4.- CONCEPTOS GENERALES

4.1 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Dos de las hipótesis de validez de las técnicas y algoritmos que se aplican en análisis estructural son las siguientes:

- los movimientos de la estructura al serle aplicadas las cargas son pequeños, con lo cual puede aceptarse que no varía la geometría inicial,
- al aplicar las cargas sobre el sólido analizado (la estructura) este se mantiene en régimen elástico.

Con estas hipótesis el efecto tensional y deformacional de las diferentes cargas es aditivo lo que, en la práctica, posibilita analizar separadamente la estructura sometida a cada una de las cargas planteadas (figura 4.1) y sumar los esfuerzos o desplazamientos obtenidos para todas las cargas.

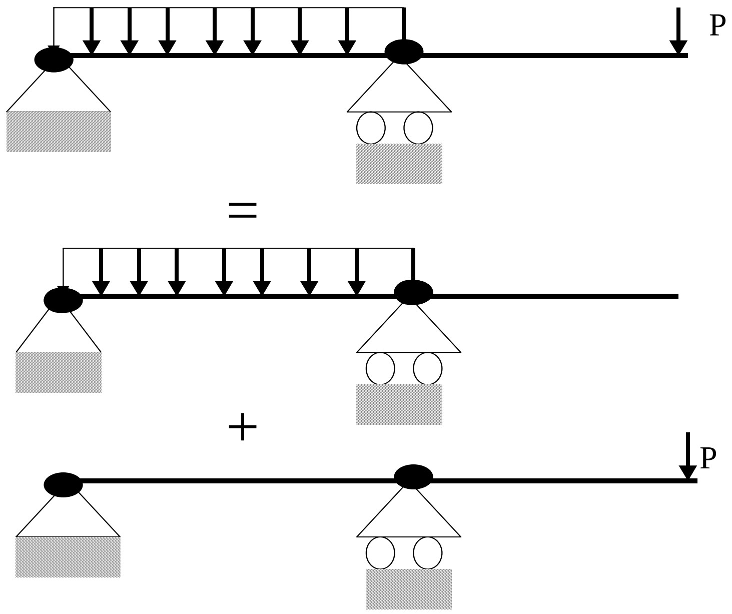

Figura 4.1

4.2 DESCOMPOSICIÓN DE ESTRUCTURAS EN ELEMENTOS

Una técnica o procedimiento muy útil de trabajo con estructuras es el que se apoya en la división o despiece de la estructura en partes, añadiendo a las condiciones de carga las condiciones de compatibilidad de movimientos que, en cada caso, se requieran.

Considérese, por ejemplo, la estructura de la figura formada por dos barras AB y BC empotradas entre sí en B y con el sistema de apoyos que se indican. La carga P que actúa en C trasmite al nudo B un momento de valor $P*L_2$, momento que producirá la flexión de la barra AB y el correspondiente giro del nudo B. La flecha f en C tendrá, en consecuencia, dos componentes: la flecha f_1 debida a la flexión del tramo BC y la flecha f_2 debida al giro del nudo B, giro que “arrastra” al tramo BC.

Esta argumentación se concreta en la descomposición de la estructura en sus dos elementos (barra biapoyada y ménsula) que pueden ser analizados por separado (figura 4.2). Las leyes de esfuerzos en los elementos configuran a las leyes de esfuerzos en la estructura inicial y, en cuanto a los movimientos de la estructura inicial deberán obtenerse componiendo los movimientos de las partes en las que se haya dividido.

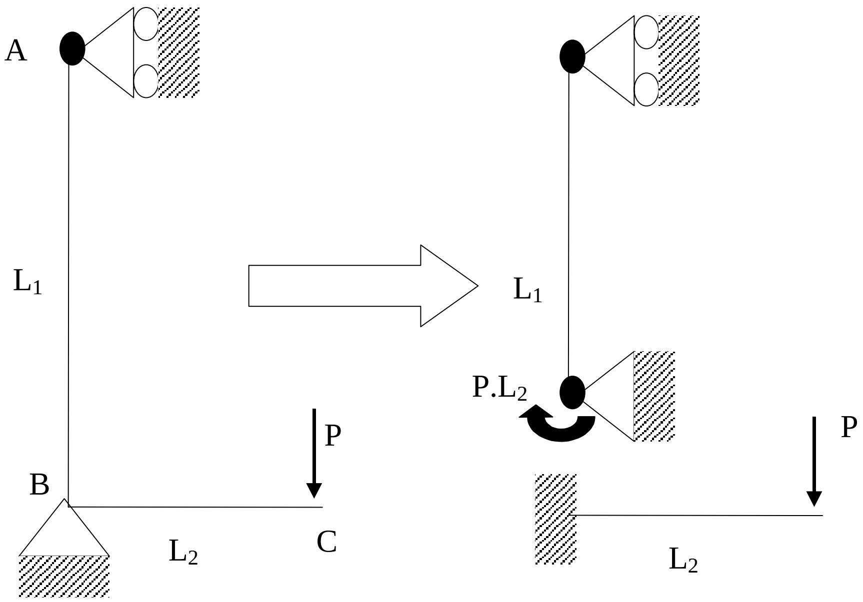

Figura 4.2

Una estructura puede descomponerse, a efectos de su análisis, en barras, pero también en subconjuntos de barras (subestructuras), en trozos de barras,…

EJEMPLO.- Considérese la estructura de la figura 4.3 en la que en el punto C hay una rótula.

La estructura puede descomponerse inicialmente en dos partes que, en principio, están unidas por la rótula según se muestra en la figura 4.4

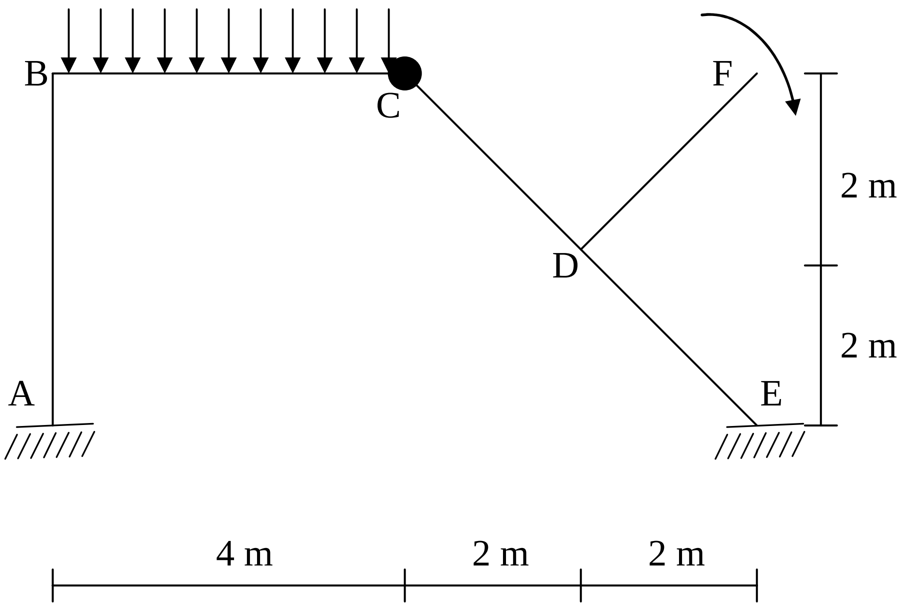

Figura 4.3

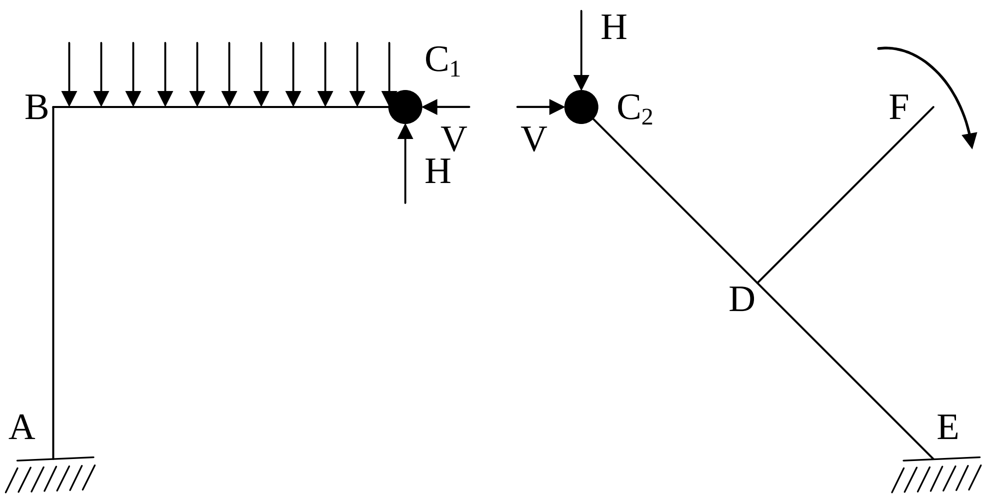

Figura 4.4

La interacción mutua de las dos partes cuando constituyen la estructura inicial, está constituida por dos fuerzas H (horizontal) y V(vertical), como se indica en la figura. Los movimientos de C_1 (calculados en la estructura de la izquierda) y los de C_2 (calculados en la estructura de la derecha) han de ser iguales

$$U_{C1}(H,V) = U_{C2}(H,V)$$

$$V_{C1}(H,V) = V_{C2}(H,V)$$

A su vez, la estructura de la derecha podría descomponerse como se indica en la figura 4.5. Los movimientos del nudo F, por ejemplo, se obtendrían componiendo los que se obtienen en la ménsula D_2F con los que se obtienen a partir del giro en D_1.

