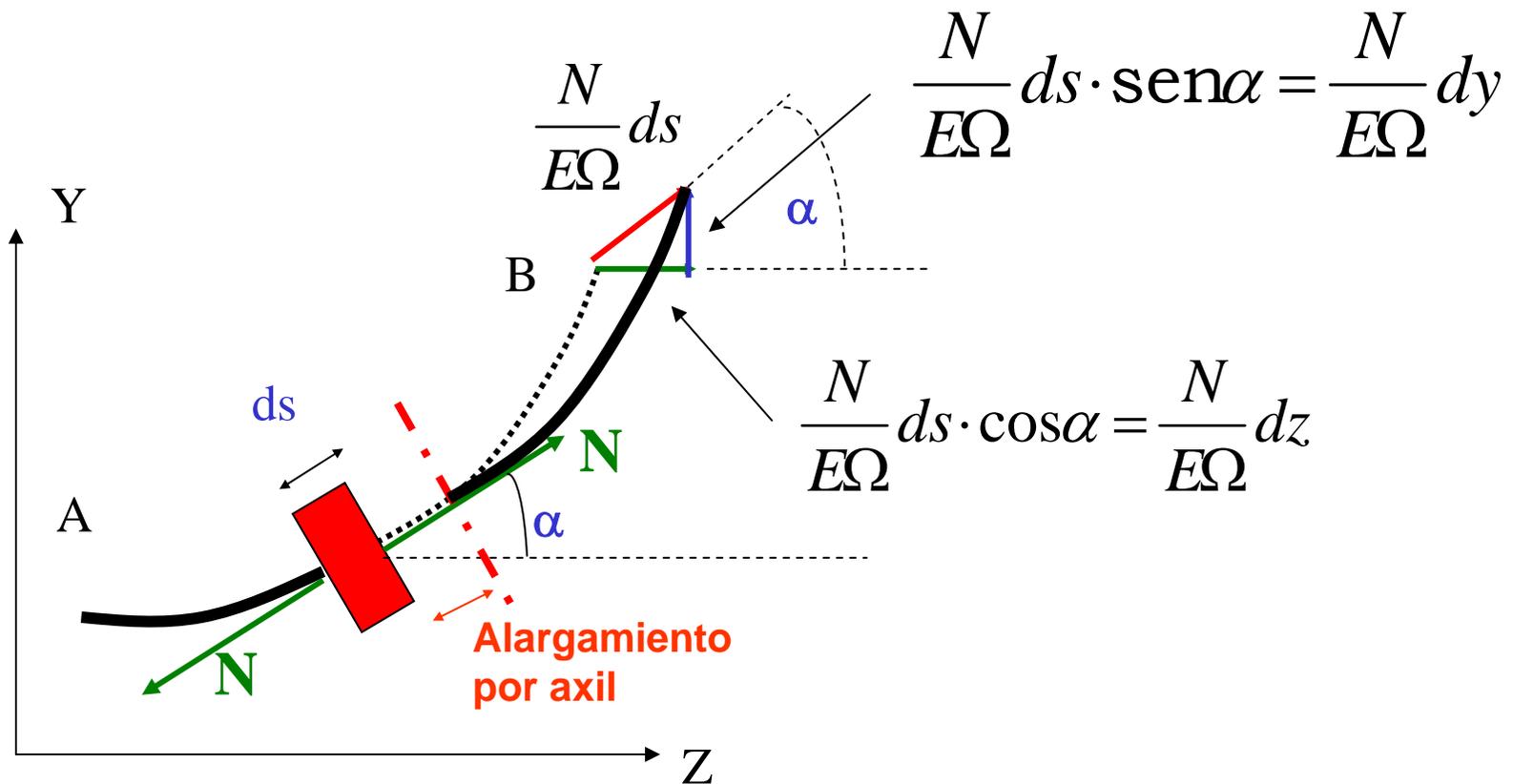
$$v_B = v_A + \theta_A(Z_B - Z_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{G\Omega_c} dZ \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (Z_B - Z) ds$$

$$w_B = w_A + \theta_A(Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dZ - \frac{Q}{G\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$



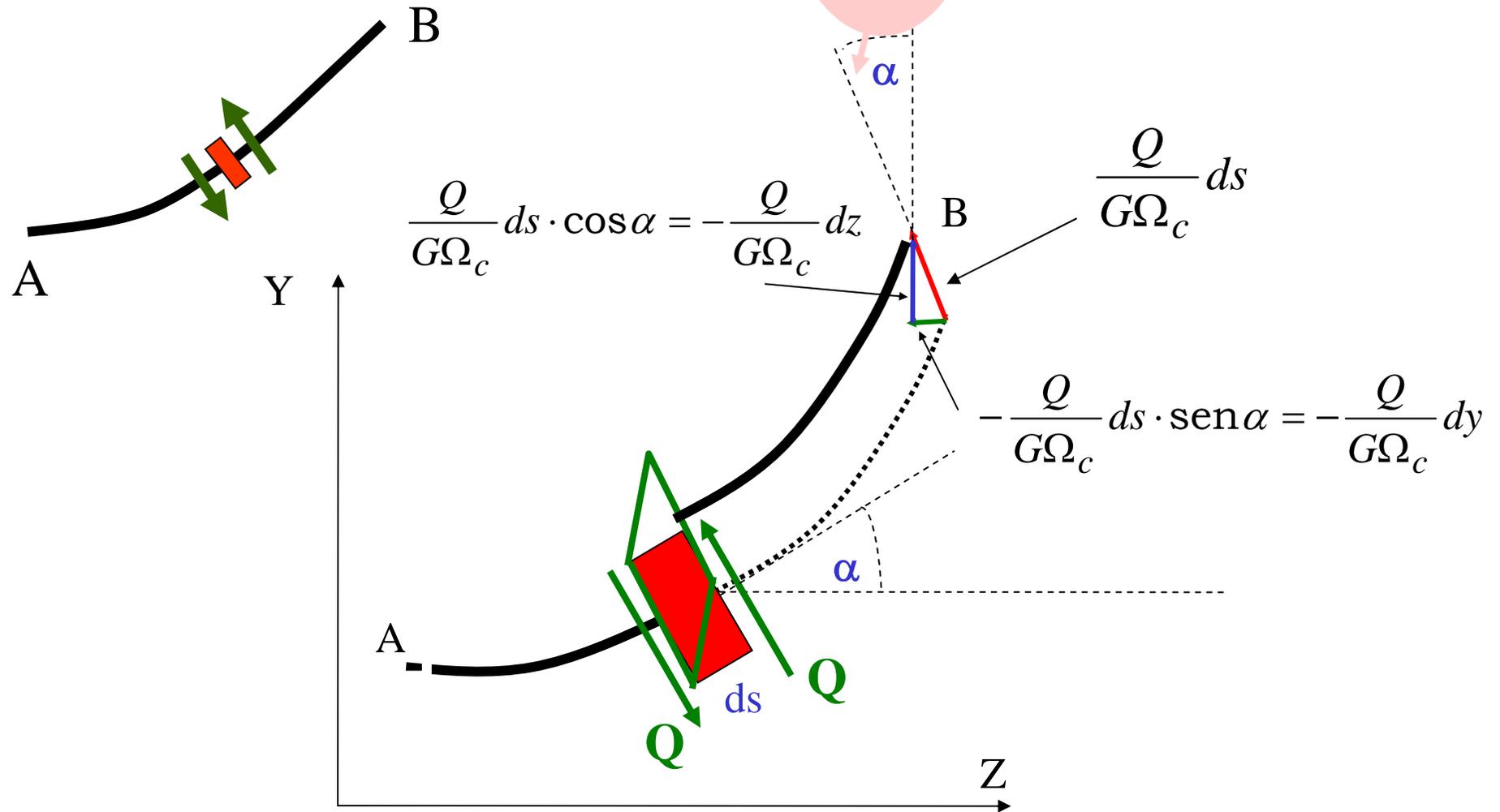
$$v_B = v_A + \theta_A(Z_B - Z_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{G\Omega_c} dZ \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (Z_B - Z) ds$$

$$w_B = w_A + \theta_A(Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dZ - \frac{Q}{G\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$



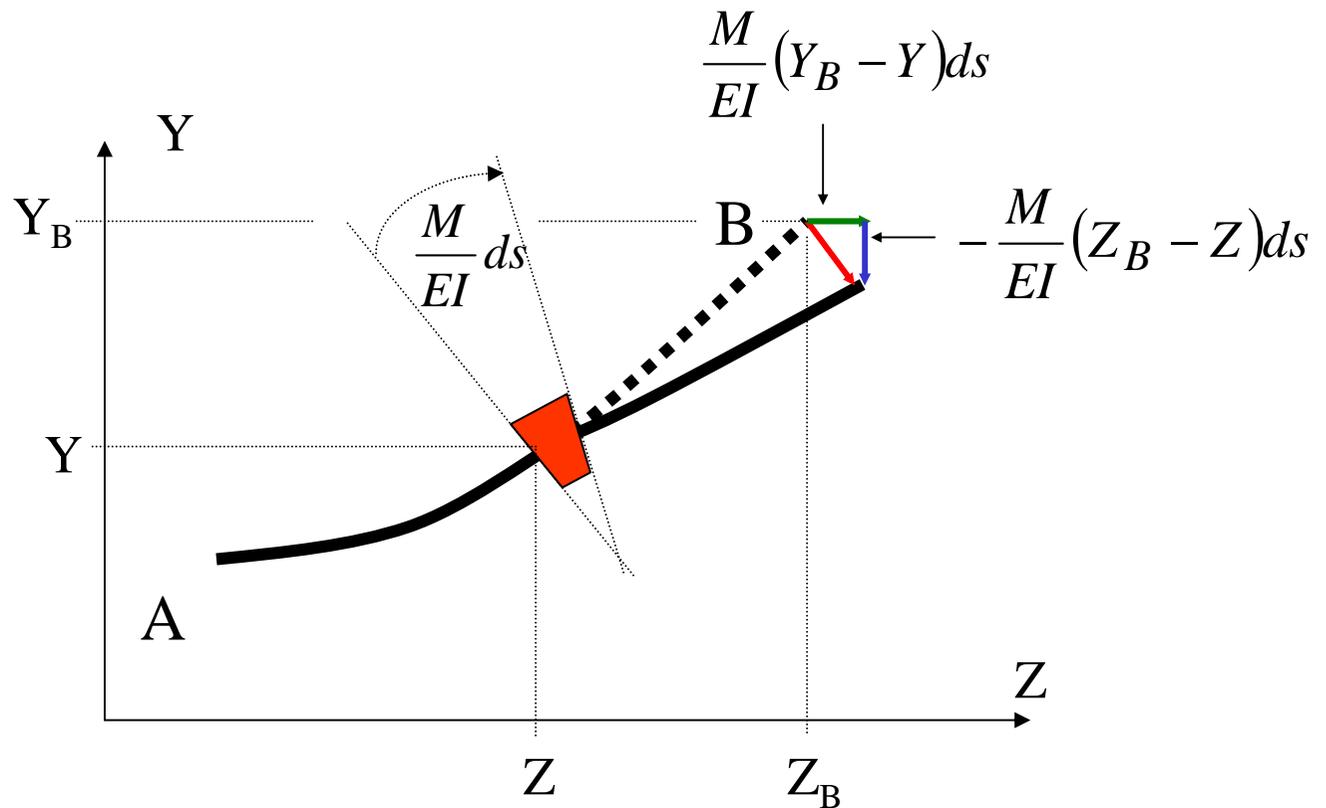
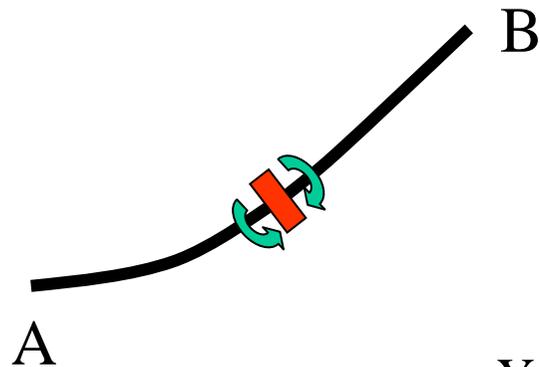
$$v_B = v_A + \theta_A (Z_B - Z_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{G\Omega_c} dZ \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (Z_B - Z) ds$$

$$w_B = w_A + \theta_A (Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dZ - \frac{Q}{G\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$

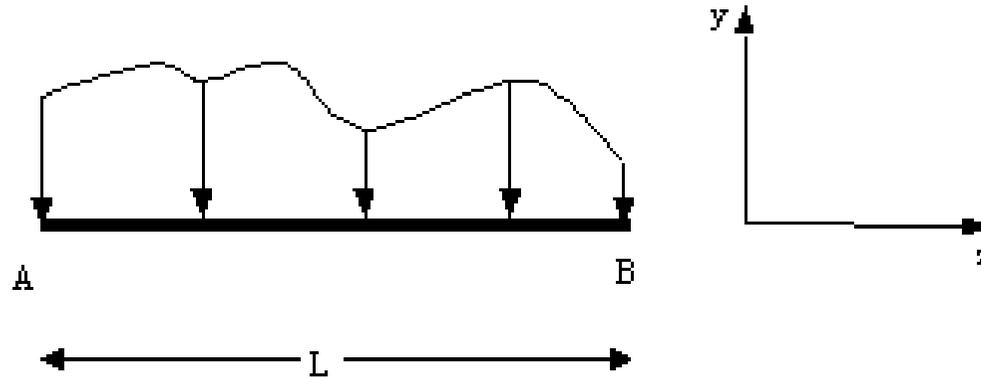


$$v_B = v_A + \theta_A(Z_B - Z_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{G\Omega_c} dZ \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (Z_B - Z) ds$$

$$w_B = w_A + \theta_A(Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dZ - \frac{Q}{G\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$



PIEZA RECTA CON CARGAS EN SU PLANO



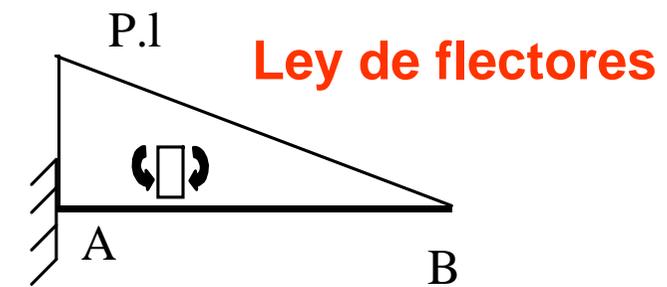
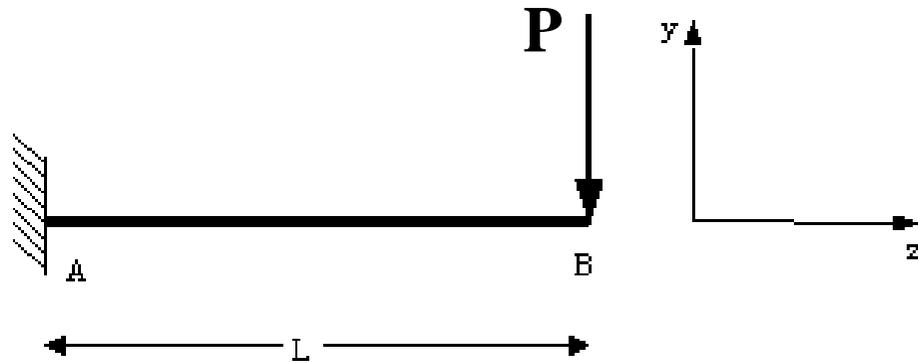
$$ds = dz \quad dy = 0 \quad y_A = y_B = 0$$

$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

$$v_B = v_A + \theta_A (z_B - z_A) + \int_A^B \frac{Q}{G\Omega_c} dz - \int_A^B \frac{M}{EI} (z_B - z) dz$$

$$w_B = w_A + \int_A^B \frac{N}{E\Omega} dz$$

Ejemplo: Determinar la flecha en B



$$W_A = W_B$$

$$v_B = \int_A^B \frac{-P}{G\Omega_c} dz - \int_A^B \frac{P(L-z)}{EI} (1-z) dz$$

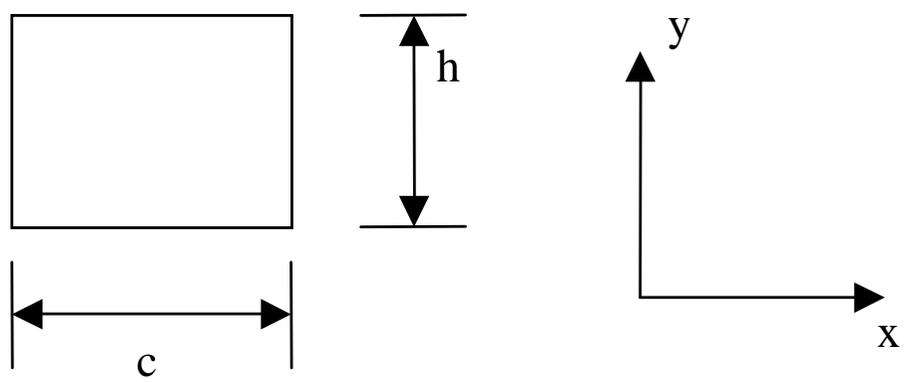
$$v_B = -\frac{PL}{G\Omega_c} - \frac{P}{EI} \left[-\frac{(L-z)^3}{3} \right]_{z=0}^{z=L}$$

Cortante

$$v_B = -\frac{PL}{G\Omega_c} - \frac{PL^3}{3EI}$$

Flexión

Pero, ¿qué sucede en la práctica?



The diagram shows a rectangular cross-section with width c and height h . A coordinate system is defined with the x -axis pointing to the right and the y -axis pointing upwards.

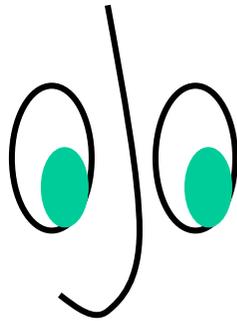
$$V_B^{\text{cor tan te}} = -\frac{PL}{G\Omega_c}$$

$$V_B^{\text{flexión}} = -\frac{PL^3}{3EI}$$

$$\frac{V_B^{\text{cor tan te}}}{V_B^{\text{flexión}}} = \frac{PL/G\Omega_c}{PL^3/3EI} = \frac{3EI}{G\Omega_c L^2} = \frac{3E \frac{1}{12} ch^3}{\frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{ch}{1,2} L^2} = 0,6 \left(\frac{h}{L} \right)^2 (1+\nu)$$

Si hacemos, por ejemplo, $L/h = 50$, $\nu=0,2$, el cociente anterior resulta ser 0,000288.

La flecha debida al cortante es despreciable (0,03%) frente a la de flexión.



En Resistencia de Materiales y en Cálculo de Estructuras se suele despreciar la contribución a los desplazamientos y giros debidos a los esfuerzos axial y cortante.

Esto, de ninguna manera, quiere decir que dichos esfuerzos sean nulos en la pieza.

Pieza recta con cargas en su plano despreciando las deformaciones inducidas por esfuerzo cortante y esfuerzo axial

$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

$$v_B = v_A + \theta_A (z_B - z_A) + \int_A^B \frac{Q}{G\Omega_c} dz - \int_A^B \frac{M}{EI} (z_B - z) dz$$

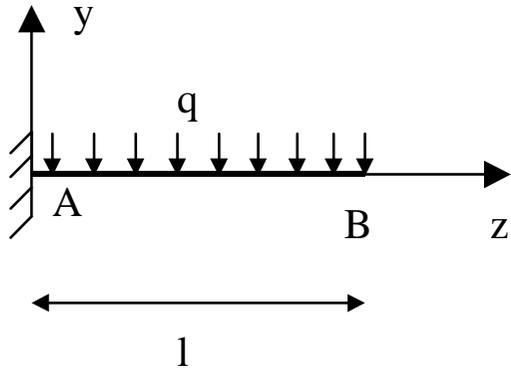
$$w_B = w_A + \int_A^B \frac{N}{E\Omega} dz$$

$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

$$v_B = v_A + \theta_A (z_B - z_A) - \int_A^B \frac{M}{EI} (z_B - z) dz$$

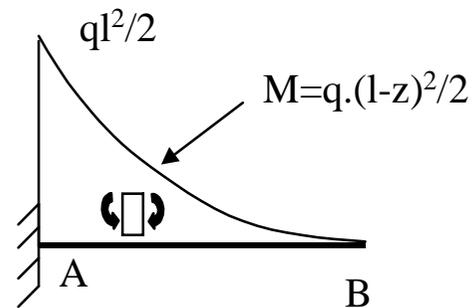
$$w_B = w_A$$

EJEMPLO:



¿Flecha y giro en B?

Ley de momentos flectores:

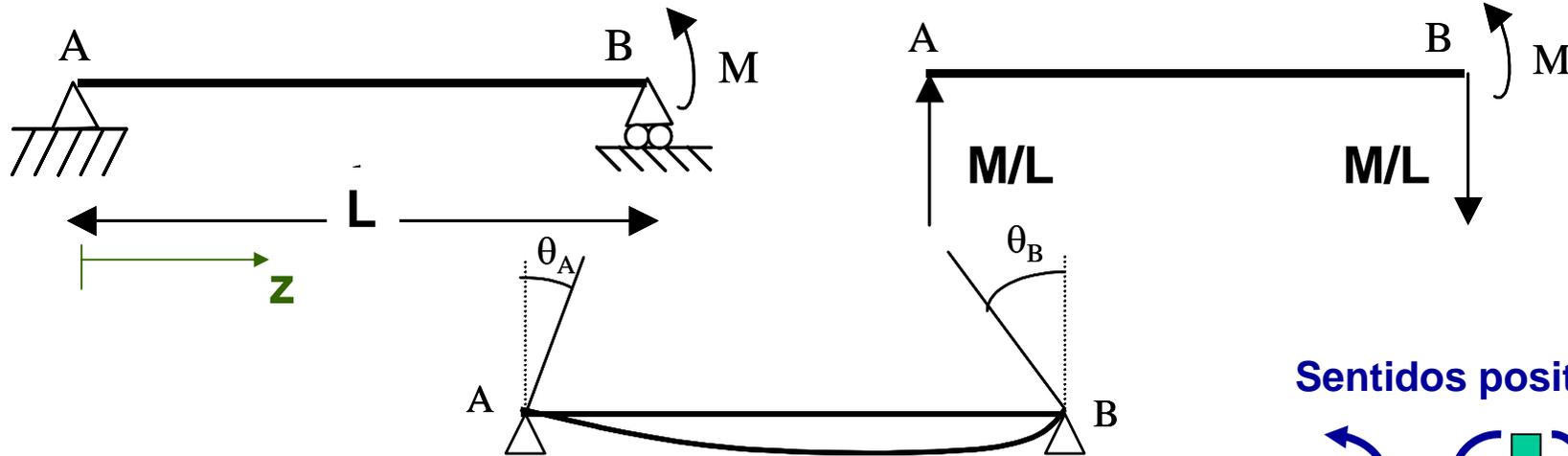


$$\theta_B = \int_A^B \frac{M}{EI} dz = \int_0^l \frac{q(l-z)^2}{2EI} dz = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$\downarrow v_B = \int_A^B \frac{M \cdot (L-z)}{2EI} dz = \int_A^B \frac{q \cdot (L-z)^3}{2EI} dz = \frac{q \cdot L^4}{8EI}$$

Otras aplicaciones en problemas isostáticos:

Determinar giros en vigas apoyadas



Sentidos positivos:



giros Momentos flectores

$$\uparrow v_B = 0 = v_A + \theta_A \cdot L - \int_A^B \frac{M(z)}{EI} (L-z) dz = \theta_A \cdot L - \int_0^L \frac{\frac{M}{L}z}{EI} (L-z) dz = -\frac{ML^2}{6EI}$$

$$\theta_A = -\frac{ML}{6EI}$$

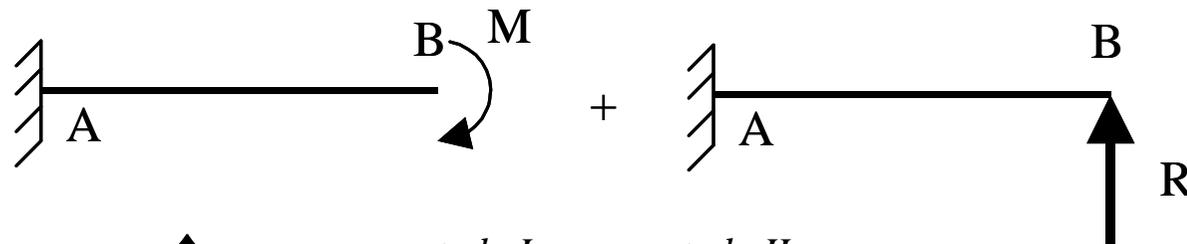
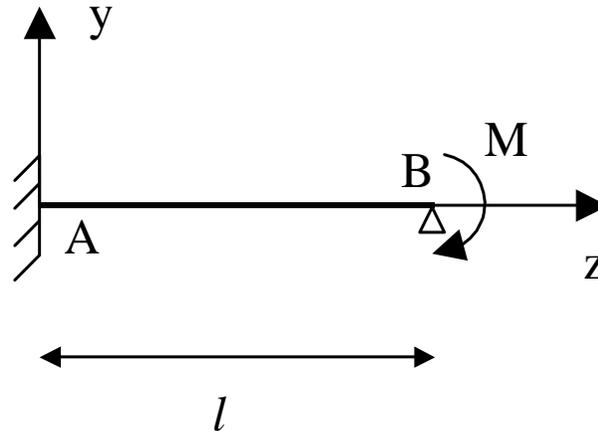
$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M(z)}{EI} dz = \theta_A - \int_0^L \frac{-M + \frac{M}{L}(L-z)}{EI} dz =$$

$$\theta_A \cdot l = -\frac{\frac{M}{L}l^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{Ml}{6EI} \text{ en sentido horario}$$

$$\theta_B (\text{antihorario}) = \theta_B (\text{antihorario producido por } M / l) + \theta_B (\text{antihorario producido por } M) + \theta_A (\text{antihorario})$$

$$\theta_B (\text{antihorario}) = -\frac{Ml}{2EI} + \frac{Ml}{EI} - \frac{Ml}{6EI} \Rightarrow \theta_B (\text{antihorario}) = \frac{Ml}{3EI}$$