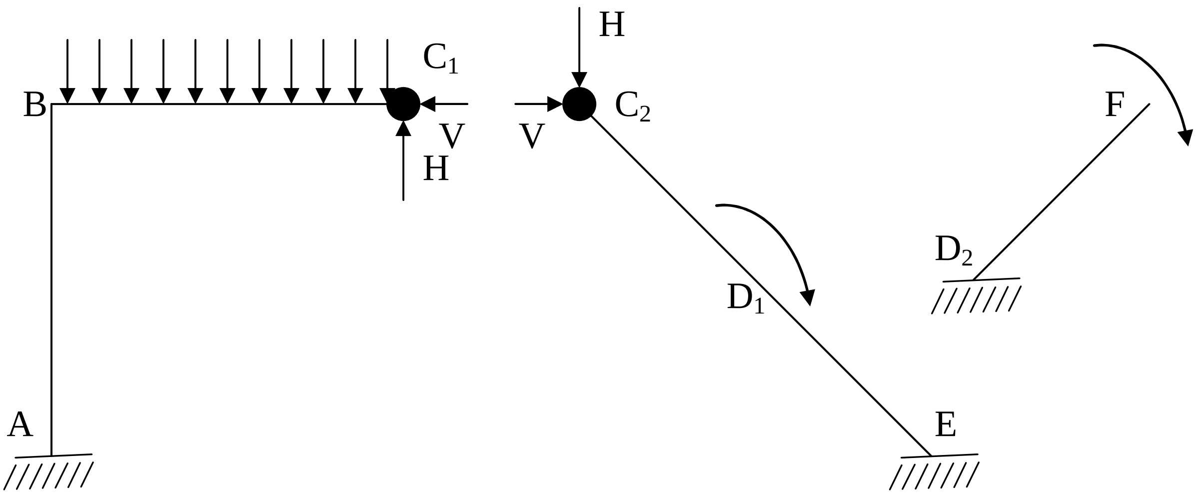

Figura 4.5

4.3 ISOSTATISMO E HIPERESTATISMO EN SISTEMAS DE BARRAS

4.3.1 "Visión externa" del sistema.

¿Cómo se apoyan las estructuras?

A efectos de análisis, los apoyos de una estructura son de alguno de los siguientes tipos esquemáticos.

- Deslizadera o rodillo: impide solamente el desplazamiento del punto de apoyo en dirección perpendicular a una superficie (superficie de deslizamiento); la estructura transmite al apoyo solamente fuerzas en la dirección perpendicular a la superficie de deslizamiento
- Apoyo: impide los movimientos de translación del punto de apoyo pero no los de giro; la estructura transmite al apoyo solamente fuerzas en las tres direcciones.
- Empotramiento: impide todos los movimientos del punto de apoyo; la estructura transmite al apoyo fuerzas y momentos en las tres direcciones.
- Apoyo elástico: liga la libertad de movimiento (traslación o giro) del punto de apoyo en una dirección a la rigidez de un elemento externo (muelle)

Se define como "visión externa" de la estructura o sistema de barras, su visión como cuerpo rígido cuyos 3 grados de libertad (en el plano) están restringidos por los apoyos o coacciones externos.

Cualquiera de las estructuras que, como ejemplo, se esquematizan en la figura 4.6

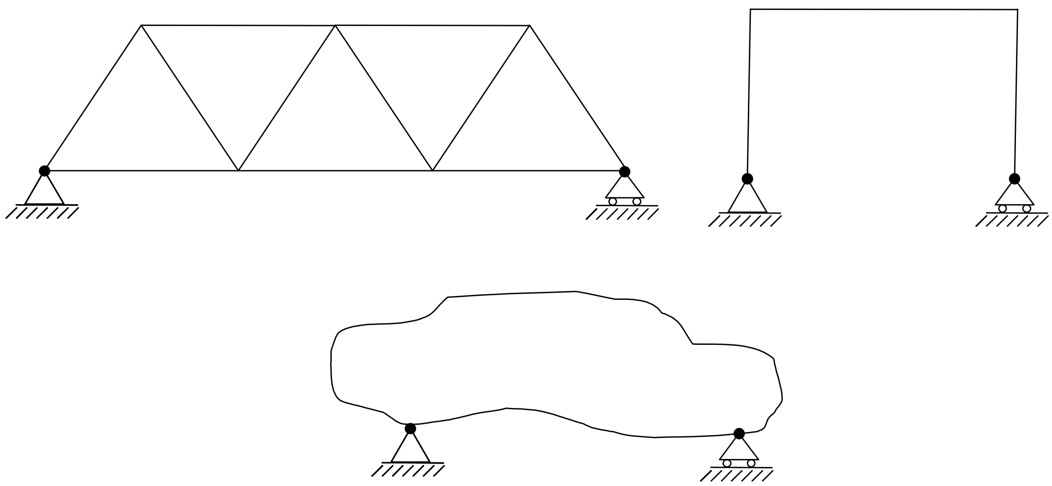

Figura 4.6

pueden considerarse como cuerpos rígidos de 3 g.d.l. con tres coacciones externas y ser calificadas, en consecuencia, como isostáticas externas.

Cualquiera de las estructuras que, como ejemplo, se esquematizan en la figura 4.7

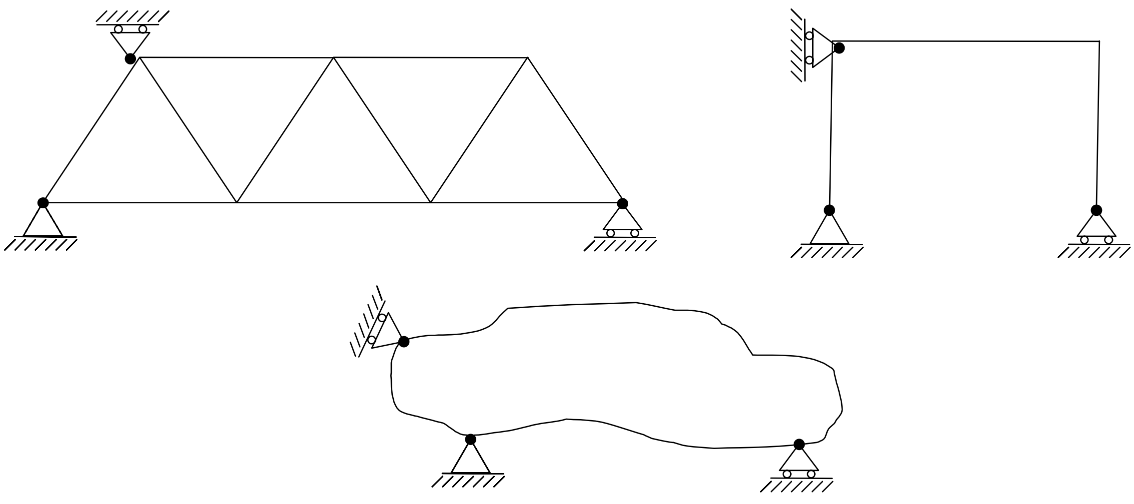

Figura 4.7

pueden considerarse como cuerpos rígidos de 3 g.d.l. con cuatro coacciones externas y ser calificadas, en consecuencia, como hiperestáticas externas.