APLICACIÓN A PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS



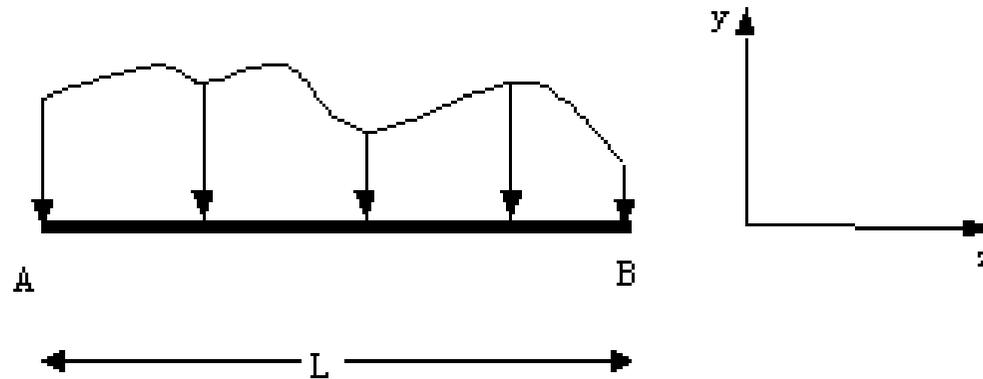
$$\uparrow v_B = v_B^{\text{estado I}} + v_B^{\text{estado II}} = 0$$

$$\uparrow v_B^{\text{estado I}} = -\int_A^B \frac{M(l-z)}{EI} dz = -\frac{Ml^2}{2EI}$$

$$\uparrow v_B^{\text{estado II}} = \frac{Rl^3}{3EI}$$

$$-\frac{Ml^2}{2EI} + \frac{Rl^3}{3EI} = 0 \Rightarrow R = \frac{3M}{2l}$$

ECUACIONES DE NAVIER-BRESSE PARA UNA PIEZA RECTA CON CARGAS EN SU PLANO DESPRECIANDO LA CONTRIBUCION A LOS MOVIMIENTOS DE LOS ESFUERZOS CORTANTES Y AXILES



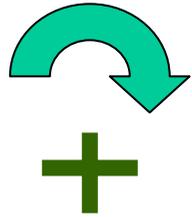
$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

$$v_B = v_A + \theta_A (z_B - z_A) - \int_A^B \frac{M}{EI} (z_B - z) dz$$

$$w_B = w_A$$

TEOREMAS DE MOHR

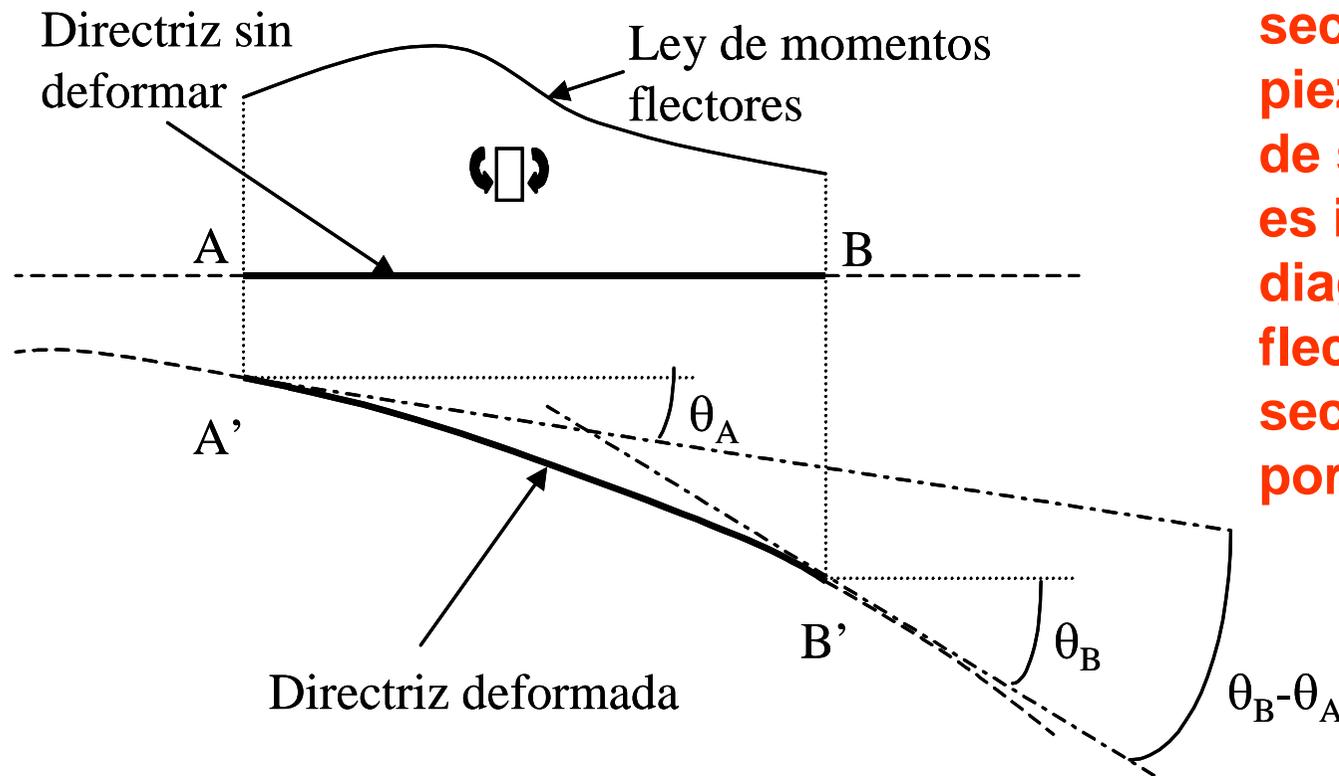
PRIMER TEOREMA DE MOHR



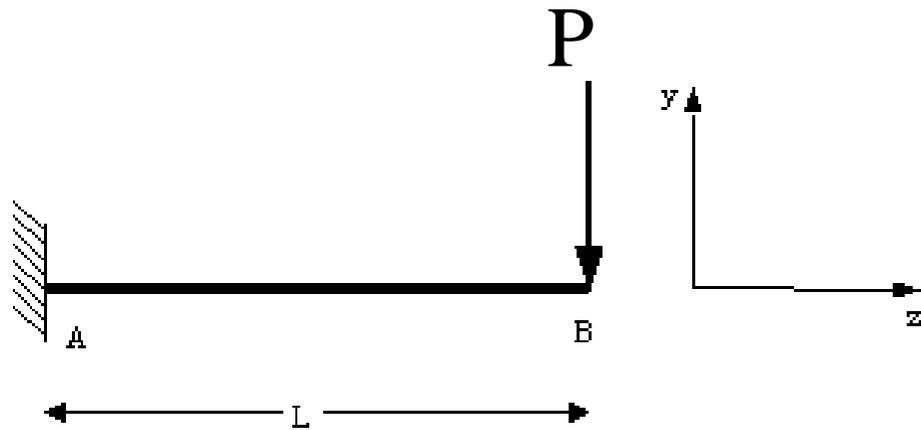
$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

$$\theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

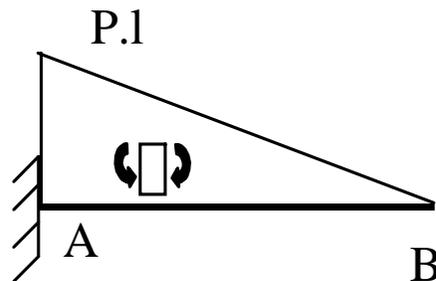
“El ángulo girado por la directriz entre dos secciones A y B de una pieza prismática recta de sección constante es igual al área del diagrama de momentos flectores entre ambas secciones dividido por el producto EI ”



EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRIMER TEOREMA DE MOHR



¿Giro en B?

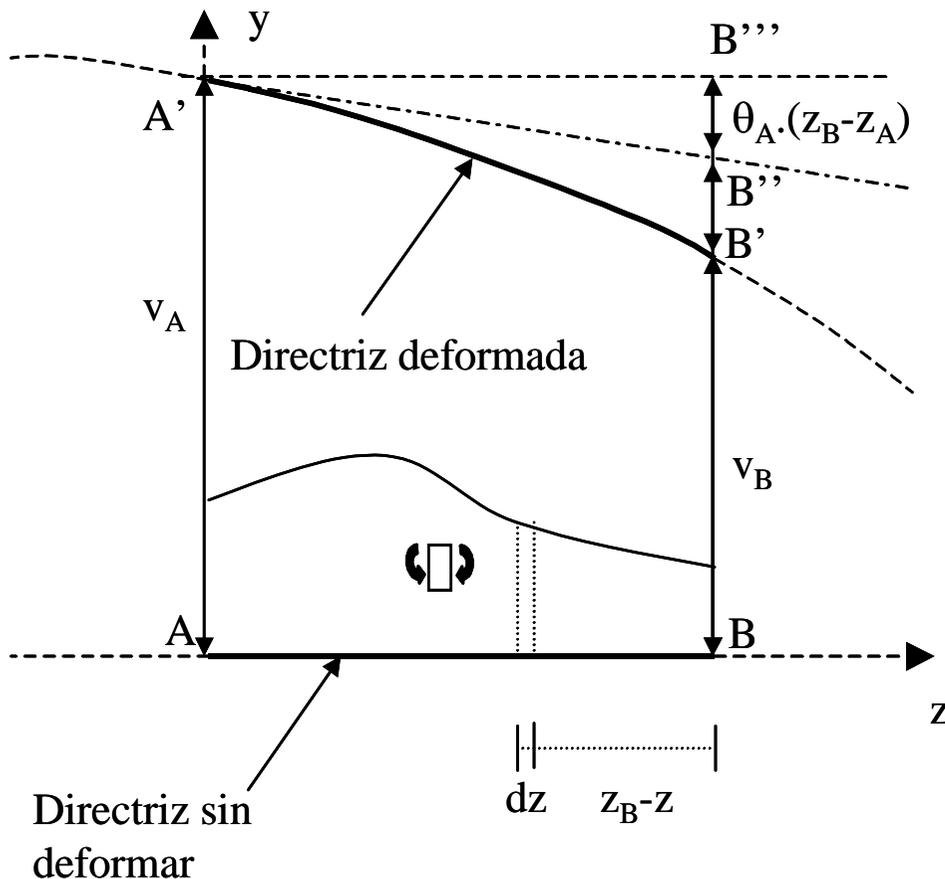


$$\theta_B - \theta_A = \frac{\left(\frac{1}{2} L \cdot (PL) \right)}{EI} = \frac{PL^2}{2EI}$$

(horario)

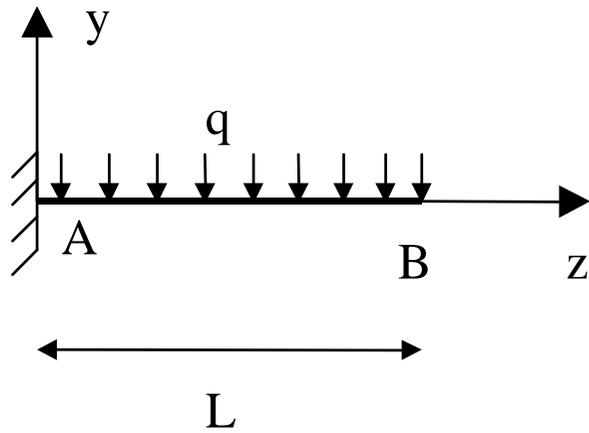
SEGUNDO TEOREMA DE MOHR

$$\uparrow v_B = \uparrow v_A - \theta_A (z_B - z_A) - \int_A^B \frac{M}{EI} (z_B - z) dz$$

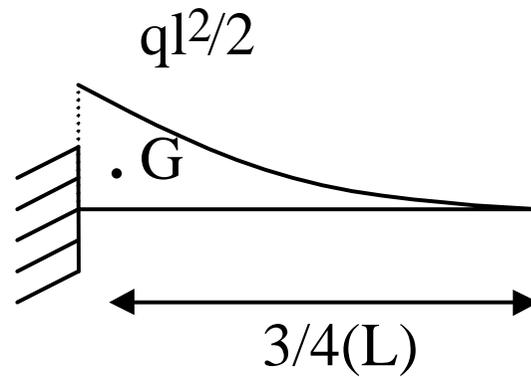


“La distancia, en dirección perpendicular a la directriz sin deformar, entre un punto B' de la directriz deformada a la recta tangente a la directriz deformada en otro (A) es igual al momento estático del área de momentos flectores entre las secciones A y B respecto del eje perpendicular a la directriz sin deformar que pasa por el punto B, dividido por el producto EI ”

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL SEGUNDO TEOREMA DE MOHR

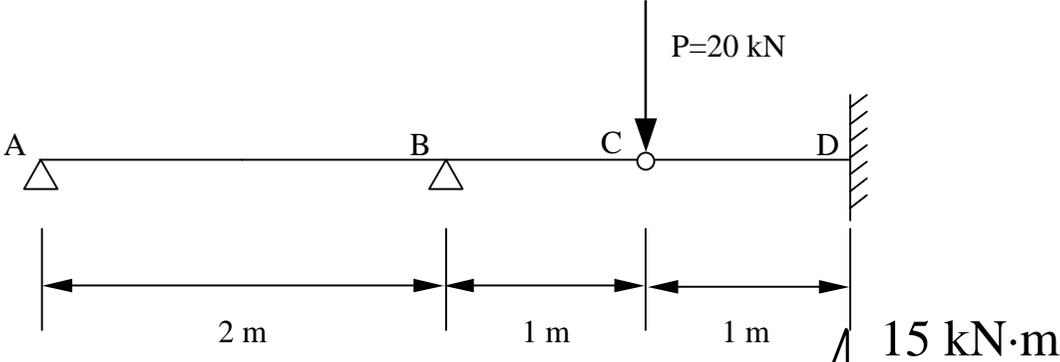


¿Flecha en B?

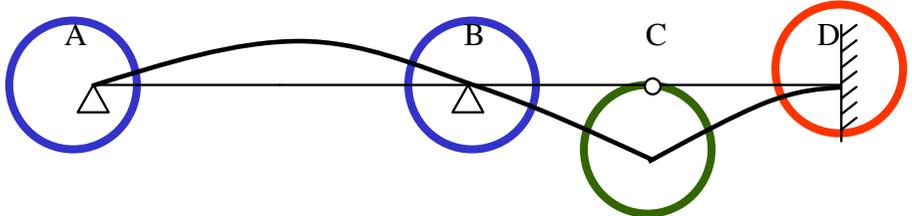
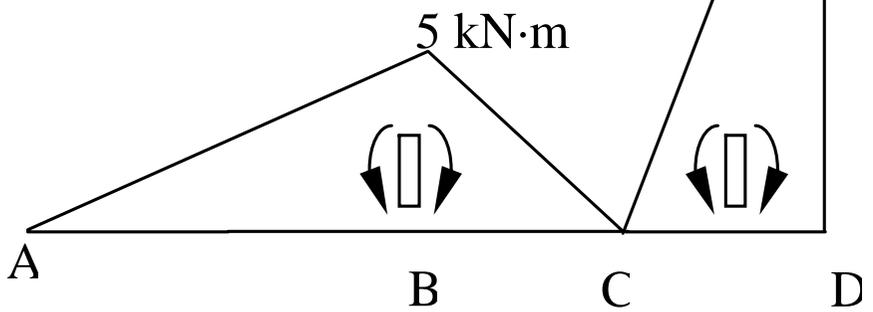


$$\downarrow v_B = \frac{\left(\frac{1}{3}l \cdot q \cdot l^2 / 2\right) \left(\frac{3}{4}l\right)}{EI} = \frac{ql^4}{8EI}$$

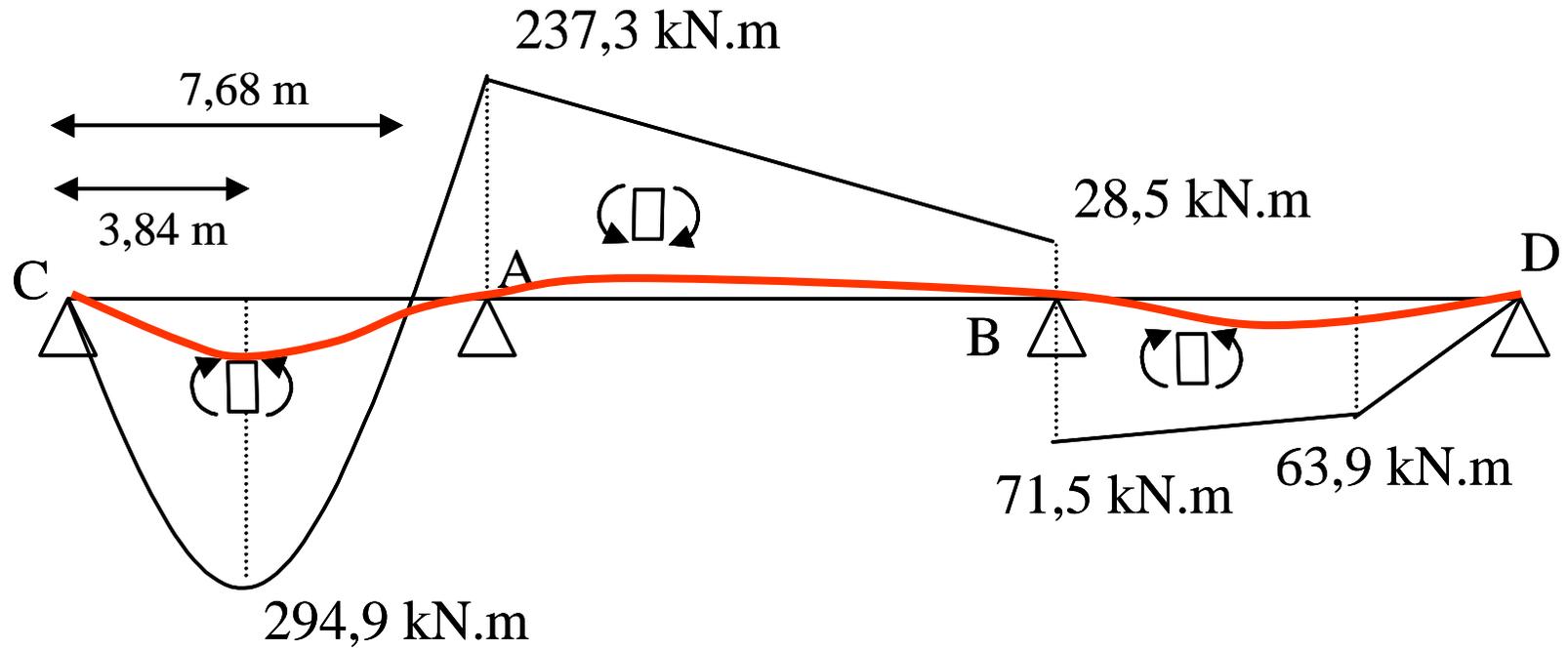
EL DIBUJO DE LA DEFORMADA A ESTIMA



Ley de flectores

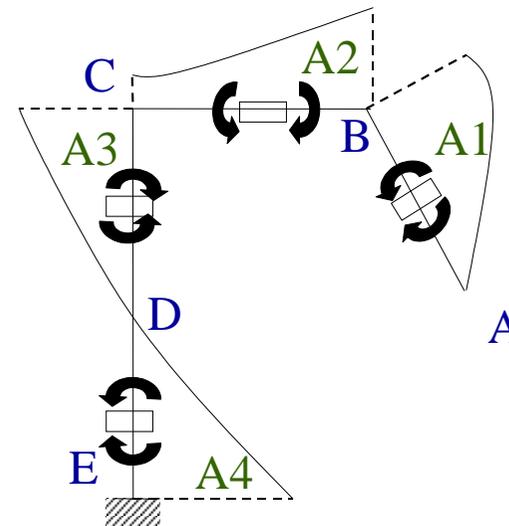
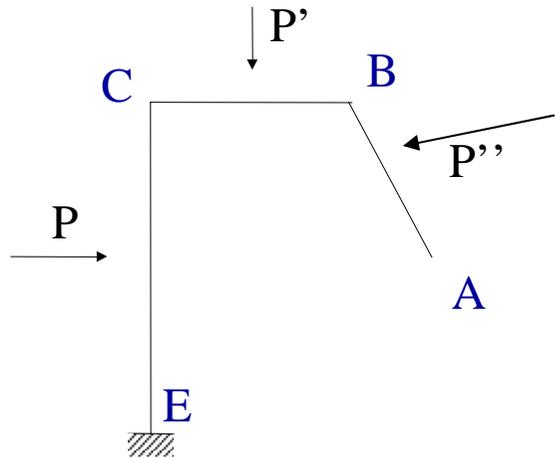


OTRO EJEMPLO:



Movimientos en barras prismáticas: Teoremas de Mohr (Cont.)

Generalización al caso de puntos angulosos en la directriz. Primer teorema

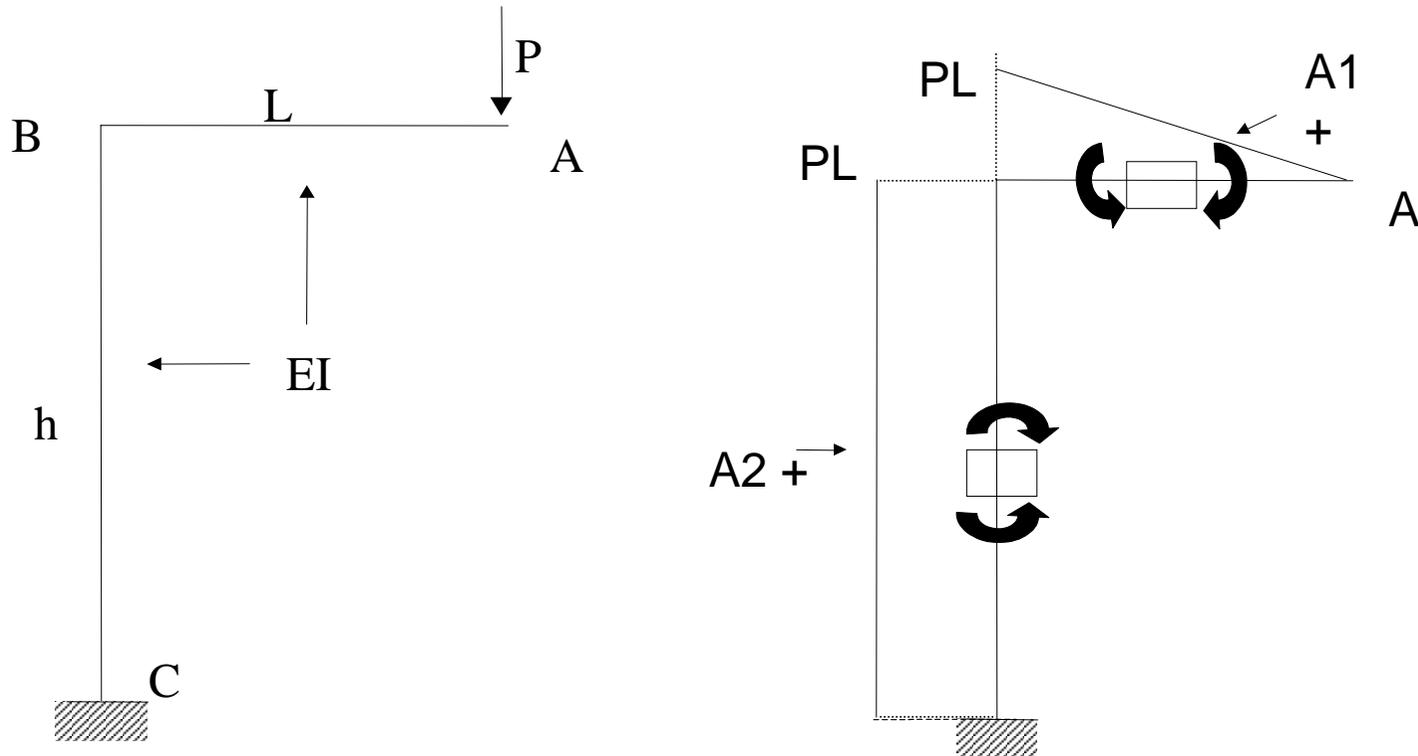


Sentidos positivos (por ejemplo):



$$\hat{\theta}_A = \frac{A_1}{(EI)_{AB}} + \frac{A_2}{(EI)_{BC}} + \frac{A_3}{(EI)_{CD}} - \frac{A_4}{(EI)_{DE}}$$