Se define como Grado de Hiperestatismo Externo la diferencia entre el número CE de coacciones externas y el número G.D.L.E. (=3) de grados de libertad externos

4.3.2 "Visión interna" del sistema.

- Cuando los <u>enlaces internos</u> son los <u>estrictamente necesarios</u> para impedir los movimientos relativos entre los cuerpos, que producirían las cargas actuantes sobre el sistema, se pueden determinar las <u>reacciones internas</u> mediante las <u>ecuaciones de equilibrio</u> aplicadas a los nudos (figura 4.8). El sistema se dice, entonces, que es internamente isostático.

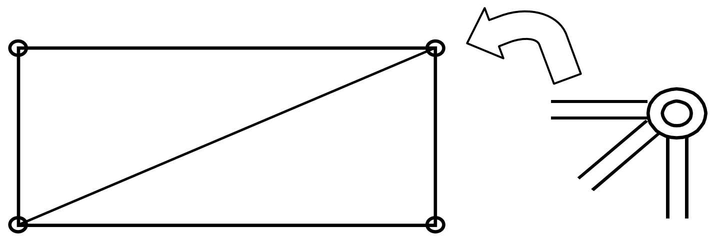

Figura 4.8

- Si hay más enlaces internos que los necesarios (figura 4.9) el sistema se dice que es internamente hiperestático:

Figura 4.9

- Si hay menos enlaces internos que los necesarios (figura 4.10) el sistema se dice que es internamente deformable o mecanismo:

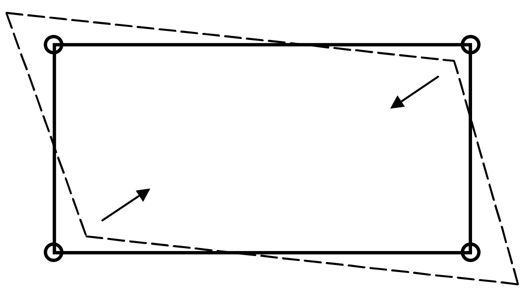

Figura 4.10

Grados de libertad internos.- Los grados de libertad internos están asociados al número de barras que constituyen la estructura; si éstas estuviesen sueltas, el número total de grados de libertad internos sería **3n**; dado que, al estar unidas, constituyen un sólido rígido con **3** grados de libertad (ya considerados como externos), el número de grados de libertad internos es pues **3n-3** (figura 4.11).

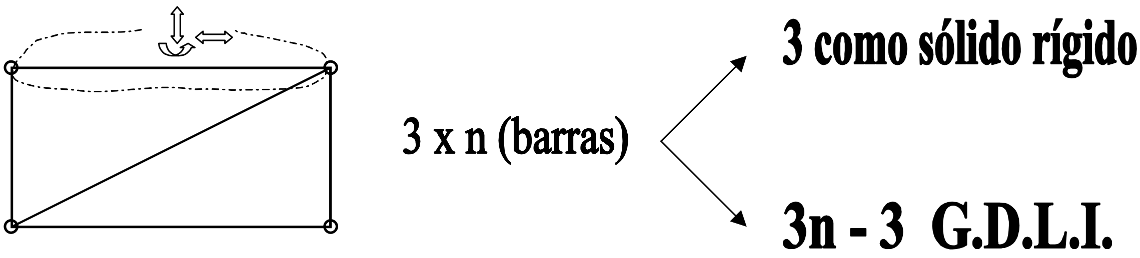

Figura 4.11

Coacciones internas

Las coacciones internas (o impedimentos a ejercitar los grados de libertad internos) están asociados con las restricciones o ligaduras de las barras entre sí en los nudos. Para el análisis de estas coacciones en cada nudo se han de considerar dos parámetros: el número de barras que confluyen en el nudo y el sistema de unión barra-nudo (rótula o empotramiento).

a) Caso de dos vigas articuladas entre sí.-

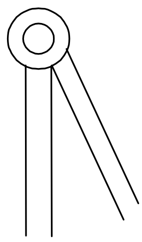

Figura 4.12

La articulación (figura 4.12) le “quita” a cada barra 2 traslaciones (total **2n**); pero el eje de la articulación conserva esos dos grados de libertad con lo que las coacciones son **2n-2= 2(n-1)**; en este caso de dos barras, el número de coacciones es **2(2-1)=2**

b) Caso de tres vigas articuladas entre sí.-

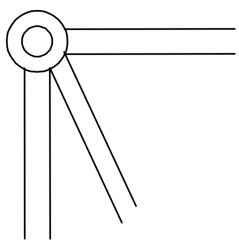

Figura 4.13

Con el mismo razonamiento que el utilizado en el caso anterior, se llega a que el número de coacciones es **2n-2= 2(n-1)**; en este ejemplo de tres barras, el número de coacciones resulta **2(3-1)=4**

c) Caso de dos barras empotradas entre sí.-

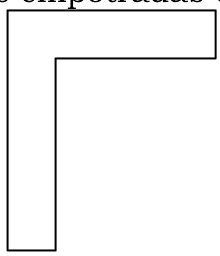

Figura 4.14

El empotramiento (figura 4.14) le "quita" a cada barra los tres g.d.l. (total **3n**); pero el eje del empotramiento conserva esos tres g. d. l. Con lo que las coacciones son **3n-3= 3(n-1)**; en este caso de dos barras, el número de coacciones es **3(2-1)=3**

Se define como Grado de Hiperestatismo Interno la diferencia entre el número CI de coacciones internas y el número G.D.L.I. de grados de libertad internos

4.3.3 "Visión global" del sistema.

Los grados de libertad externos e internos y las coacciones externas e internas se suman por separado para obtener lo que se denominan respectivamente Grados de Libertad y Coacciones de la Estructura (figura 4.15).

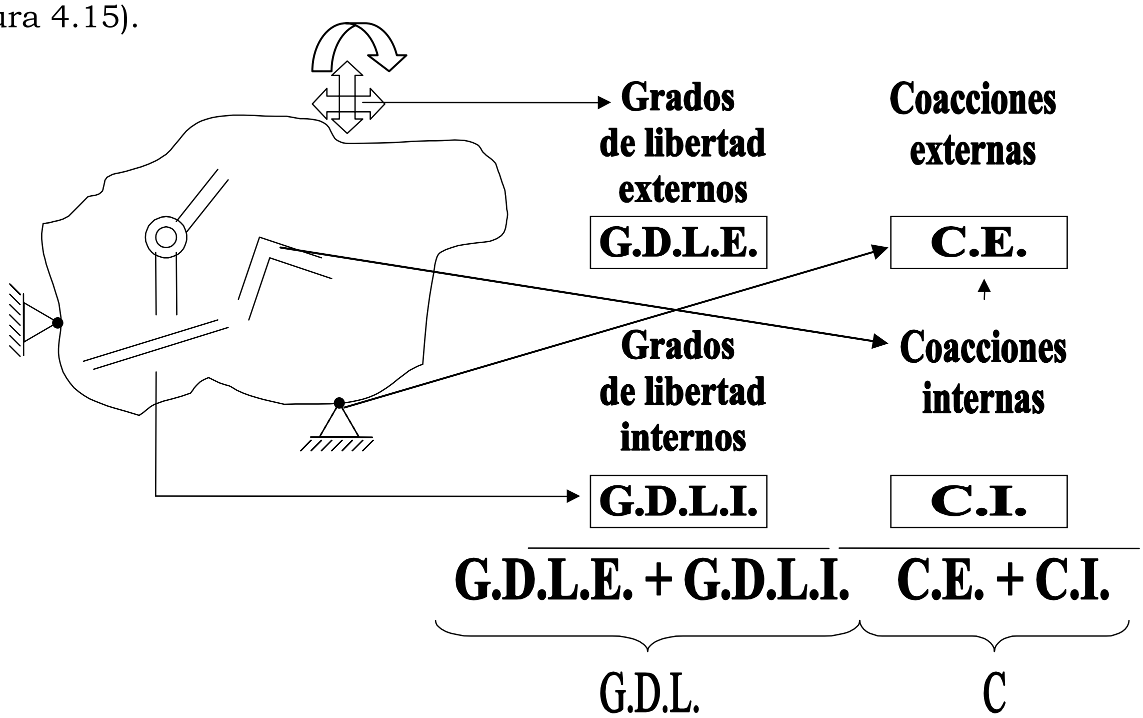

Figura 4.15

Grado de hiperestatismo

Se define como Grado de Hiperestatismo la diferencia entre el número C de coacciones tanto internas como externas y el número G.D.L. de grados de libertad tanto internos como externos

Si el grado de hiperestatismo así calculado es…

> 0 la estructura es hiperestática

< 0 la estructura es un mecanismo

Si el grado de hiperestatismo así calculado es cero, no puede afirmarse que la estructura sea isostática pues haber vínculos externos superabundantes y ser internamente deformable o viceversa.