Ejemplo de aplicación: determinar el giro experimentado por la sección A (positivo si horario)

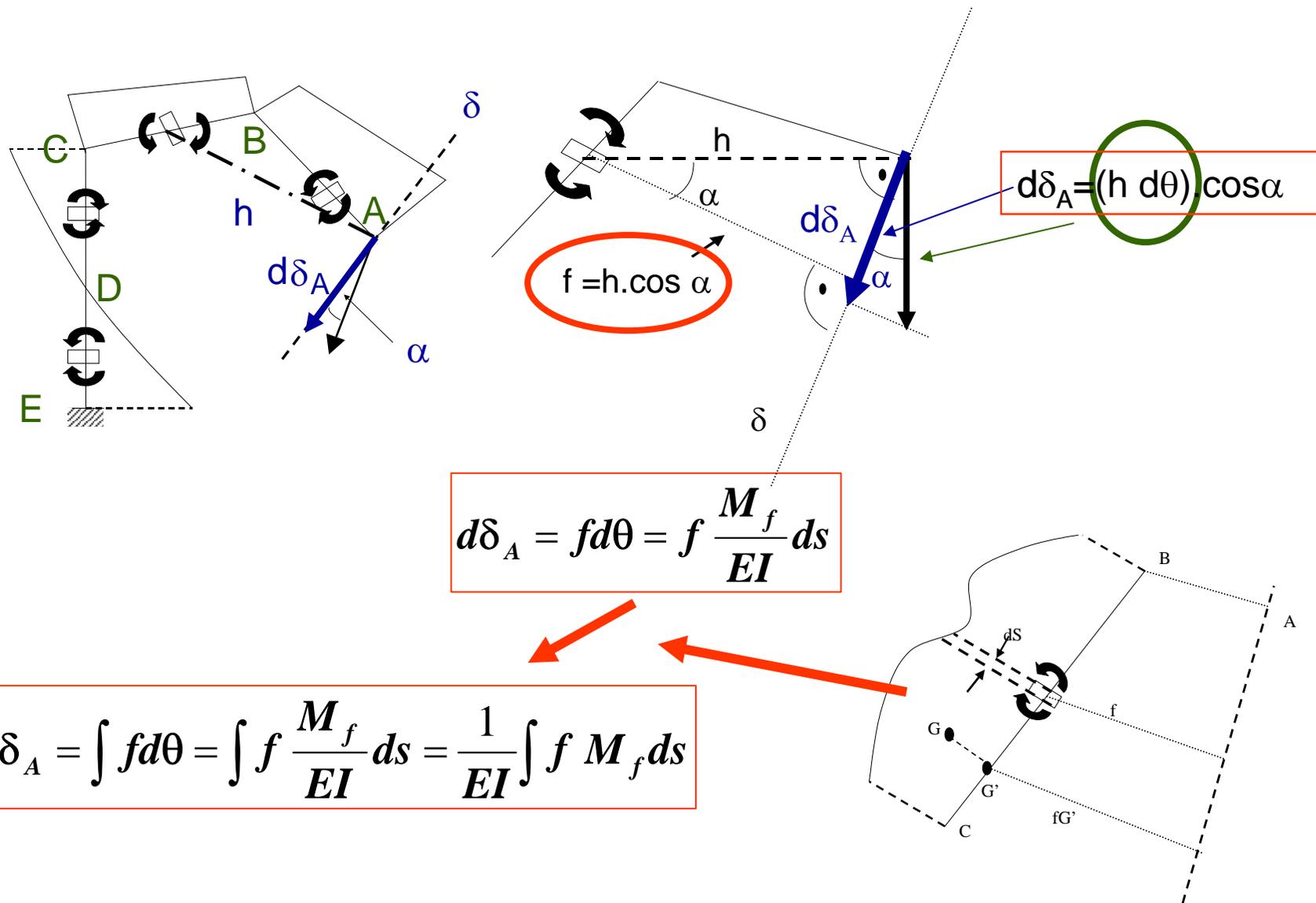


$$\theta_A = \frac{\left(\frac{1}{2}PL\right)L}{EI} + \frac{(PL)h}{EI} = \frac{PL\left(\frac{L}{2} + h\right)}{EI}$$

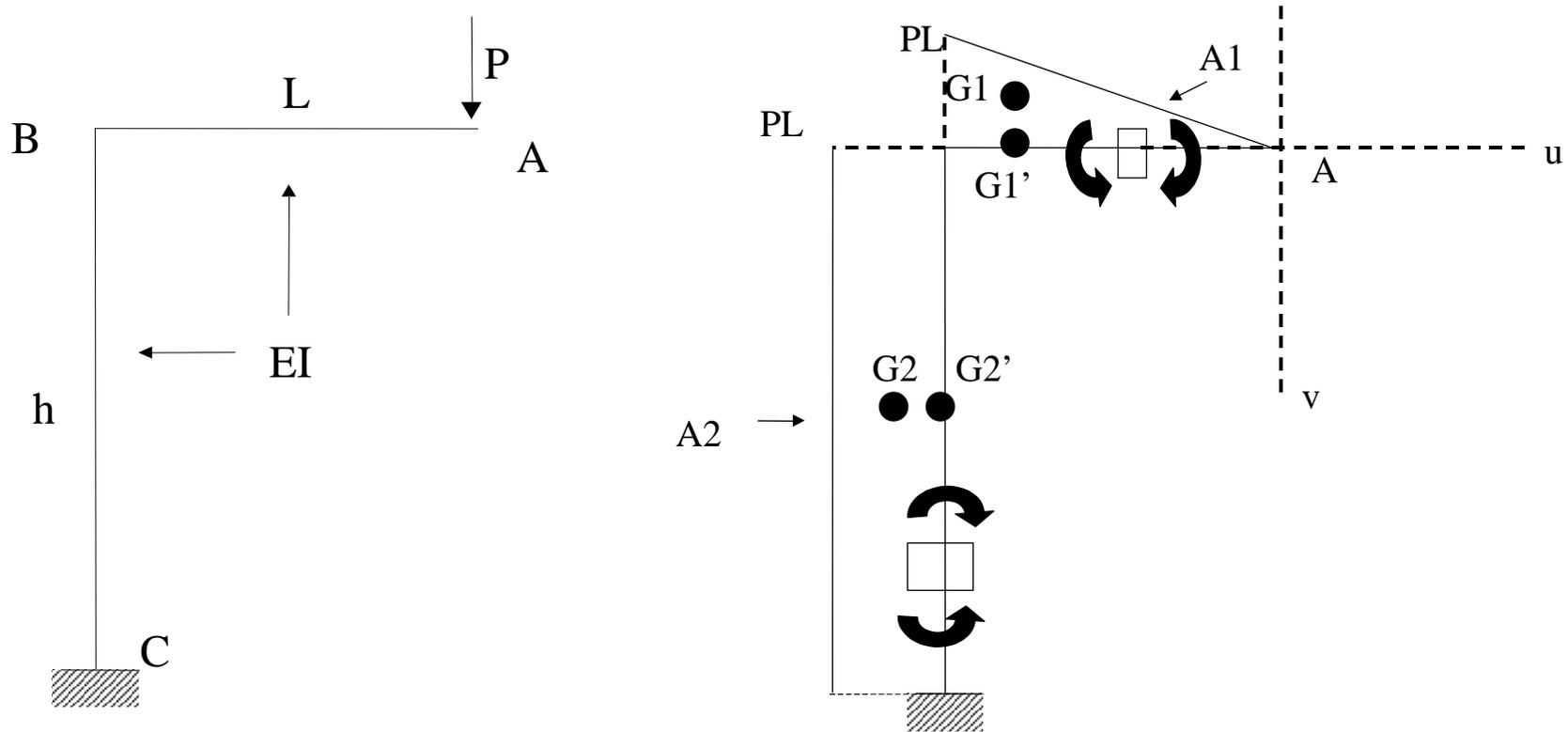
Movimientos en barras prismáticas: Teoremas de Mohr (Cont.)

Generalización al caso de puntos angulosos en la directriz. Segundo teorema

Caso a): el eje δ no corta a la directriz



Ejemplo de aplicación: determinar los desplazamientos en la sección A



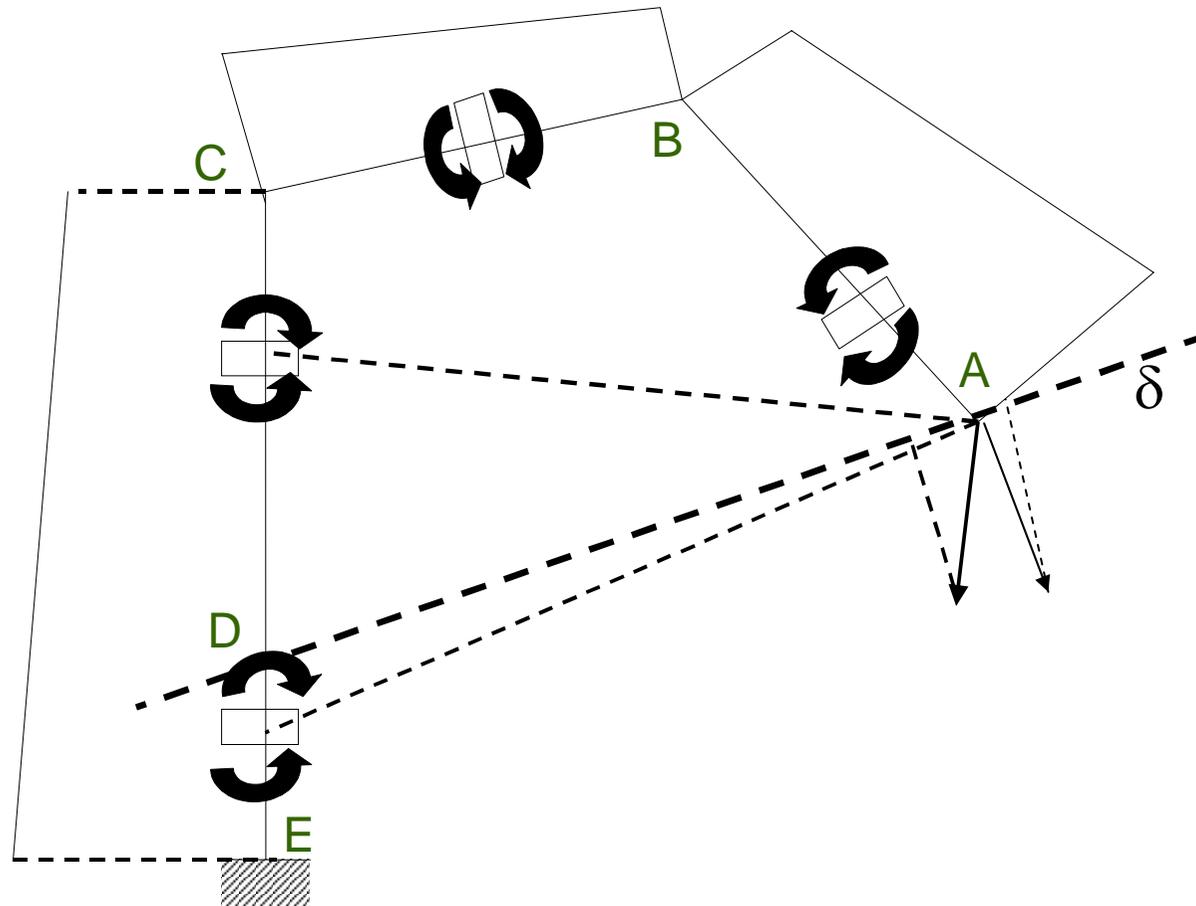
$$v_A = \frac{1}{EI} [A_1 \cdot \text{dist.}(G'_1, v) + A_2 \cdot \text{dist.}(G'_2, v)] = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} PL^2 \cdot \frac{2}{3} L + PL \cdot h \cdot L \right] = \frac{PL^2 \left(\frac{L}{3} + h \right)}{EI}$$