EJEMPLOS.-

1) La estructura de la figura 4.16 consta de tres barras triarticuladas

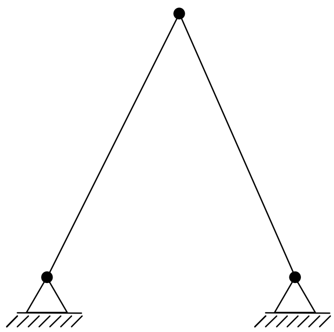

Figura 4.16

G.D.L.E. = 3 **C.E.** = 4

G.D.L.I. = 3*(2-1) =3 **C.I.** = 2*2*(1-1)+1*2*(2-1) = 2

Estructura isostática

2) Barra única con tres apoyos (figura 4.17). Para su estudio se considera constituida por dos barras que confluyen en el apoyo central donde están empotradas entre sí.

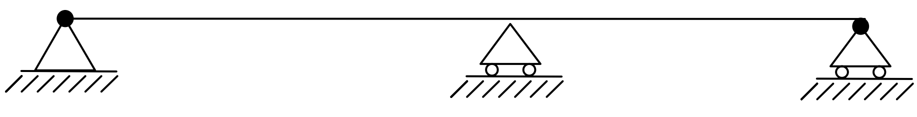

Figura 4.17

G.D.L.E. = 3 C.E.=4

G.D.L.I. = 3*(2-1) =3 C.I.=2*2*(1-1)+1*3*(2-1) = 3

Estructura hiperestática de grado 1

3) Barra única con tres apoyos (figura 4.18). Para su estudio se considera constituida por tres barras de forma tal que las dos que confluyen en el apoyo central están empotradas entre sí.

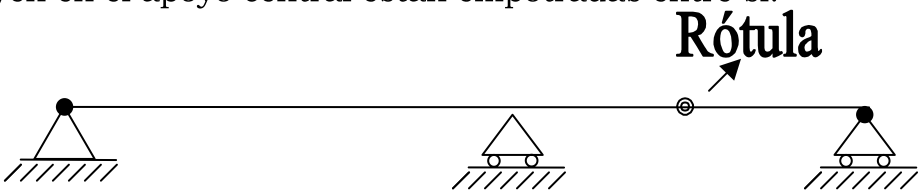

Figura 4.18

G.D.L.E. = 3 **C.E.** =4

G.D.L.I. = 3*(3-1) =6 **C.I.** = 2*2*(1-1)+1*2*(2-1) +1*3*(2-1) = 5

Estructura isostática

4) Estructura constituida por siete barras unidas entre si mediante rótulas o empotramientos (figura 4.19).

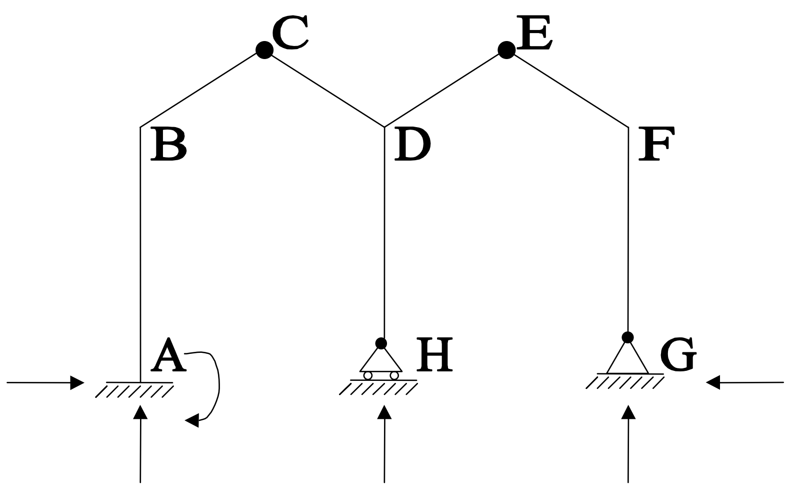

Figura 4.19

G.D.L.E. = 3 **C.E.** =6

G.D.L.I. = 3*(7-1) = 18 **C.I.** = 2*2*(2-1)+2*3*(2-1) +1*3*(3-1) = 16

Estructura hiperestática de grado 1

5) Estructura constituida por seis barras unidas entre si mediante empotramientos (figura 4.20).

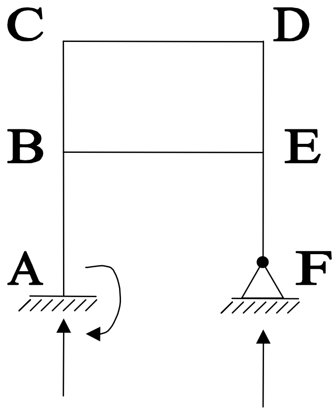

Figura 4.20

G.D.L.E. = 3 **C.E.** =5

G.D.L.I. = 3*(6-1) = 15 **C.I.** = 2*3*(2-1)+2*3*(3-1) = 18

Estructura hiperestática de grado 5

6) Estructura constituida por ocho barras unidas entre si mediante rótulas (figura 4.21).

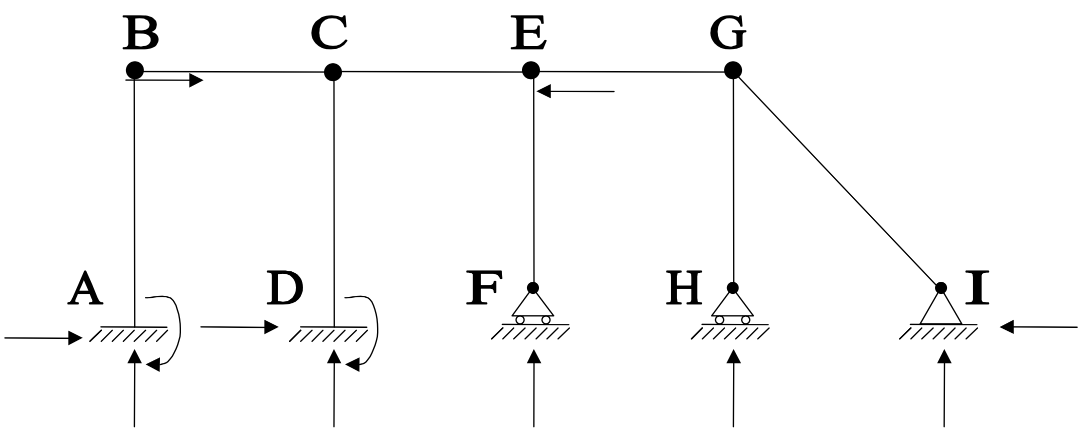

Figura 4.21

G.D.L.E. = 3 **C.E.** =10

G.D.L.I. = 3*(8-1) = 21 **C.I.** = 1*2*(2-1)+3*2*(3-1) = 14

Estructura isostática

7) Estructura constituida por diez barras unidas entre si mediante rótulas (figura 4.22).

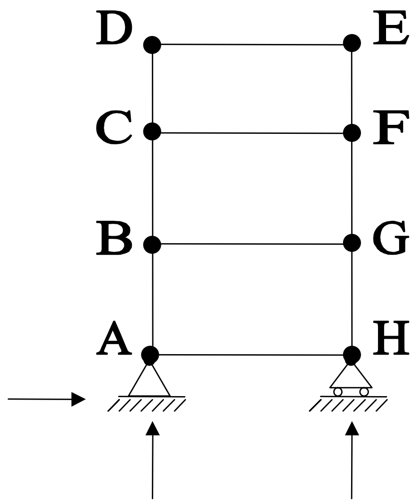

Figura 4.22

G.D.L.E. = 3 **C.E.** =3

G.D.L.I. = 3*(10-1) = 27 **C.I.** = 4*2*(2-1)+4*2*(3-1) = 24

Mecanismo con un grado de hiperestatismo -3

8) Estructura constituida por cuatro barras unidas entre si en una misma rótula (figura 4.23).

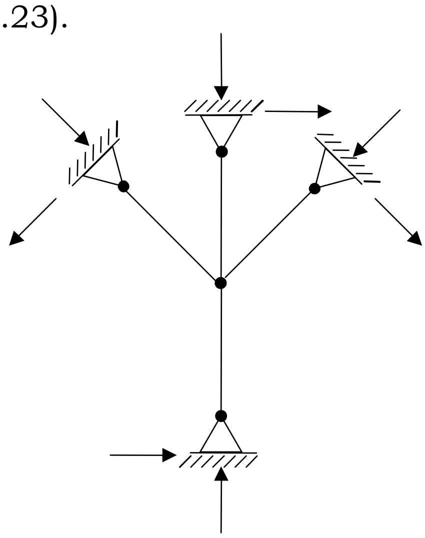

Figura 4.23

G.D.L.E. = 3 **C.E.** =8

G.D.L.I. = 3*(4-1) = 9 **C.I.** = 1*2*(4-1) = 6

Estructura hiperestática de grado 2

4.3.4 Efectos del hiperestatismo en las estructuras.-

Supóngase, como ejemplo, las estructuras de la figura 4.24 que difieren en que el soporte derecho y el dintel están unidos por una rótula en el caso de la estructura isostática y empotrados en la estructura hiperestática. Ambas soportan una misma carga que es una fuerza horizontal en el extremo izquierdo del dintel.

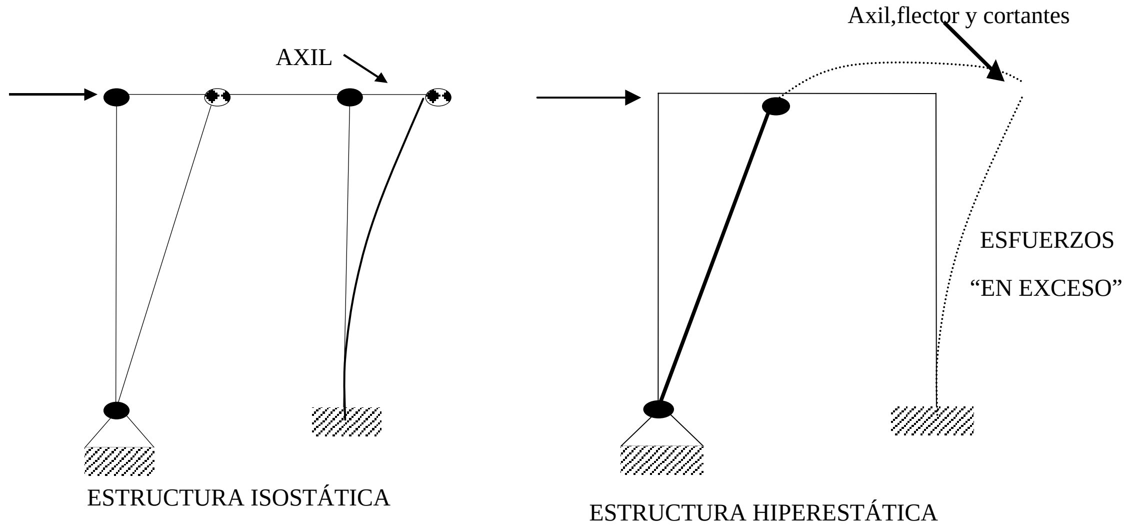

Figura 4.24

En la estructura isostática, el dintel absorbe exclusivamente un esfuerzo axil transmitiendo la carga hacia el soporte derecho que flecta. Por otro lado, el soporte derecho no absorbe ningún tipo de esfuerzo.

En la estructura hiperestática, el giro que sufre el extremo superior del soporte derecho al flectar éste es compartido por el dintel (que ha de flectar) absorbiendo los correspondientes esfuerzos de flexión y cortante. Por otro lado, el soporte izquierdo impedirá el movimiento vertical hacia arriba del extremo izquierdo del dintel absorbiendo el correspondiente esfuerzo axil.

El hiperestatismo en una estructura da lugar, en general, a la aparición de esfuerzos "en exceso" sobre los elementos de la estructura pero dota a ésta de una seguridad complementaria pues podrá continuar estable aunque alguna de las coacciones internas o externas fallen.

4.3.5 Procedimientos de análisis.

a) Estructuras isostáticas.

MÉTODOS DE CÁLCULO:

Los esfuerzos se obtienen aplicando las ecuaciones de equilibrio.

Los movimientos se obtienen aplicando los Teoremas de Mohr o las fórmulas de Navier-Bresse.

POSIBILIDADES:

Descomposición

Superposición

b) Estructuras hiperestáticas

MÉTODOS DE CÁLCULO:

Los esfuerzos se obtienen aplicando

las ecuaciones de equilibrio estático y

compatibilidad de movimientos entre elementos

Los movimientos se obtienen aplicando

los Teoremas de Mohr

otras técnicas.

POSIBILIDADES:

Descomposición

Superposición

4.4 SIMETRÍA Y ANTIMETRÍA

4.4.1 Definiciones

La simetría y la antimetría son conceptos que aplican a una estructura de geometría con simetría axial junto con el estado de cargas a las que está sometida.

*El sistema de cargas que actúa sobre una estructura simétrica se dice que es **simétrico** si en puntos de la estructura simétricos actúan cargas simétricas, es decir con el mismo módulo, dirección y sentido.*

*El sistema de cargas que actúa sobre una estructura simétrica se dice que es **antimétrico** si en puntos de la estructura simétricos actúan cargas antimétricas, es decir con el mismo módulo y dirección pero con distinto sentido.*

Si la geometría y el sistema de cargas es simétrico, al sistema estructura-cargas se le califica de simétrico. Si la geometría es simétrica y el sistema de cargas es antimétrico, al sistema estructura-cargas se le califica de antimétrico (figura 4.25)

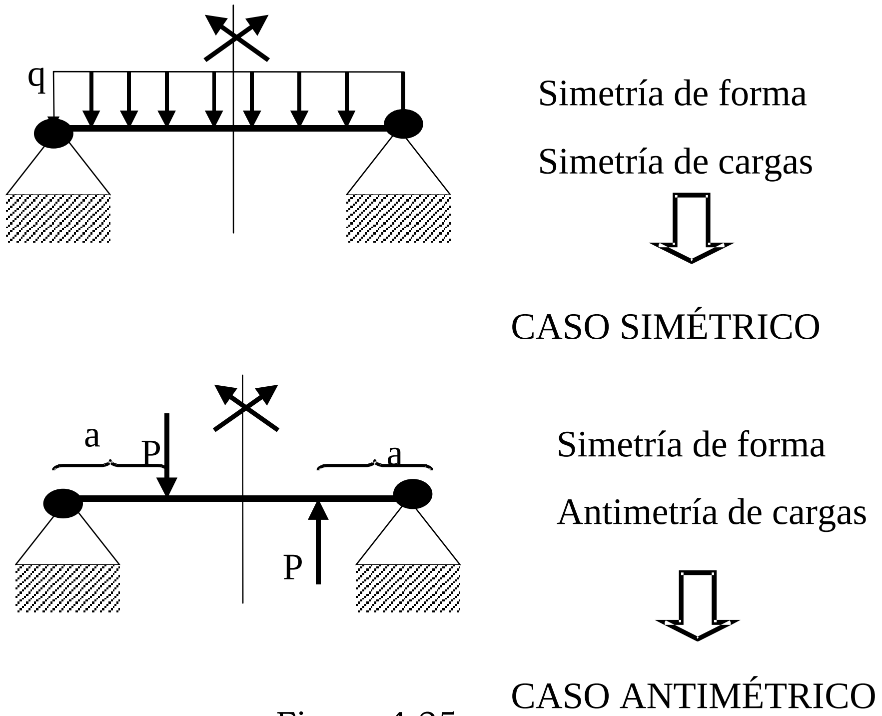

Figura 4.25

4.4.2 Estados simétricos

a) Esfuerzos.- Considérese una estructura de geometría simétrica y cargas simétricas como la de la figura 4.26.

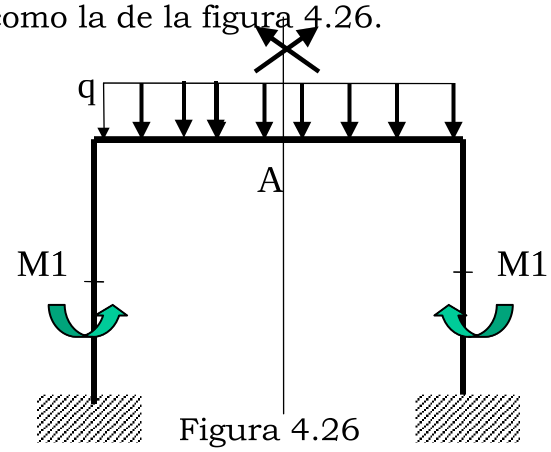

Figura 4.26

Dos rebanadas situadas simétricamente están sometidas

- Al mismo momento flector
- Al mismo esfuerzo axil
- A un esfuerzo cortante del mismo valor absoluto pero de distinto signo.

Si se descompone la estructura en las dos partes iguales (figura 4.27) en que la divide el eje de simetría, la relación entre los esfuerzos en ambas mitades obliga a que en la sección A (intersección de la estructura con el eje de simetría), el esfuerzo cortante sea nulo.

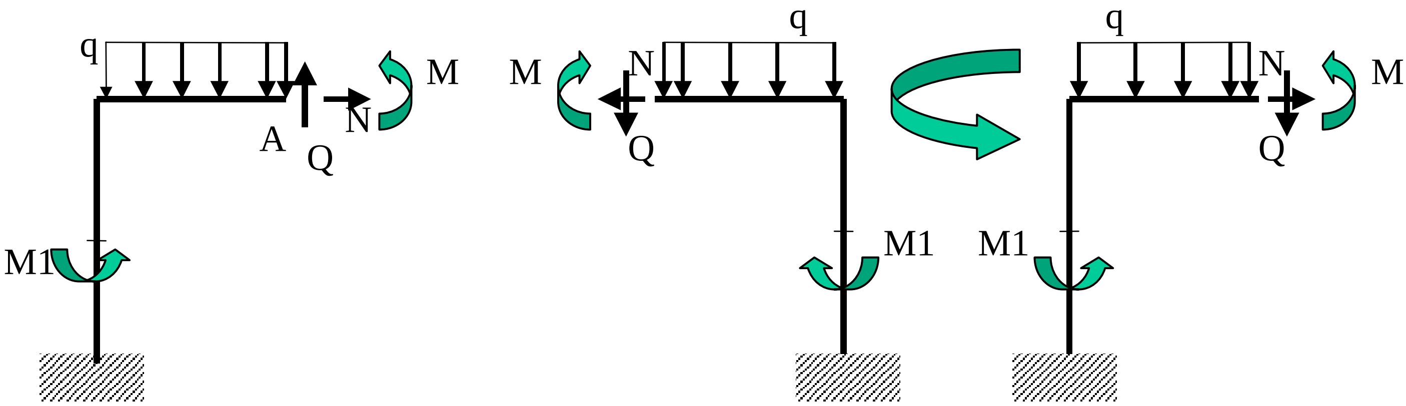

Figura 4.27

Si existe una carga puntual actuando en la sección A (figura 4.28), se reparte, a efectos de cálculo entre ambas mitades de la estructura.

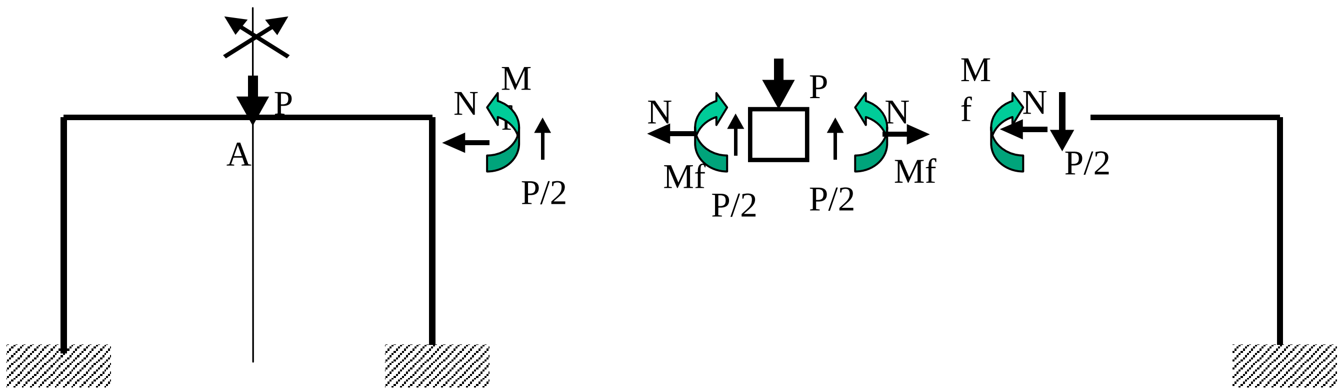

Figura 4.28

b) *Movimientos.-* Considerando como ejemplo la estructura simétrica de geometría y cargas anterior, dos rebanadas situadas simétricamente han de tener

- El mismo movimiento vertical
- Movimiento horizontal coincidente en valor absoluto aunque de distinto signo
- Giro coincidente en valor absoluto pero de distinto signo.

¿Cómo serán los movimientos en la sección A intersección de la estructura con el eje de simetría (figura 4.29)?

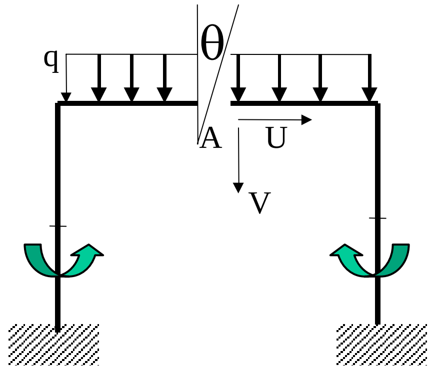

Figura 4.29

Si se descompone la estructura en las dos partes iguales en que la divide el eje de simetría, las relaciones entre los movimientos en ambas mitades obliga a que en la sección A el movimiento horizontal y el giro sean nulos (figura 4.30).

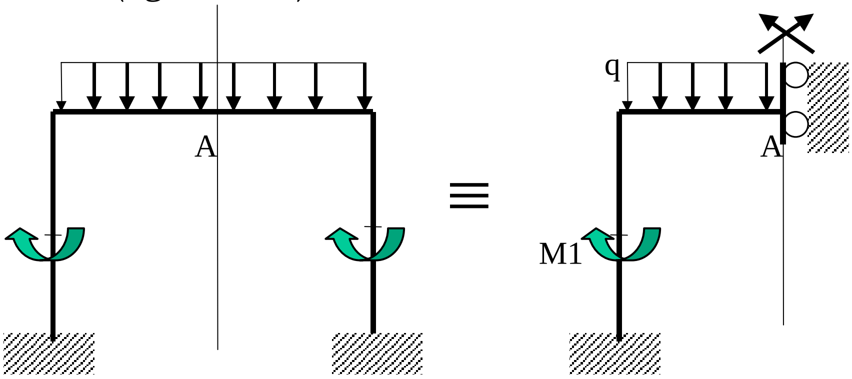

Figura 4.30

EJEMPLO.- Calcular las reacciones en la estructura de la figura 4.31.

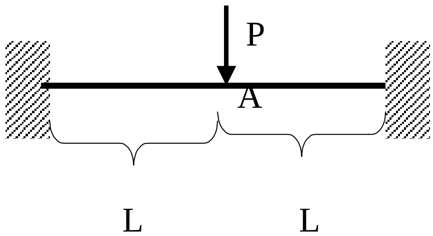

Figura 4.31

La estructura es simétrica de geometría y cargas lo que permite dividirla en dos mitades (figura 4.32) imponiendo la condición de que el punto A no gire.

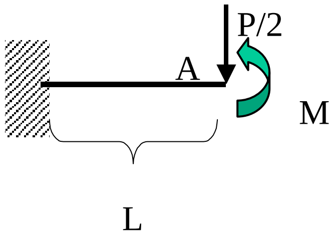

Figura 4.32

La condición de giro nulo es (Teoremas de Mohr)

$$\theta_A = 0 \Rightarrow \frac{\frac{P}{2}L^2}{2EI} - \frac{ML}{EI} = 0$$

de donde se deduce M = PL/4 y, en consecuencia las reacciones son: una fuerza vertical de valor P/2 y un momento de valor PL/4-P/2L=-PL/4

4.4.3 Estados antimétricos

a) Esfuerzos.- Considérese una estructura de geometría simétrica y cargas antimétricas como la de la figura 4.33.

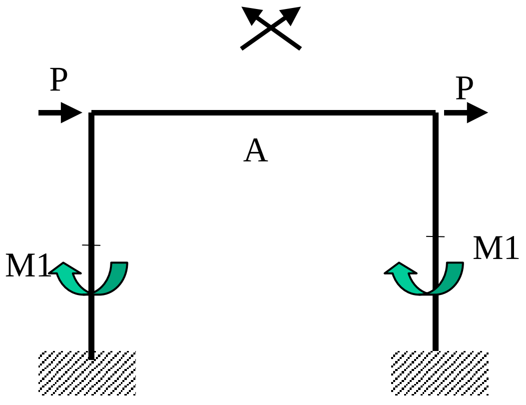

Figura 4.33

Dos rebanadas situadas simétricamente están sometidas

- A un momento flector del mismo valor absoluto pero de distinto signo
- A un esfuerzo axil del mismo valor absoluto pero de distinto signo
- Al mismo esfuerzo cortante.

Si se descompone la estructura en las dos partes iguales en que la divide el eje de simetría geométrica (figura 4.34), la relación entre los esfuerzos en ambas mitades obliga a que en la sección A (intersección de la estructura con el eje de simetría), el momento flector y el axil sean nulos.

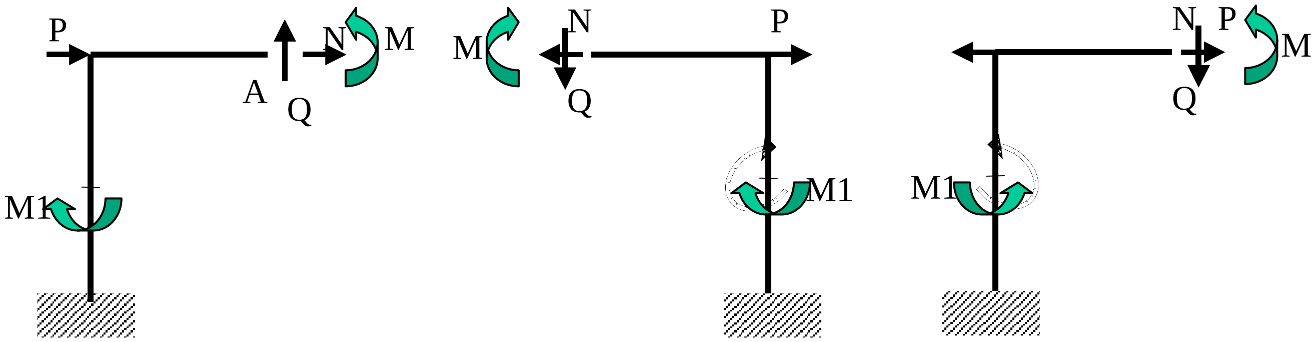

Figura 4.34

Si existe una carga puntual (fuerza horizontal o momento actuando en la sección A, se reparte, a efectos de cálculo entre ambas mitades de la estructura.

b) *Movimientos*.- Considerando como ejemplo la estructura simétrica de geometría y cargas anterior, dos rebanadas situadas simétricamente han de tener

- Movimiento vertical coincidente en valor absoluto aunque de distinto signo
- El mismo movimiento horizontal
- El mismo giro.

¿Cómo serán los movimientos en la sección A intersección de la estructura con el eje de simetría (figura 4.35)?

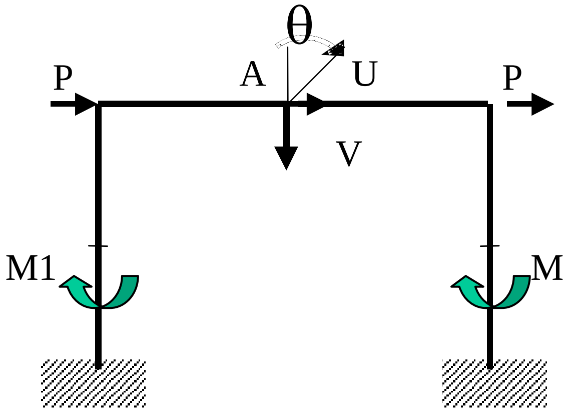

Figura 4.35

Si se descompone la estructura en las dos partes iguales en que la divide el eje de simetría (figura 4.36), las relaciones entre los movimientos en ambas mitades obliga a que en la sección A (intersección de la estructura con el eje de simetría), el movimiento horizontal y el giro sean nulos.

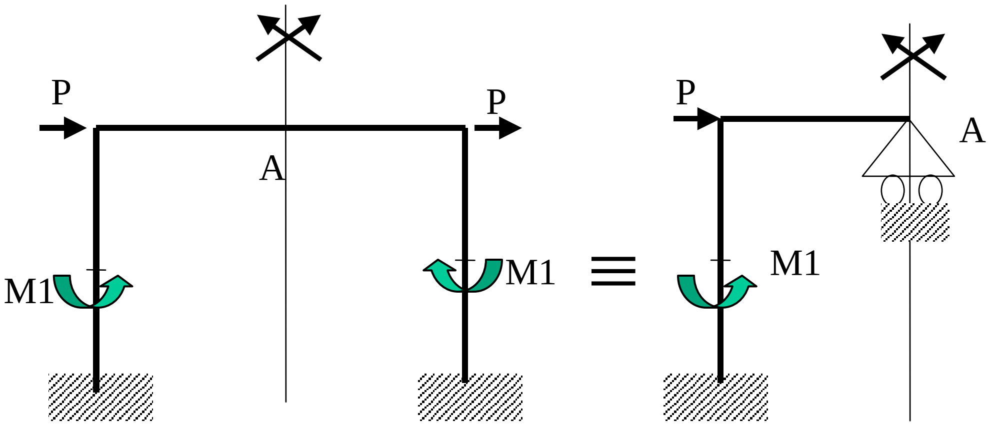

Figura 4.36

EJEMPLO.- Calcular las reacciones en la estructura de la figura 4.37

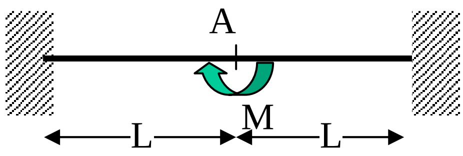

Figura 4.37

La estructura es antimétrica lo que permite dividirla en dos mitades imponiendo la condición de que el punto A no se desplace verticalmente (figura 4.38).

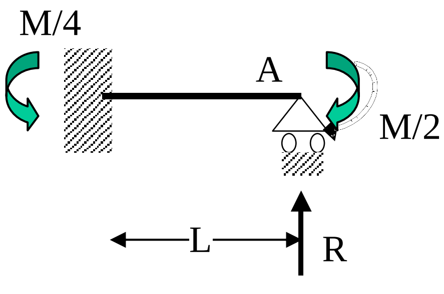

Figura 4.38

La condición de flecha nula es

$$\boldsymbol{V}_A = 0 \Rightarrow \frac{\boldsymbol{RL}^3}{3\boldsymbol{EI}} - \frac{\frac{\boldsymbol{M}}{2}\boldsymbol{L}^2}{2\boldsymbol{EI}} = 0$$

de donde se deduce que R = 3M/4L y el momento en el empotramiento

$$M/2 - L3M/4L = M/4$$

4.4.4 Estructuras con simetría de forma

Si una estructra es simétrica de forma pero el estado de cargas no es simétrico ni antimétrico, puede descomponerse para su análisis en la superposición de dos estados uno simétrico y otro antimétrico. En la figura 4.39 se muestra un ejemplo de la sencilla técnica a seguir, basado en un pórtico de geometría simétrica sometido a una carga sin simetría.

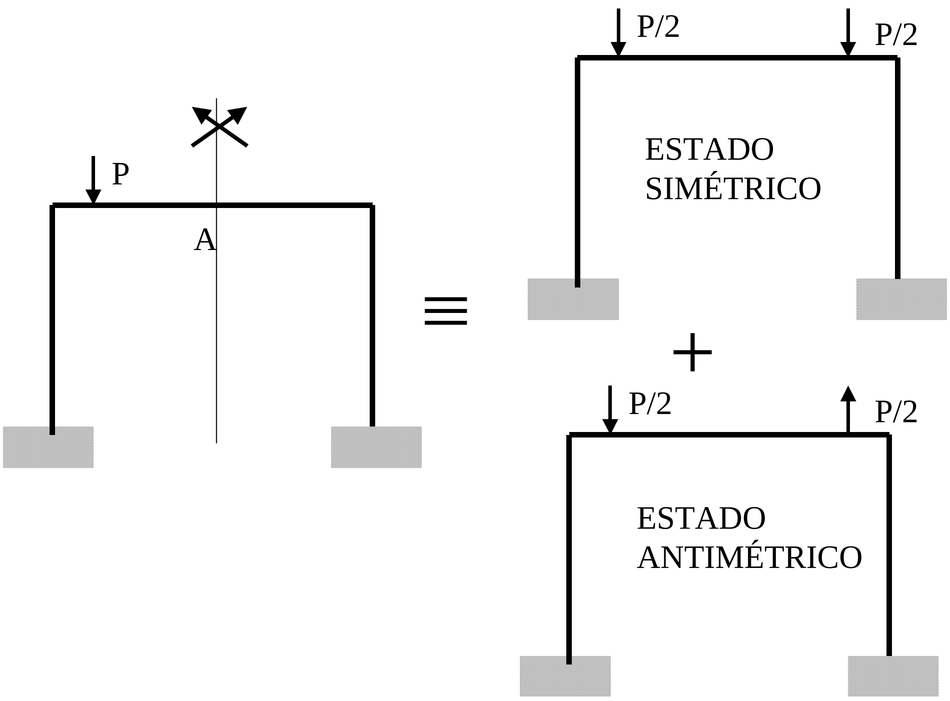

Figura 4.39

4.4.5 Simetría y antimetría en estructuras con cargas térmicas

Si las cargas que actuan sobre un estructura son de origen térmico, también se pueden aplicar las consideraciones de simetría y antimetría expuestas en los puntos anteriores. Como ejemplo, en la figura 4.40 se muestra la descomposición en un estado simétrico y uno antimétrico de un estado de cargas térmicas actuando sobre una estructura con simetría geométrica.

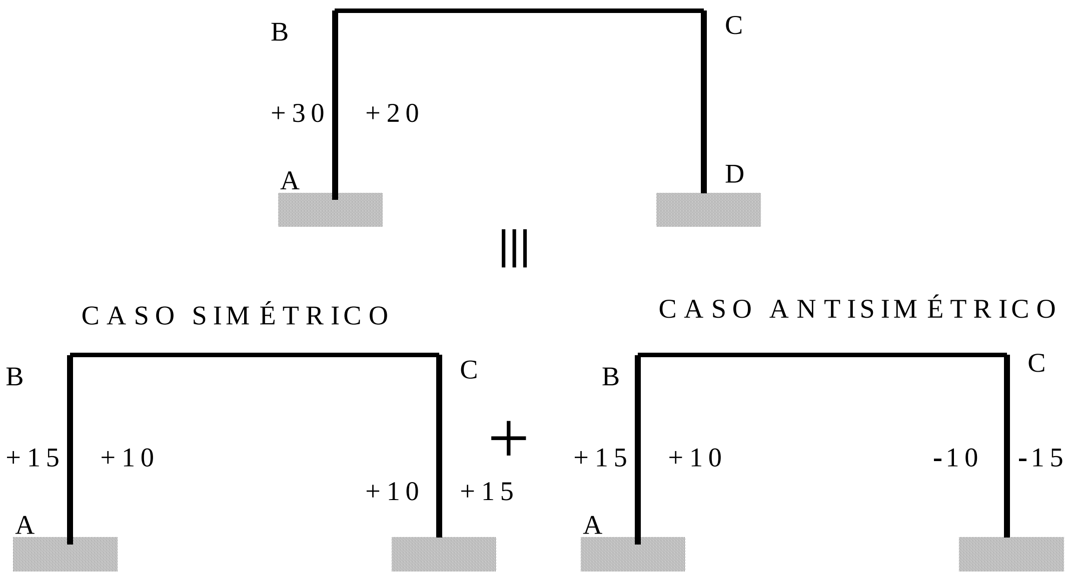

Figura 4.40

4.4.5 Simetría y antimetría de movimientos forzados

Un tipo de acción sobre las estructuras son los movimientos forzados en sus apoyos. Como regla general (que se detalla en capítulos posteriores), una técnica de análisis que puede aplicarse consiste en:

- liberar el apoyo sobre al que se le ha impuesto el movimiento forzado
- colocar en este apoyo unas reacciones incógnita (fuerzas o momentos)
- calcular los movimientos resultantes en el apoyo (que dependerán de las reacciones incógnita)
- igualar estos movimientos a los movimientos forzados, dato del problema.

Si la estructura tiene geometría simétrica y las acciones (movimientos forzados) tienen carácter simétrico o antimétríco, pueden aplicarse los planteamientos 4.4.2 y 4.4.3.

4.5 TRASLACIONALIDAD E INTRASLACIONALIDAD

Una estructura se califica de **intraslacional** bajo un estado de cargas cuando sus nudos (puntos de unión de las barras) no sufren desplazamientos aunque si pueden girar. En la figura 4.41 se muestran ejemplos de estructuras intraslacionales.

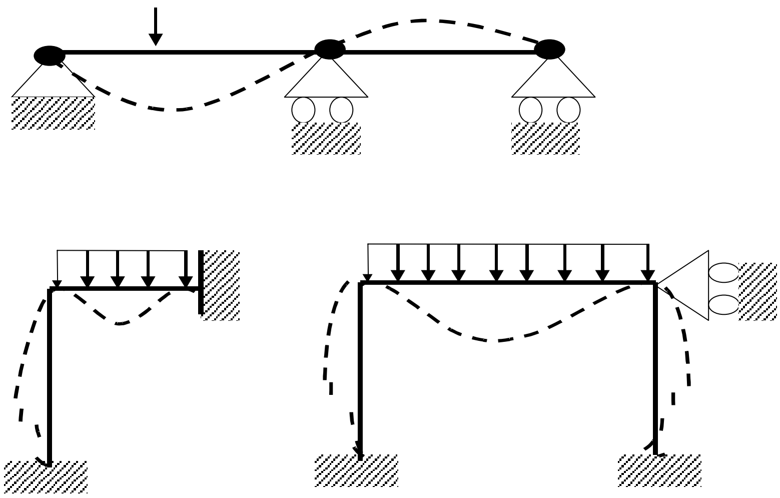

Figura 4.41

Las estructuras intraslacionales suelen descomponerse, para su análisis, en elementos, imponiendo las condiciones de compatibilidad de giros que se precise.

Una estructura se califica de **traslacional** bajo un estado de cargas cuando sus nudos se desplazan respecto a su posición inicial. En la figura 4.42 se muestran ejemplos de estructuras intraslacionales.

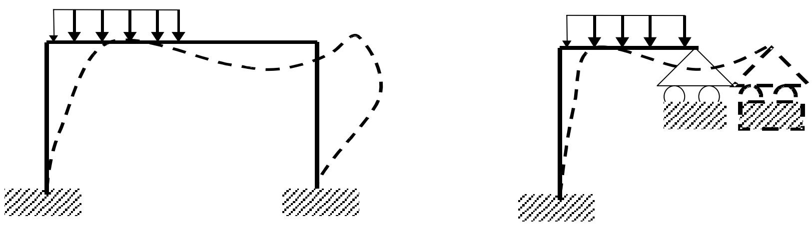

Figura 4.42

En la descomposición de una estructura traslacional en elementos, a efectos de su análisis, ha de tenerse en cuenta que en el giro de los nudos interviene, también, el valor del desplazamiento que la estructura haya podido sufrir, desplazamiento que es una incógnita del problema.

Una misma estructura puede comportarse como instraslacional para un sistema de cargas y como traslacional para otro (figura 4.43).

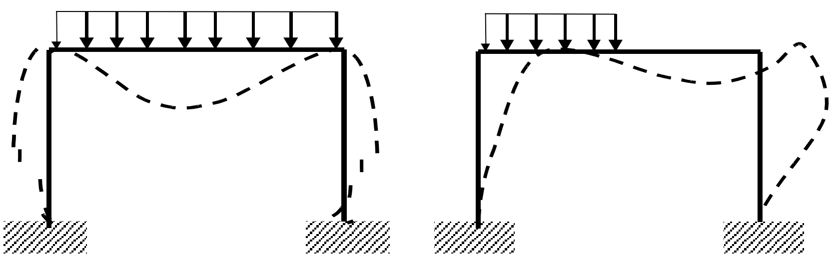

Figura 4.43