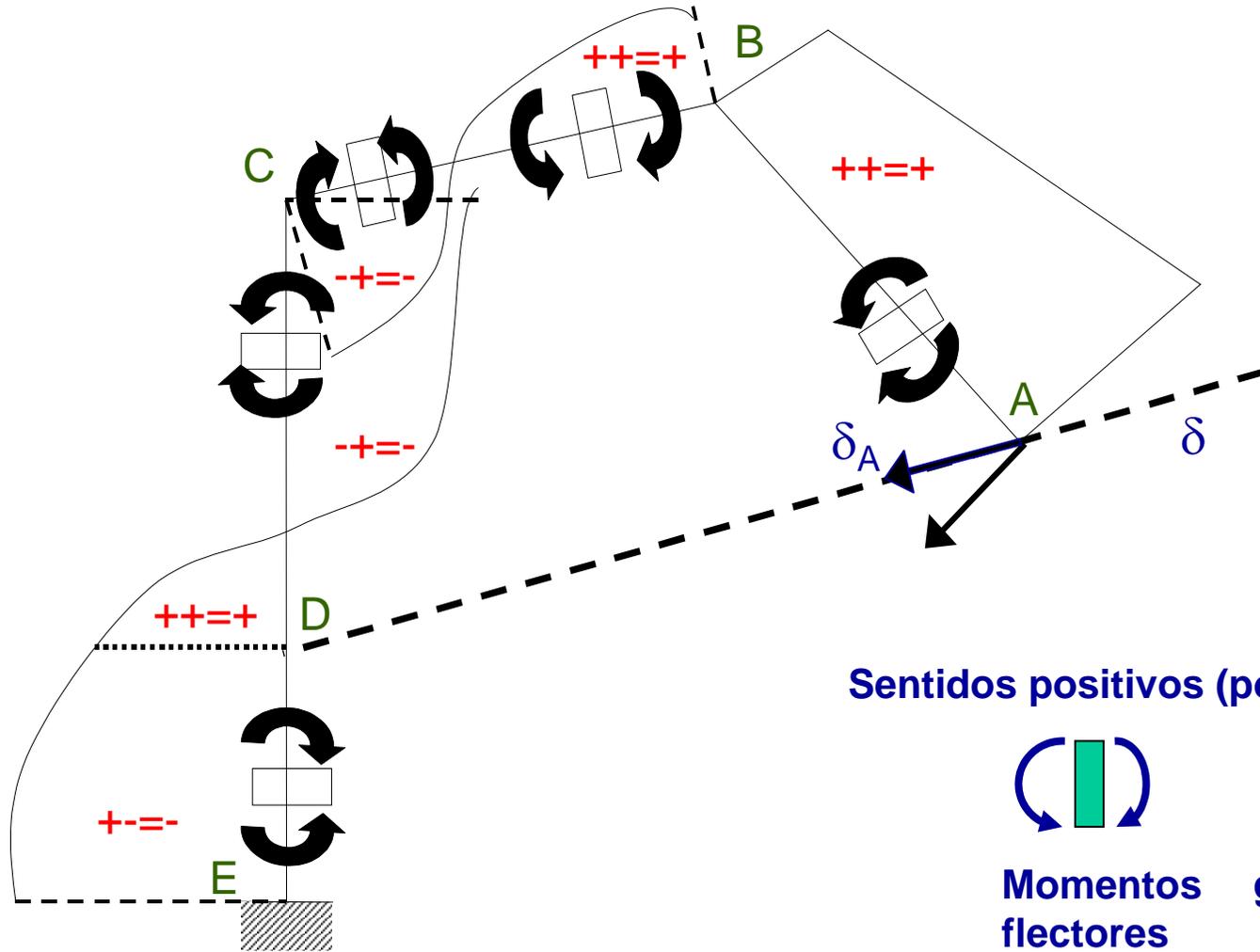
$$u_A = \frac{1}{EI} A_2 \cdot \text{dist.}(G'_2, u) = \frac{1}{EI} PLh^2 \frac{h}{2} = \frac{PLh^2}{2EI}$$

Movimientos en barras prismáticas: Teoremas de Mohr (Cont.)

Generalización al caso de puntos angulosos en la directriz. Segundo teorema

Caso b): el eje δ corta a la directriz





Sentidos positivos (por ejemplo):



Momentos flectores



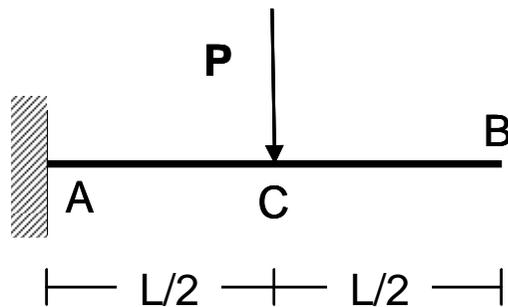
giros

TEOREMA DE RECIPROCIDAD DE MAXWELL-BETTI

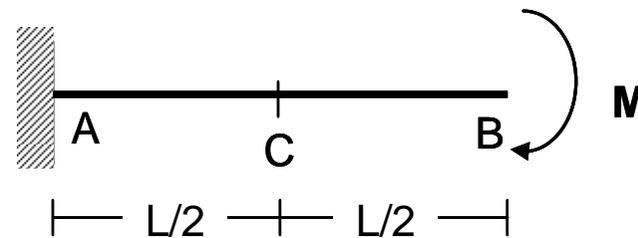
“En un sólido elástico el trabajo realizado por un sistema de cargas I al aplicar otro sistema de cargas II, es idéntico al trabajo realizado por el sistema de cargas II al aplicar el sistema de cargas I”

Ejemplo

Sobre la ménsula que se observa en la figura pueden actuar, separadamente, los sistemas de cargas distintos 1 y 2 que se recogen en la figura. Suponiendo constante el producto EI, determinar el valor de la flecha en C correspondiente al sistema 2 de cargas.



SISTEMA 1

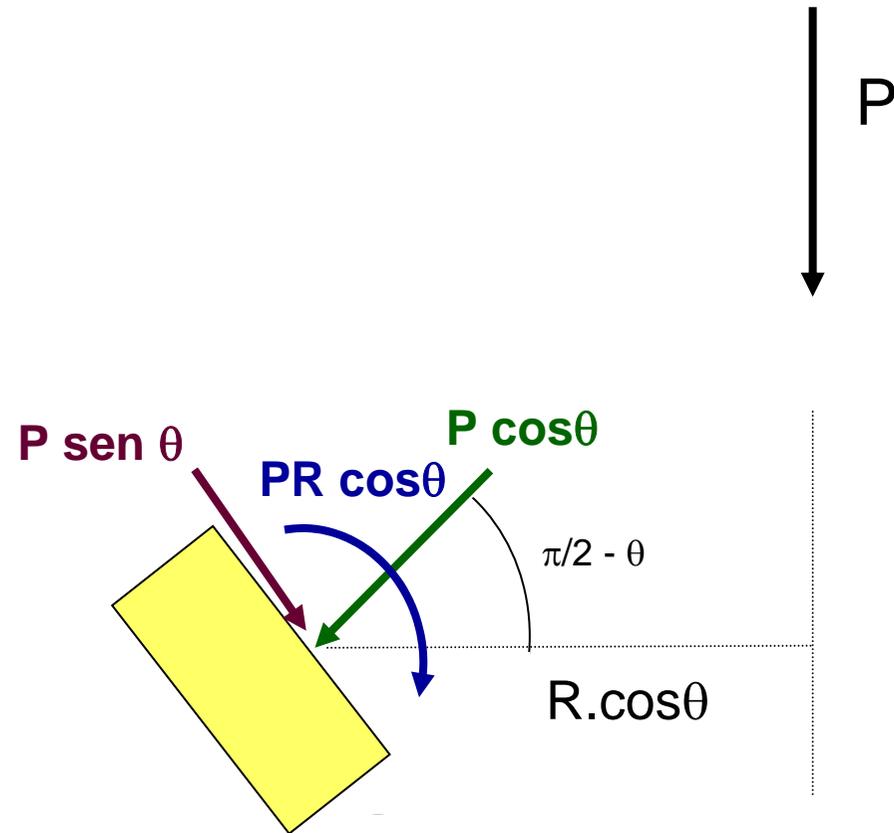
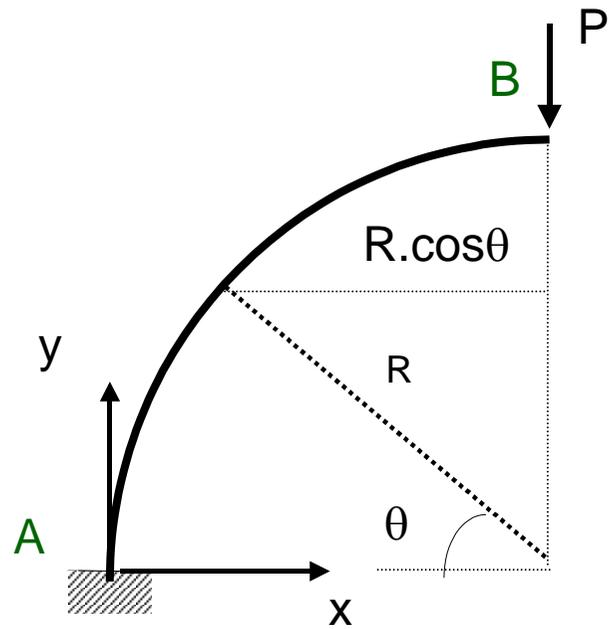


SISTEMA 2

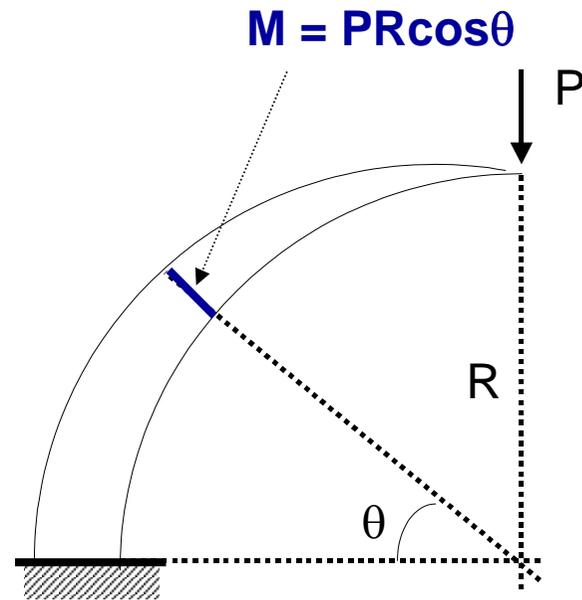
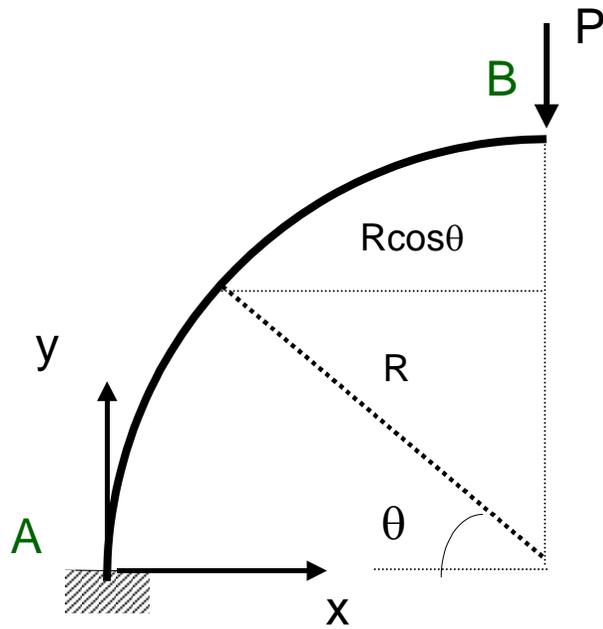
$$P \cdot v_C^{\text{sistema-2}} \downarrow = M \cdot \theta_B^{\text{sistema-1}} (\text{horario})$$

$$P \cdot v_C^{\text{sistema-2}} \downarrow = M \cdot \frac{P \left(\frac{L}{2} \right)^2}{2EI} \Rightarrow v_C^{\text{sistema-2}} \downarrow = \frac{ML^2}{8EI}$$

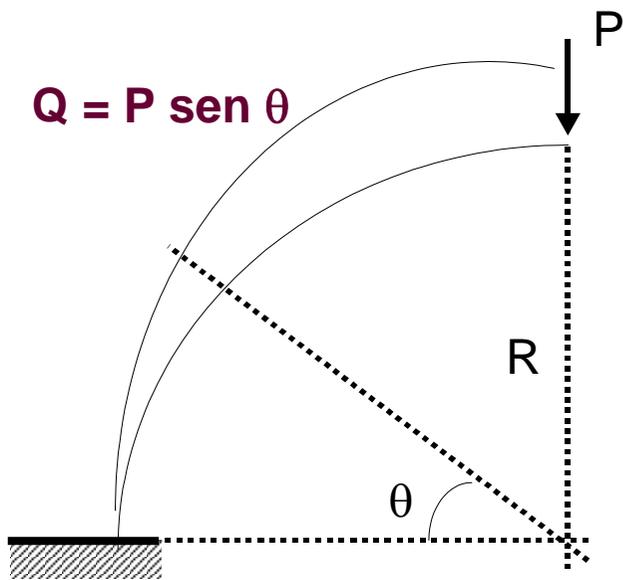
ARCOS: PIEZAS DE DIRECTRIZ CURVA



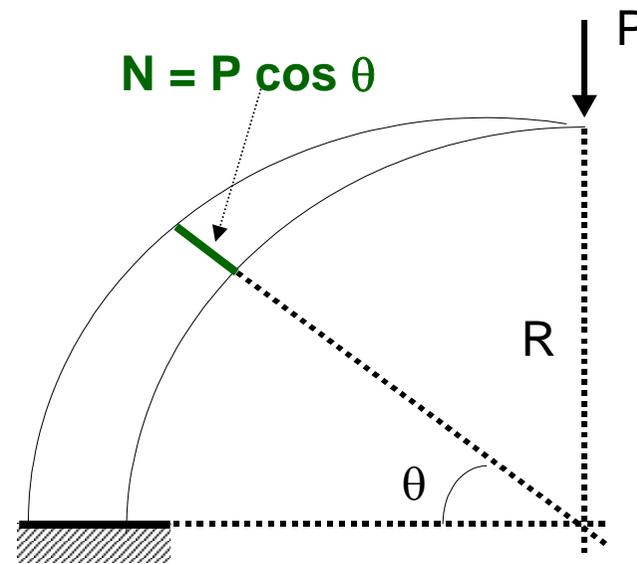
Leyes de esfuerzos



Momentos flectores

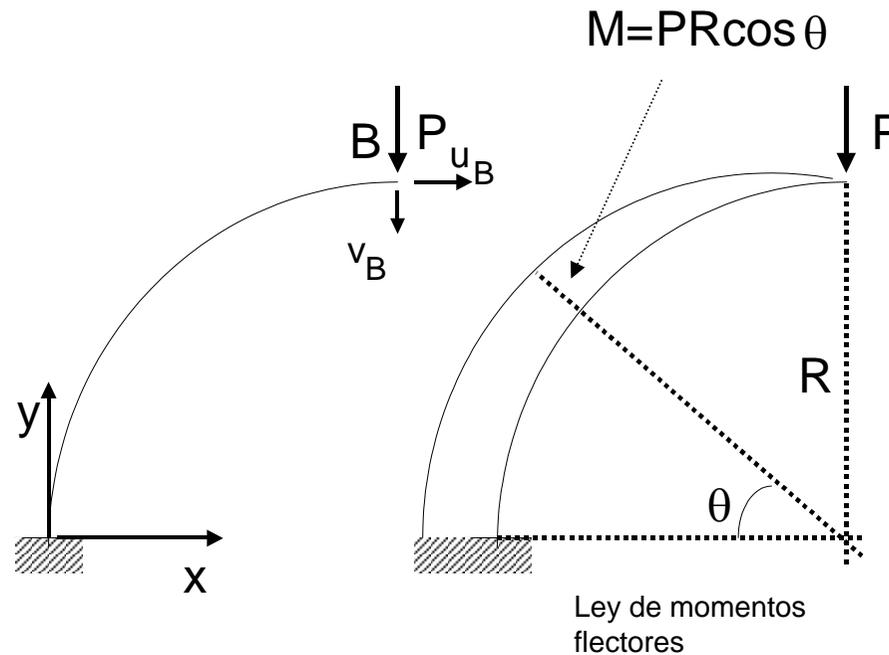


Esfuerzos cortantes



Esfuerzos axiales

Desplazamientos horizontal y vertical de la sección B (despreciando los movimientos inducidos por esfuerzos axil y cortante):



Desplazamiento vertical v_B

Utilizando Navier-Bresse:

debido al giro $d\theta$ de una rebanada genérica:

$$(v_B)_{d\theta} = d\theta (R \cos \theta) = \frac{M}{EI} (R \cos \theta) = \frac{PR^2 \cos^2 \theta}{EI}$$

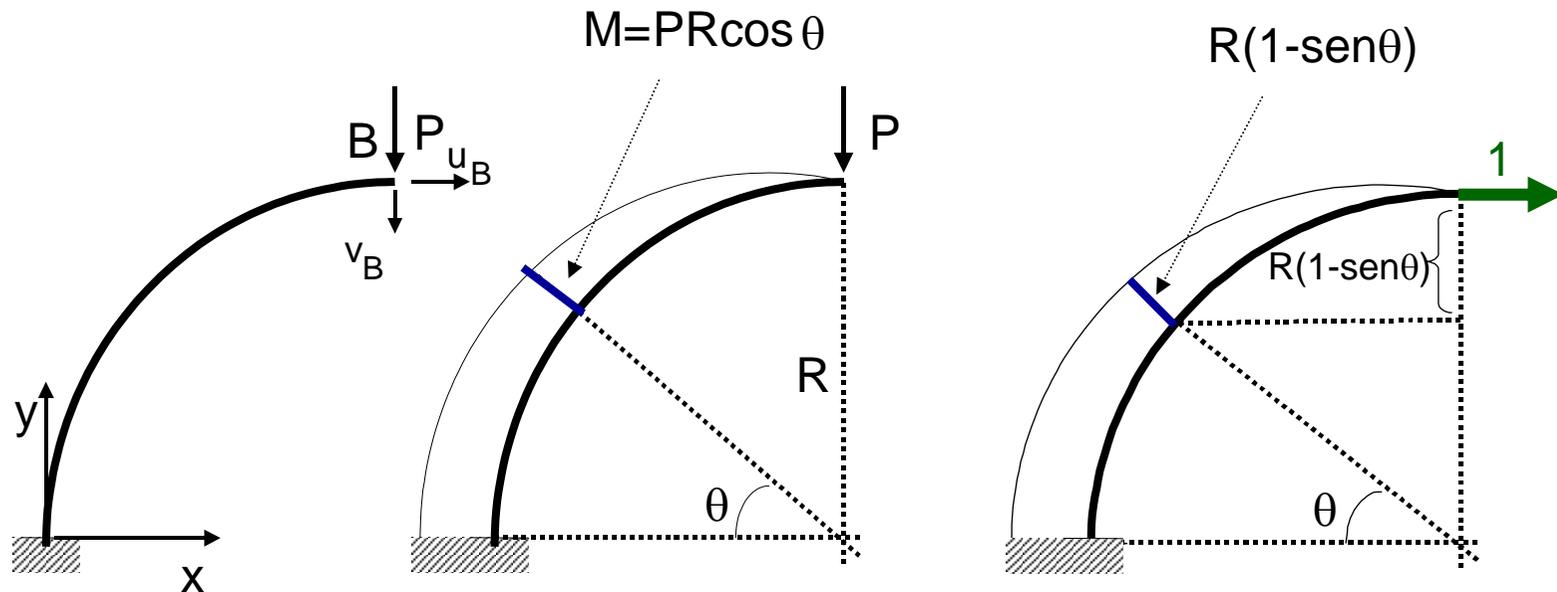
$$v_B \downarrow = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} PR^2 \cos^2 \theta ds = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} PR^2 \cos^2 \theta (R d\theta)$$

Utilizando Castigliano:

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} ds = \frac{1}{2EI} \int_0^{\pi/2} (PR \cos \theta)^2 R d\theta$$

$$v_B \downarrow = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} PR^2 \cos^2 \theta R d\theta$$

Desplazamiento horizontal u_B



Ley de flectores Estado 0

Ley de flectores Estado I

Utilizando Navier-Bresse:

debido al giro $d\theta$ de una rebanada genérica:

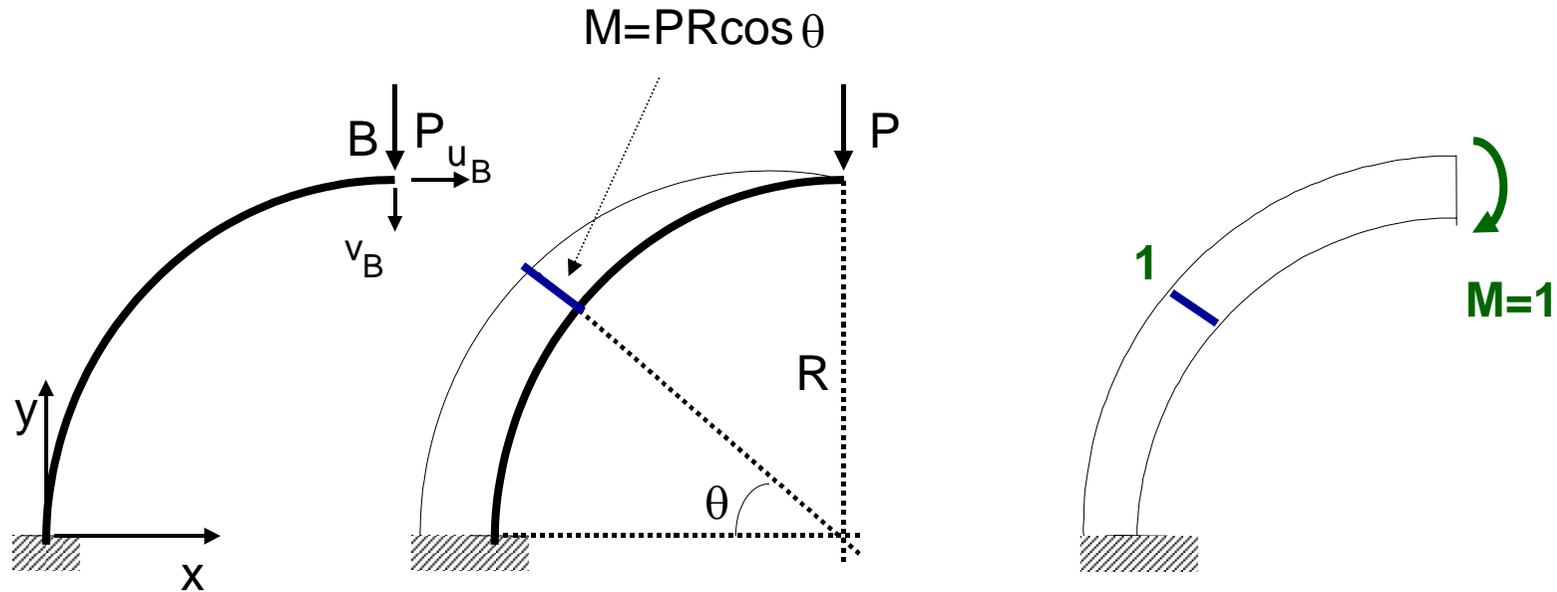
$$\begin{aligned} (u_B)_{d\theta} &= d\theta R(1 - \text{sen}\theta) = \frac{M}{EI} R(1 - \text{sen}\theta) = \\ &= \frac{PR^2 \cos \theta (1 - \text{sen}\theta)}{EI} \end{aligned}$$

$$\vec{u}_B = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} PR^2 \cos \theta (1 - \text{sen}\theta) ds$$

Utilizando Castigliano:

$$\begin{aligned} \vec{u}_B &= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} M^0 M^I ds \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} PR \cos \theta R(1 - \text{sen}\theta) ds \end{aligned}$$

Giro de la sección B (θ_B)



Ley de flectores Estado 0

Ley de flectores Estado I

Utilizando Navier-Bresse:

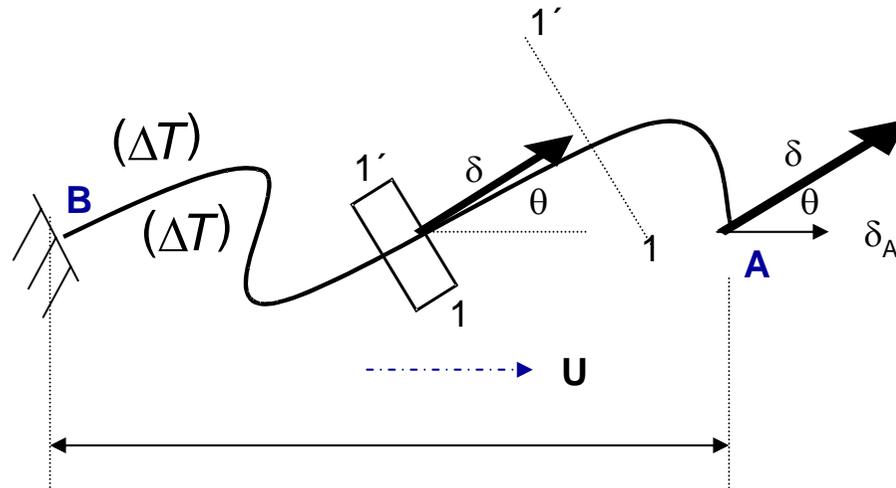
$$\hat{\theta}_B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M ds = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR \cos \theta ds$$

Utilizando Castigliano:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_B &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M^0 M^I \cdot ds = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (PR \cos \theta) \cdot 1 \cdot ds \end{aligned}$$

Tratamiento de las cargas térmicas (Cont.)

Barras de directriz curvilínea sometidas a una variación uniforme de temperatura



$$U_A = \int_B^A (\alpha ds \Delta T) \cos \theta = \alpha \Delta T \int_B^A \cos \theta ds = \alpha \Delta T \cdot L$$

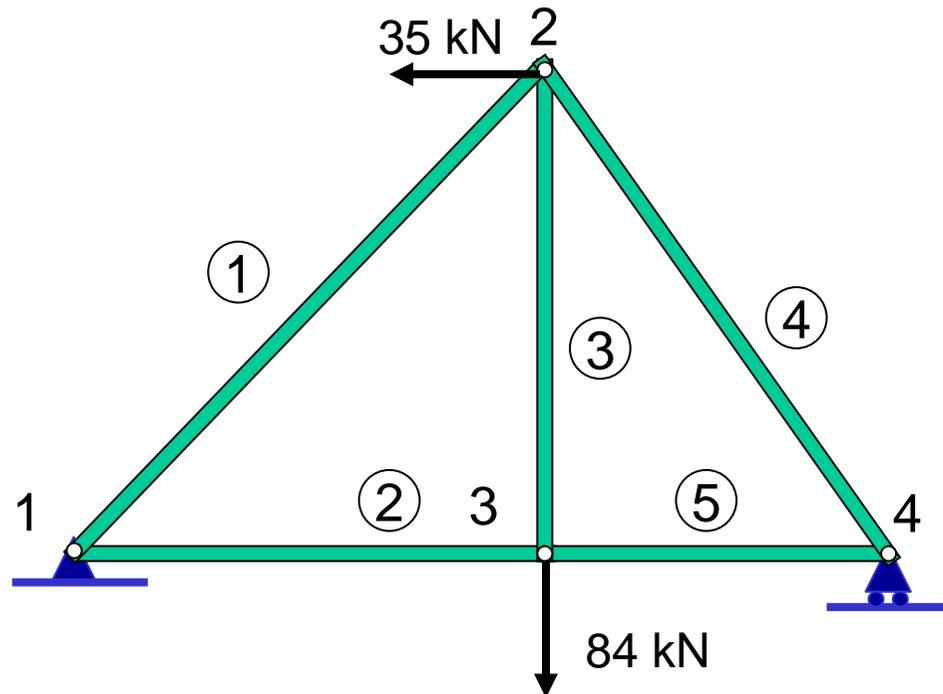
“El movimiento en una dirección definida por un vector, del extremo de una barra curvilínea en ménsula se obtiene multiplicando el coeficiente de dilatación por el incremento de temperatura y por la proyección de la directriz de la viga en la dirección u ”.

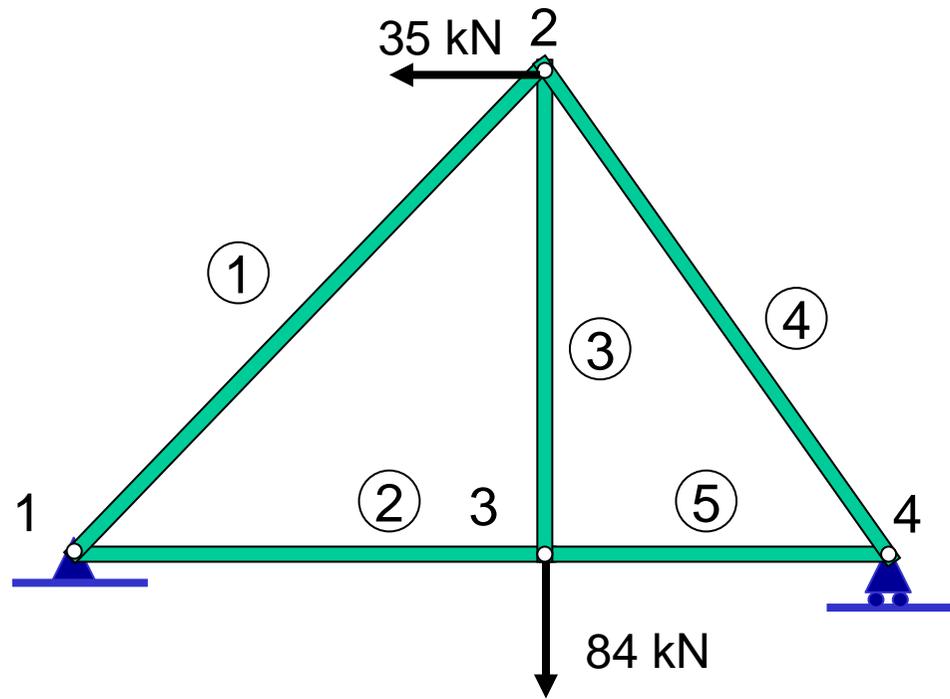
APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CASTIGLIANO A ESTRUCTURAS ARTICULADAS

PROBLEMA PROPUESTO

Determinar, para la estructura articulada de la figura, los desplazamientos horizontal y vertical que sufre el nudo 3.

NOTA: Considérese que $E=200$ GPa y $A=1.200$ mm²





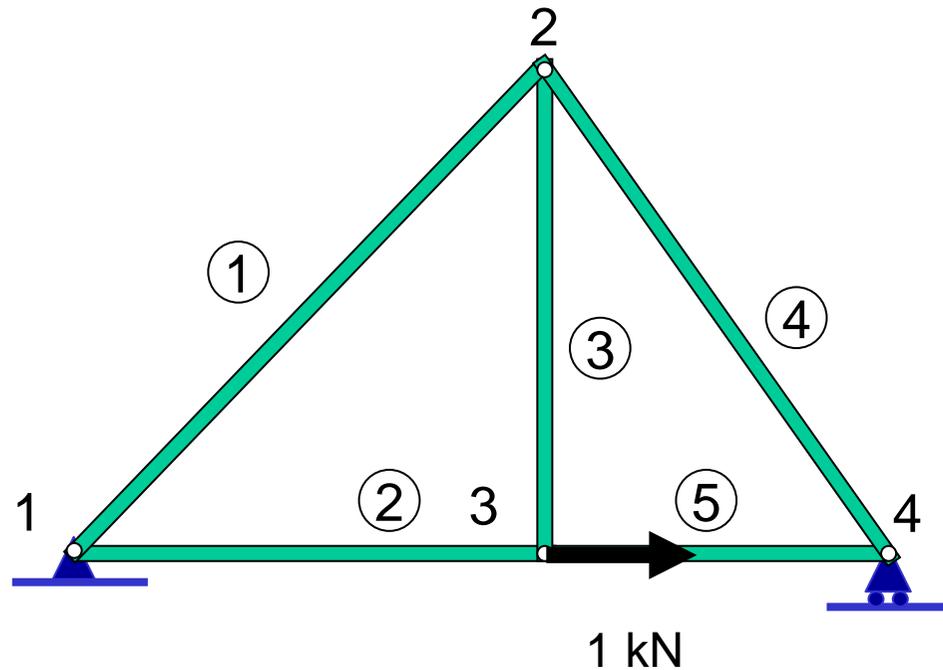
ESTADO 0

Resolvemos la estructura, obteniéndose los siguientes esfuerzos axiales:

Información sobre los elementos							
Num	Nudo inicial	Nudo final	Longitud [cm]	Área [cm ²]	Esfuerzo axial N ^o [N]	Tensión axial σ [N/mm ²]	Notas
1	1	2	565,7	12,00	-79.196	-66,0	Compresión
2	1	3	400,0	12,00	21.000	17,5	Tracción
3	2	3	400,0	12,00	84.000	70,0	Tracción
4	2	4	500,0	12,00	-35.000	-29,2	Compresión
5	3	4	300,0	12,00	21.000	17,5	Tracción

max	565,7	12,00	84.000	70,0
min	300,0	12,00	-79.196	-66,0

Desplazamiento horizontal del nudo 3



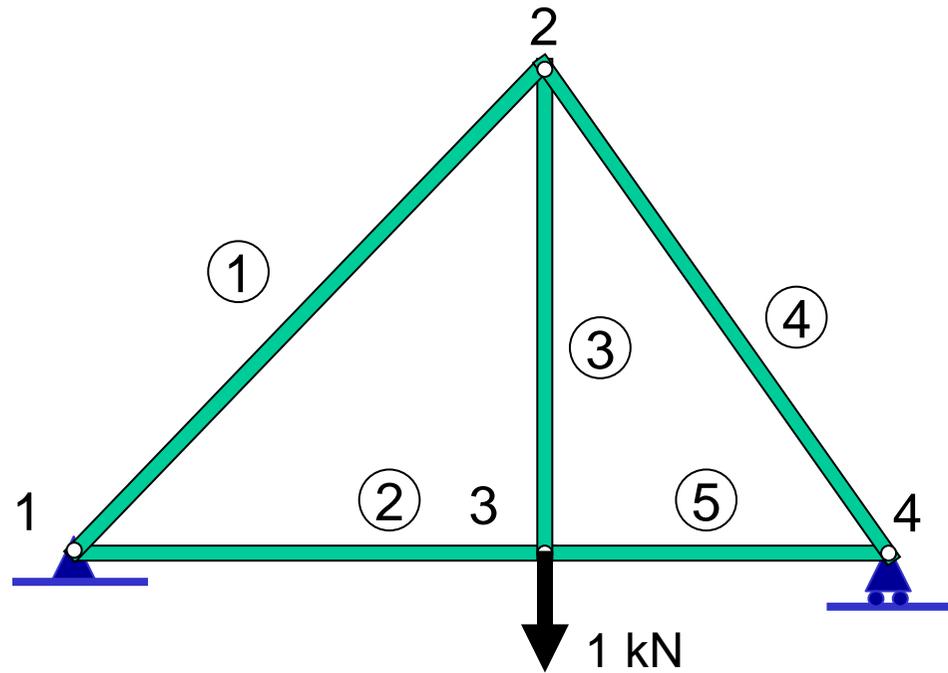
ESTADO I

En este estado, sólo la barra 2 trabaja, haciéndolo a un esfuerzo axial de tracción de valor $N_1^I = 1 \text{ kN}$.

Los axiles en el resto de barras es nulo.

$$\vec{u}_2 = \sum_i N_i^0 N_i^I \frac{L_i}{A_i E_i} = \frac{21 \cdot 1}{200 \times 10^6 (\text{kN} / \text{m}^2) \cdot 1200 \times 10^{-6} (\text{m}^2)} \cdot 4 = 0,00035 \text{ m}$$

Desplazamiento vertical del nudo 3



ESTADO II

Resolvemos la estructura para el caso de carga II, obteniéndose los siguientes esfuerzos axiales:

Información sobre los elementos							
Num	Nudo inicial	Nudo final	Longitud [cm]	Area [cm ²]	Esfuerzo o axil N ^{II} [N]	Tensión axial σ [N/mm ²]	Notas
1	1	2	565,7	12,00	-606	-0,5	Compresión
2	1	3	400,0	12,00	429	0,4	Tracción
3	2	3	400,0	12,00	1.000	0,8	Tracción
4	2	4	500,0	12,00	-714	-0,6	Compresión
5	3	4	300,0	12,00	429	0,4	Tracción

max	565,7	12,00	1.000	0,8
min	300,0	12,00	-714	-0,6

$$v_2 \downarrow = \sum_i N_i^0 N_i^{II} \frac{L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{200 \times 10^6 (kN/m^2) \cdot 1200 \times 10^{-6} (m^2)} ((-79,196) \cdot (-0,606) \cdot 5,657 + 21 \cdot 0,429 \cdot 4 + 84 \cdot 1 \cdot 4 + (-35) \cdot (-0,714) \cdot 5 + 21 \cdot 0,429 \cdot 3) = 0,0033146m$$

Estructura deformada:

