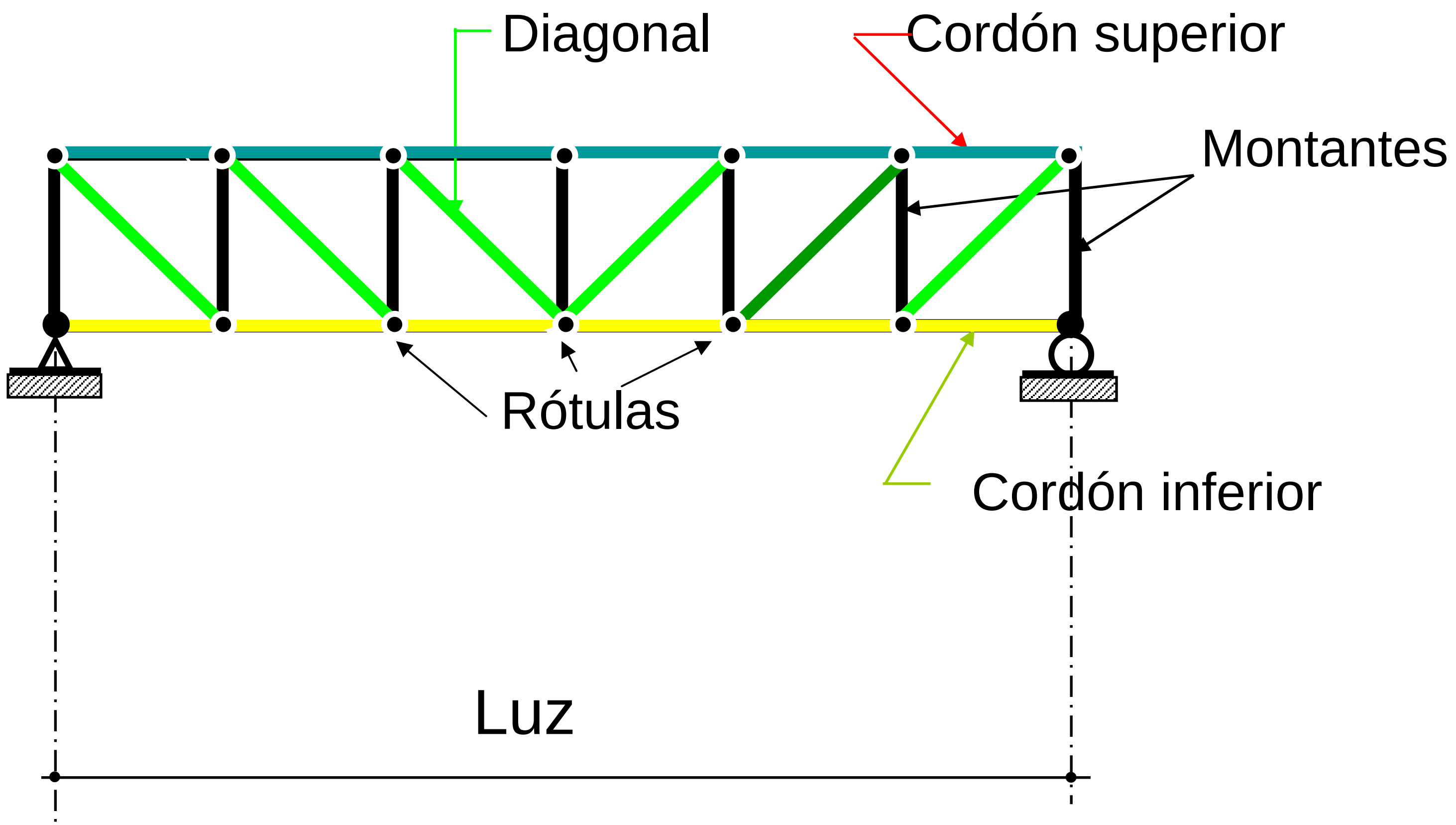
ESTRUCTURAS ARTICULADAS

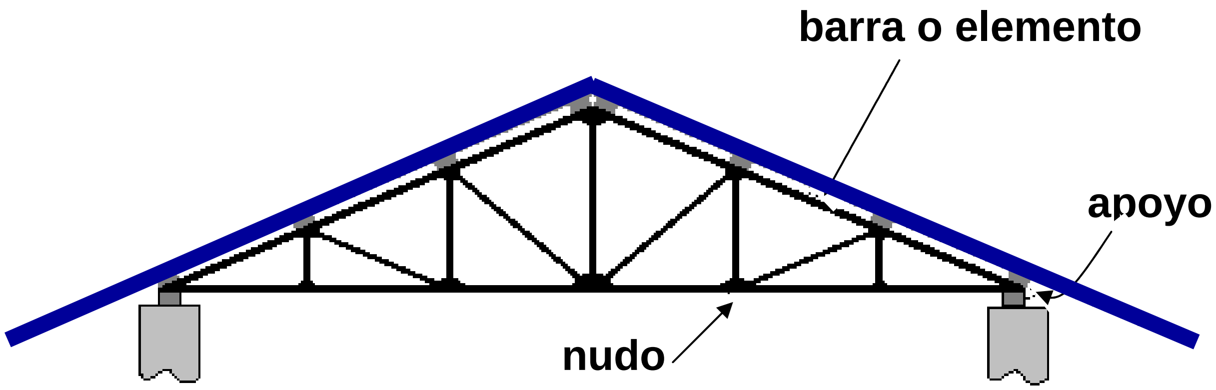
Prof. Carlos Navarro

Departamento de Mecánica de Medios Continuos
y Teoría de Estructuras

Cuando necesitemos salvar luces importantes (> 10 ó 15 m), o necesitamos vigas de gran canto, puede resultar más económico utilizar estructuras articuladas en celosía que vigas de alma llena

Terminología estructural de las estructuras articuladas

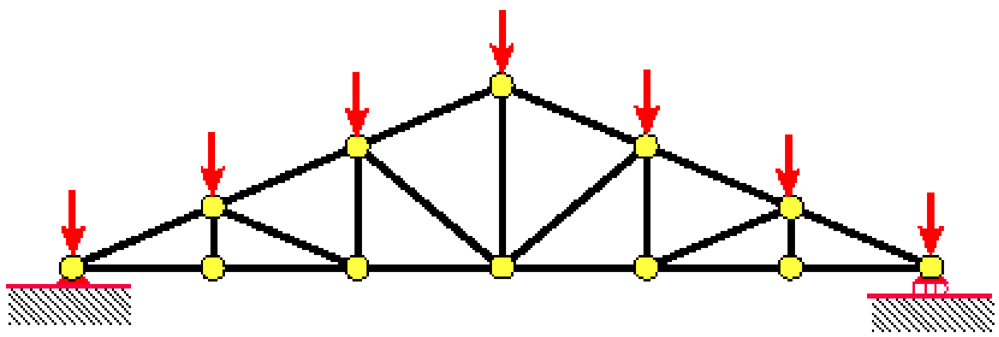




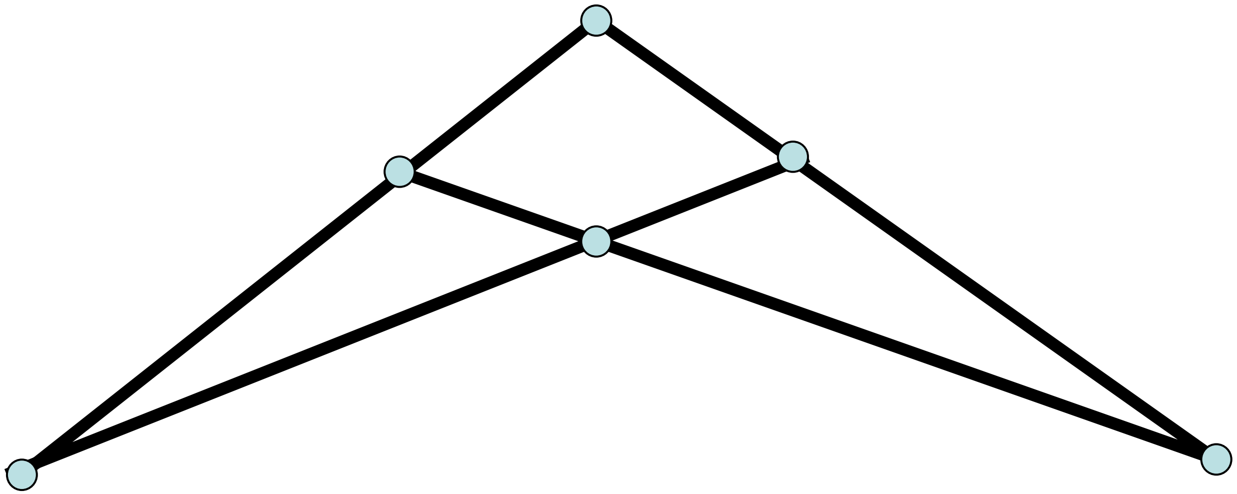
Sistema físico

IDEALIZACIÓN

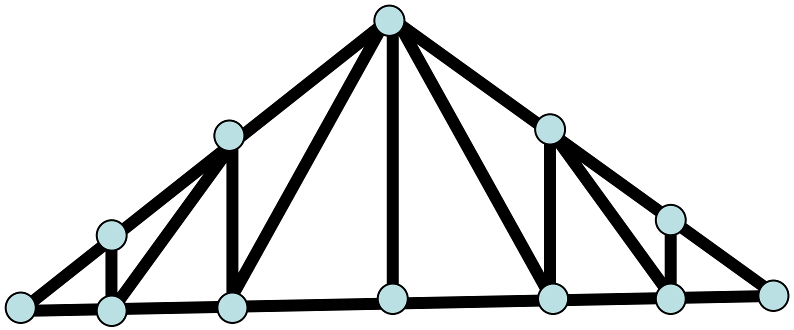
Sistema estructural



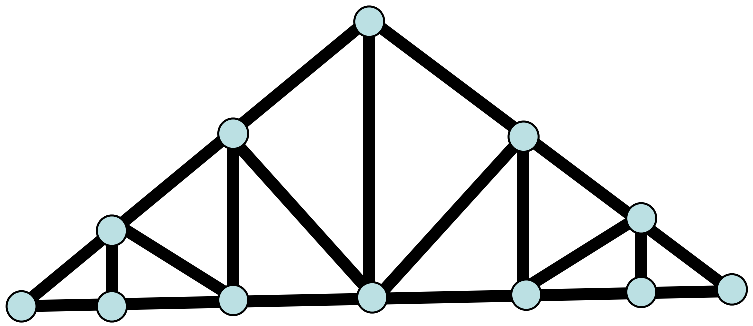
ANALÍSIS DE ESTRUCTURAS ARTICULADAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS



Luces cortas (<20 m)
Plantas en las que se requiere espacio vertical



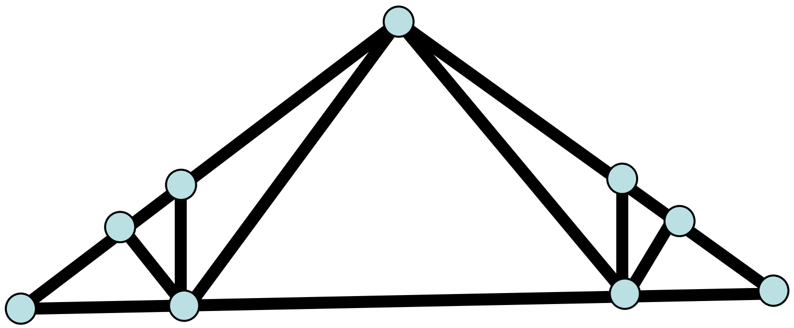
Howe



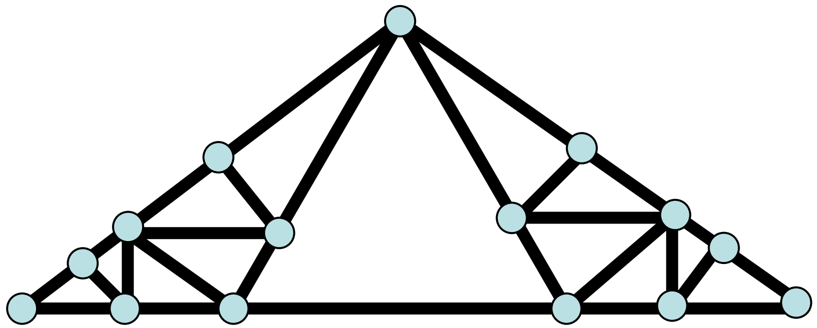
Pratt

Luces moderadas (20-30 m)

Su diseño puede modificarse para conseguir techos planos

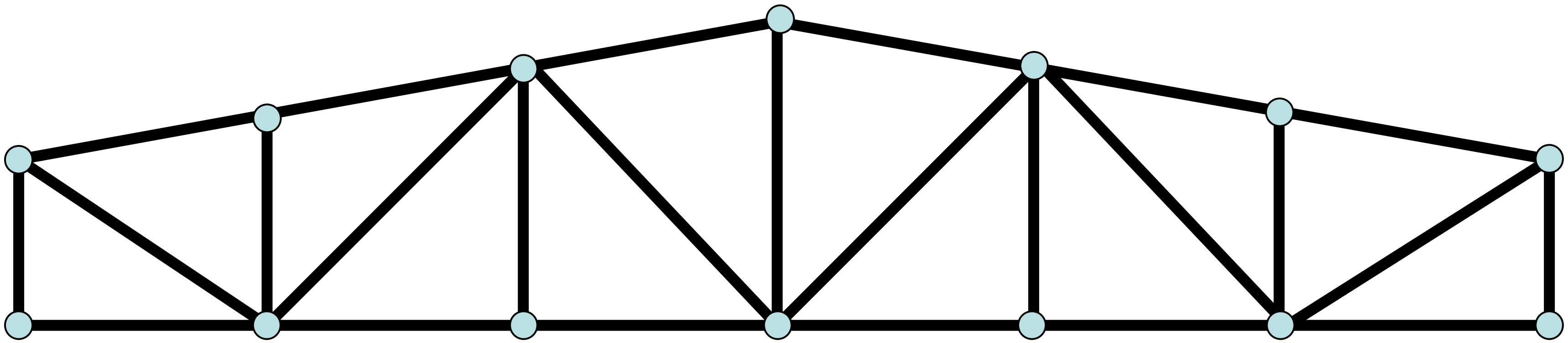


Fan



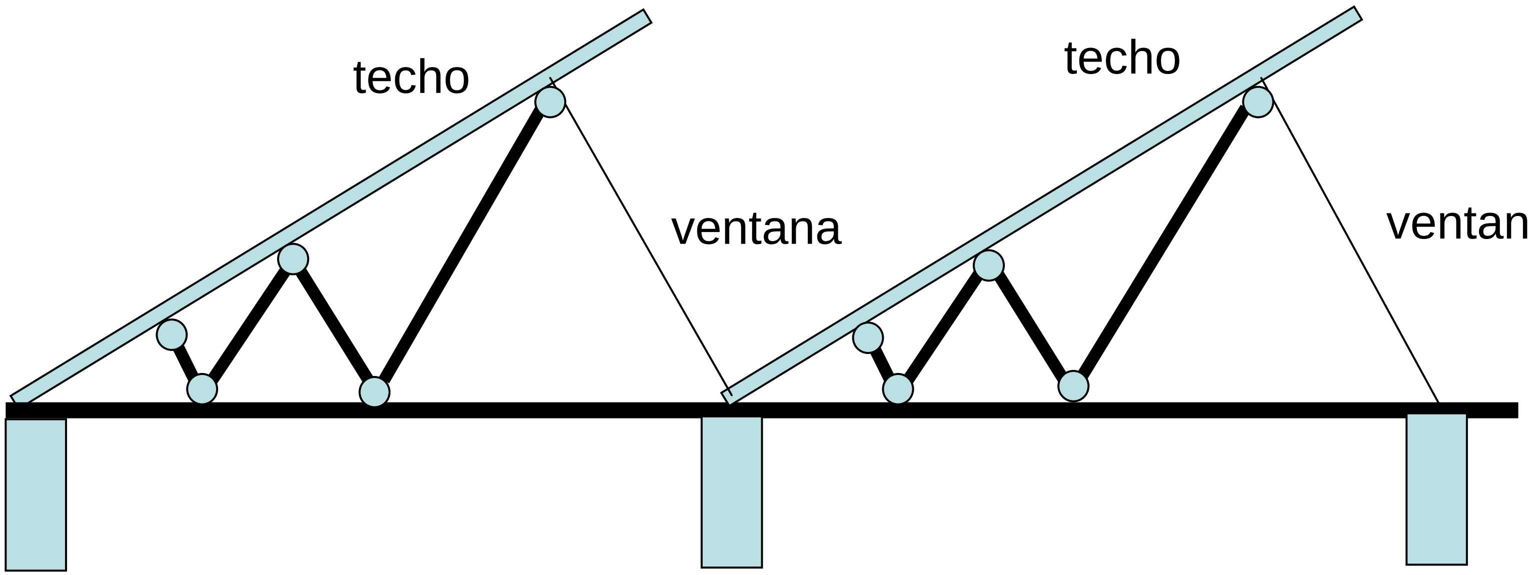
Fink

Luces grandes (>30 m)



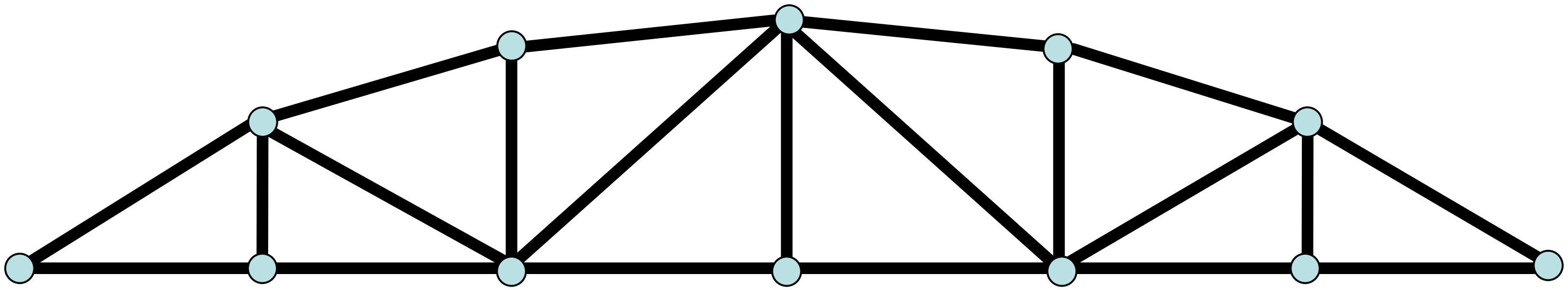
Warren

Aplicable cuando se desean cubiertas planas

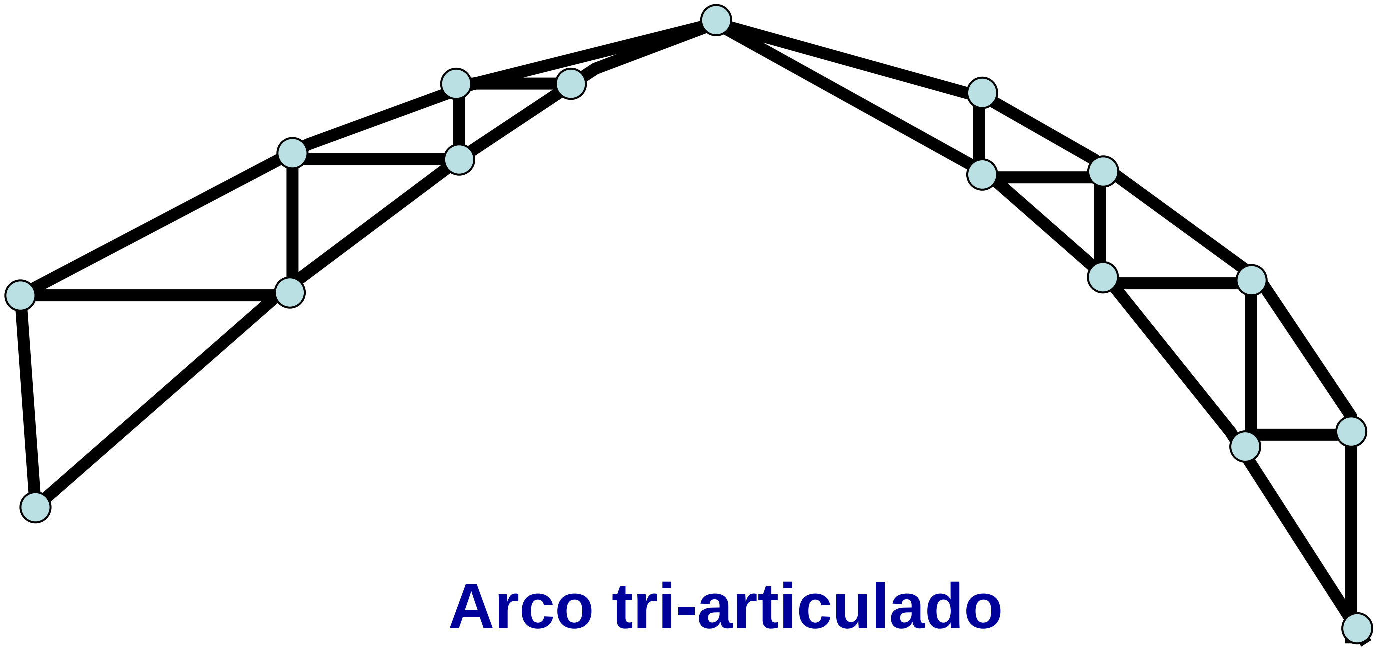


En diente de sierra

Cuando la localización de pilares no es problema
Cuando se precisa iluminación natural



Garajes y hangares aeronáuticos

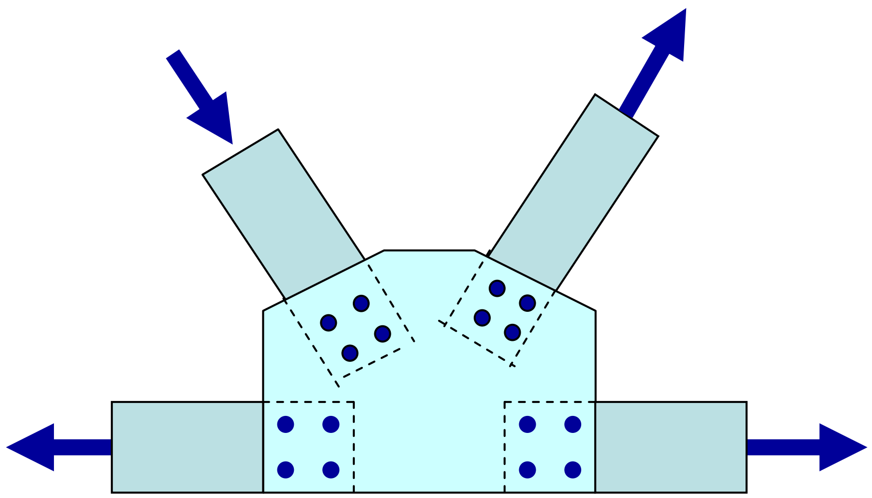


Arco tri-articulado

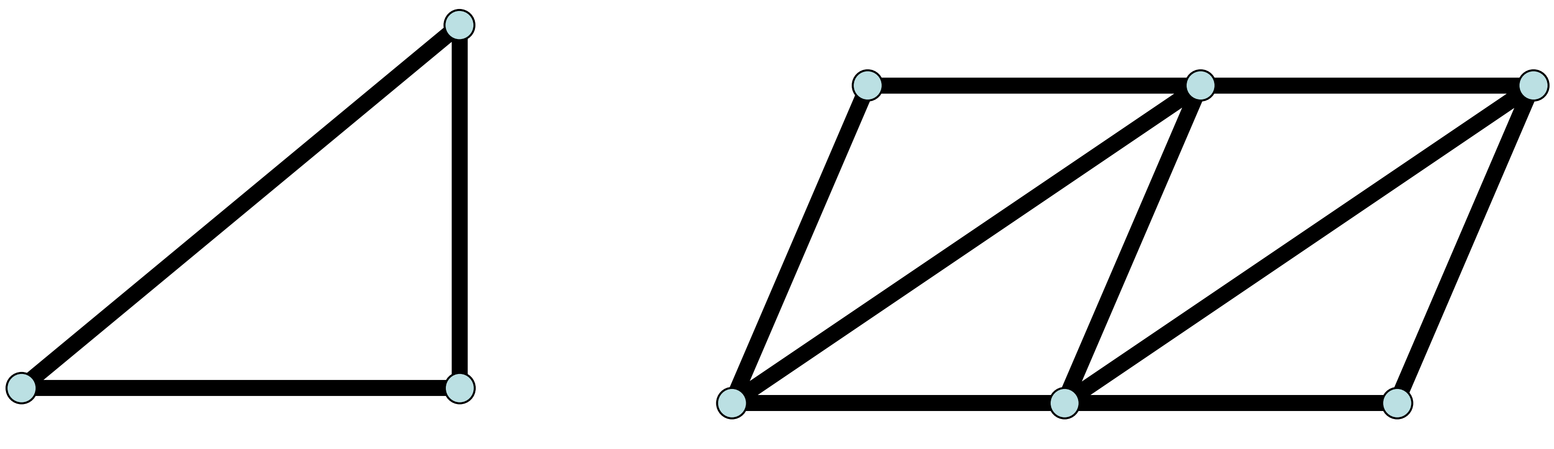
Alturas altas y luces grandes

Hipótesis de diseño

- **Las barras se unen unas a otras mediante uniones flexibles**
  - Los ejes de las barras son concurrentes en un punto
  - En la realidad, esta unión proporciona alguna rigidez (tensiones secundarias)



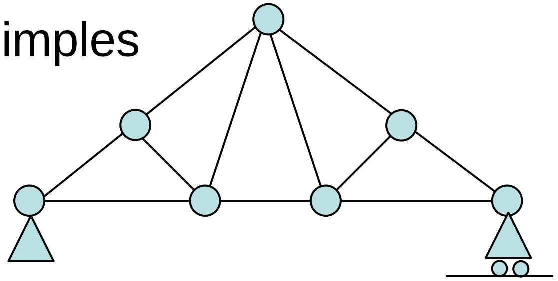
ESTRUCTURAS ARTICULADAS CANÓNICAS



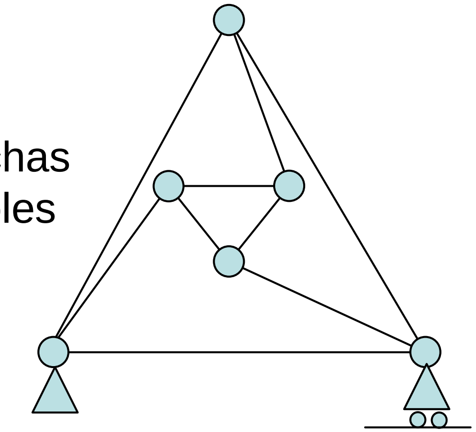
Formadas por triángulos

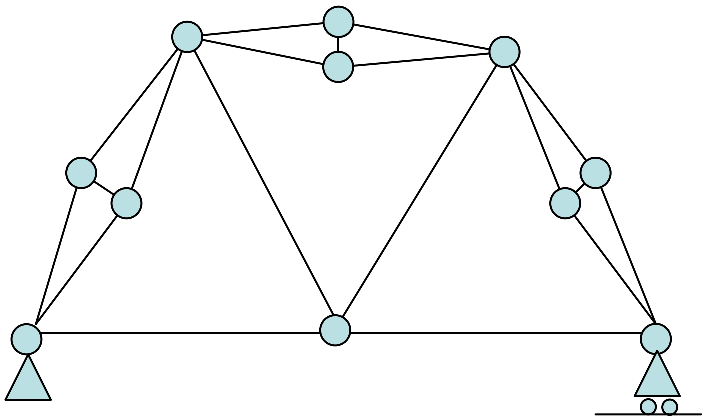
ESTRUCTURAS ARTICULADAS COMPUESTAS

Cerchas simples



Cerchas
simples

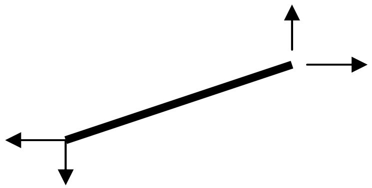




ESTRUCTURAS ARTICULADAS ISOSTÁTICAS O ESTRICTAMENTE COMPLETAS

Son aquéllas en las que pueden determinarse los esfuerzos axiles en todas las barras utilizando, exclusivamente, las ecuaciones de la estática. Si denominamos b al número de barras de la Estructura, n al número de nudos de la misma y c al número de coacciones externas, podemos establecer:

Número de incógnitas por barra: 4



Número de incógnitas: 4b + Coacciones externas: c = 4b+c

Número de ecuaciones que podemos plantear:

Equilibrio de una barra: 3 (ΣH=0, ΣV=0 y ΣM=0)

Equilibrio de un nudo: 2 (ΣH=0 y ΣV=0)

3b+2n

El problema es estáticamente determinado cuando:

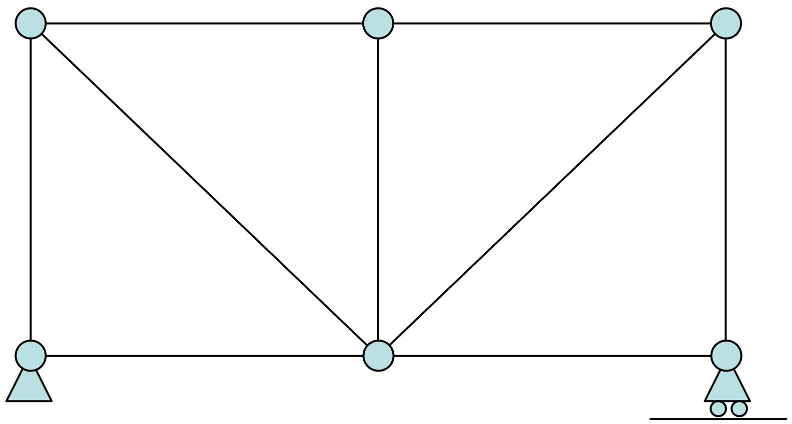
4b+c=3b+2n

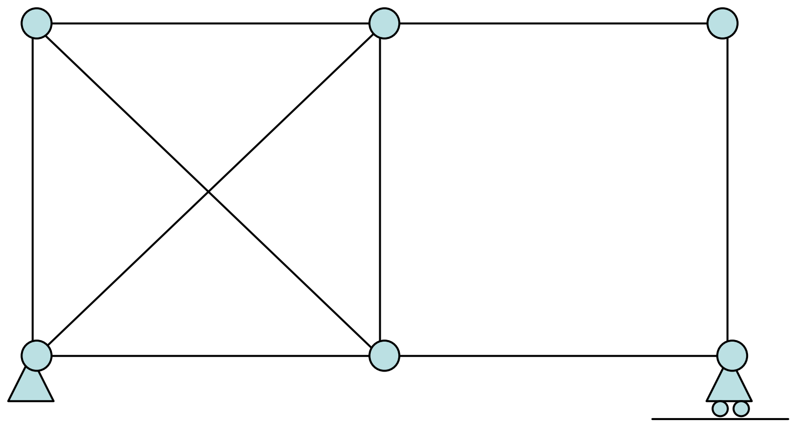
$$\boxed{b=2n-c}$$

GDH=b+c-2n

Sí GDH < 0 (Mecanismo)
Sí GDH = 0 (Isostática ?)
Sí GDH >0 (Hiperestática)

La condición anterior de isostaticidad es una condición necesaria, pero no suficiente:

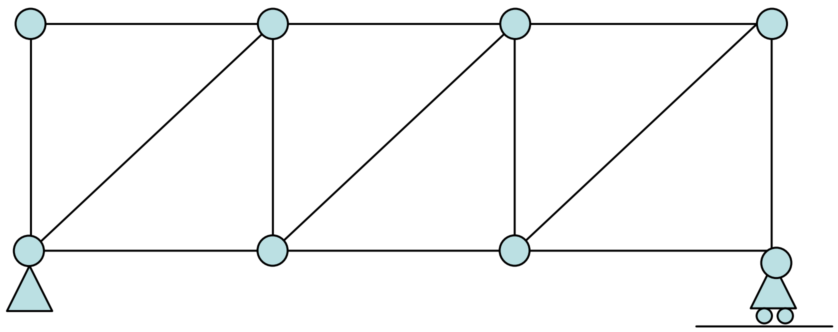


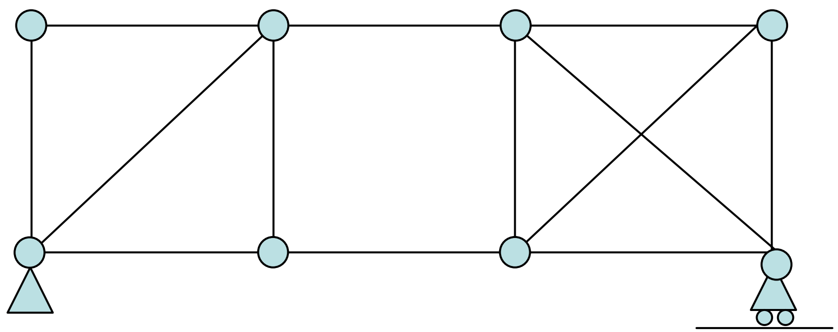


b=9, n=6, c=3 ¡Se cumple la condición!

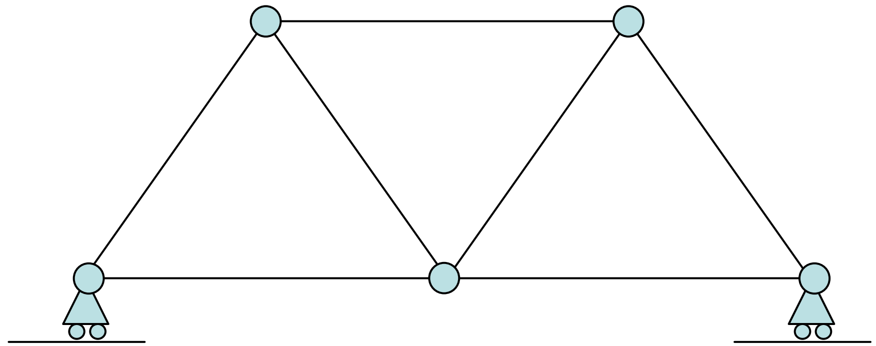
b=9, n=6, c=3
¡Se cumple también la condición pero no existe equilibrio, ante las posibles cargas, por tratarse de un mecanismo!

Pero, desde luego

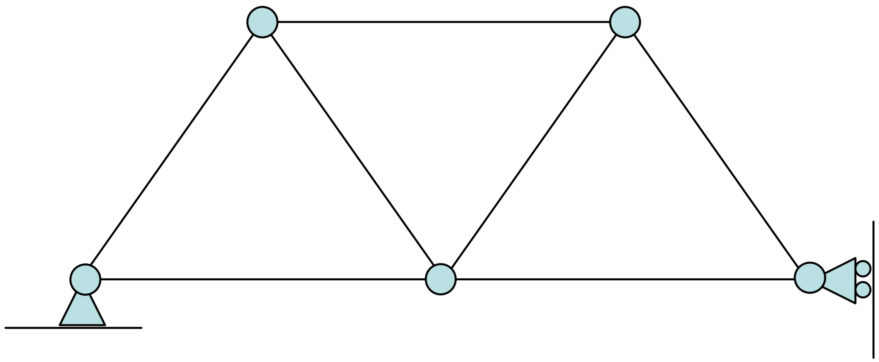




Estabilidad externa de la estructura



Estructura inestable



Estructura inestable

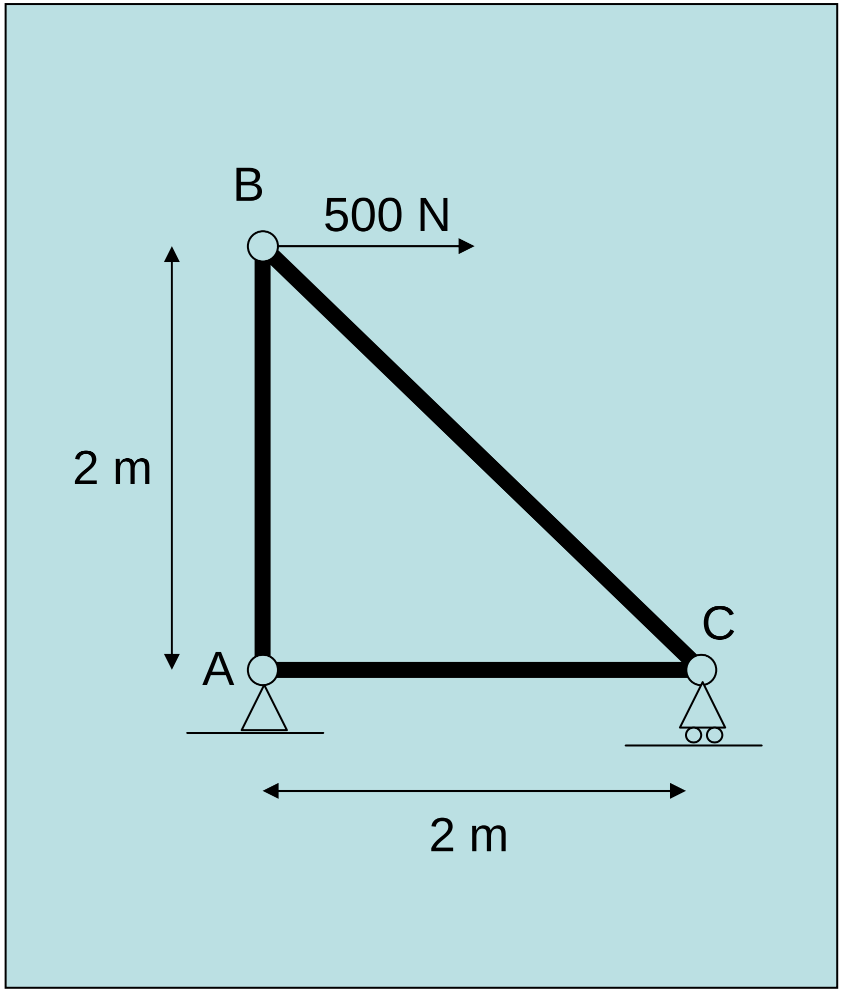
Métodos de análisis

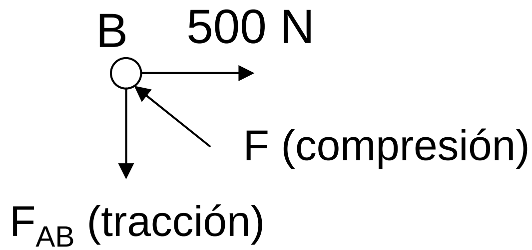
- Método de los nudos
- Método de las secciones
- Métodos gráficos (Cremona)

Métodos de análisis

- Método de los nudos
- Método de las secciones
- Métodos gráficos (Cremona)

Estructura articulada en equilibrio => Todos y cada uno de sus nudos están en equilibrio

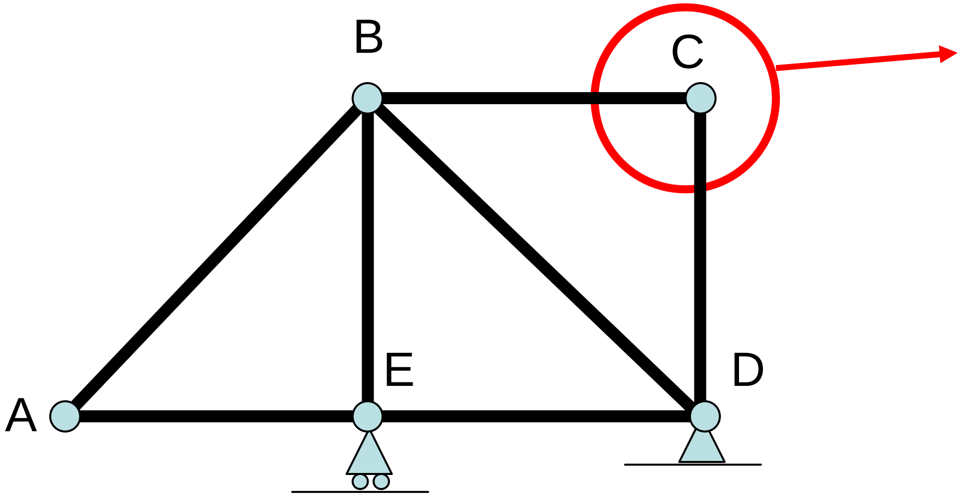


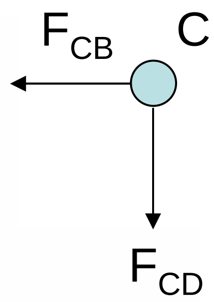


Procedimiento

- Plantee las ecuaciones de equilibrio en cada nudo
- Tenga en cuenta las posibles simetrías
- Identifique las barras que no sufren ningún esfuerzo
  - (i) cuando sólo dos barras de diferentes direcciones coincidan en un nudo, y éste no está exteriormente cargado, ninguna de las dos barras sufre esfuerzo axil
  - (ii) Si tres barras coinciden en un nudo, y éste no está cargado, y dos de las barras tienen la misma dirección, la barra no colineal con las dos anteriores no sufre esfuerzo axil

Dos barras coincidentes en un nudo no cargado (nudo C):



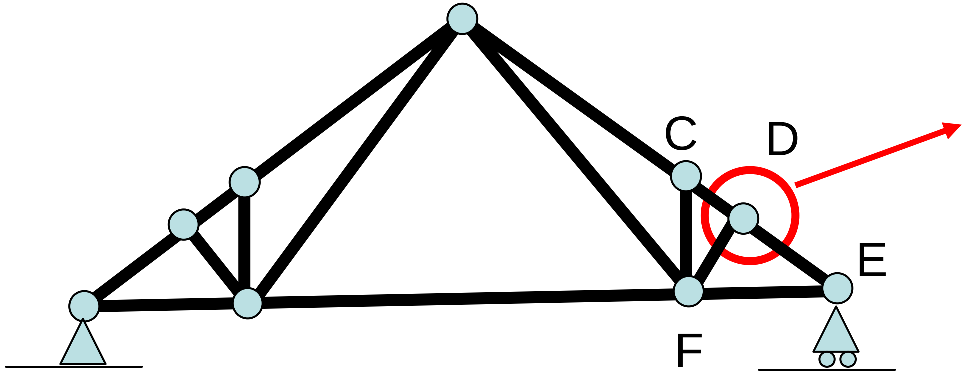


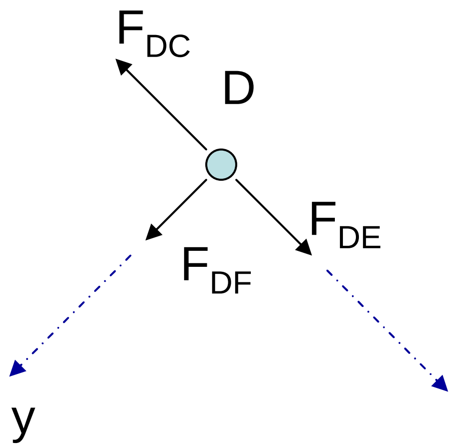
$$\sum F_x = F_{CB} = 0$$

$$\sum F_y = F_{CD} = 0$$

Nota: lo mismo se podría aplicar al nudo A. Por tanto, en la estructura de la figura, sólo las barras BE, ED y DB sufrirán esfuerzos axiles

Tres barras coincidentes en un nudo no cargado (nudo D) siendo dos de ellas colineales:





$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DC} \ y \ F_{DE} \quad \textit{iguales y contrarias}$$

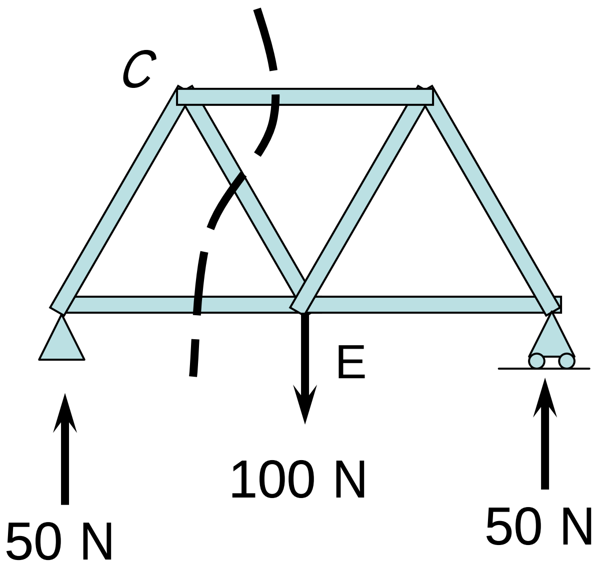
$$\sum F_y = F_{DF} = 0$$

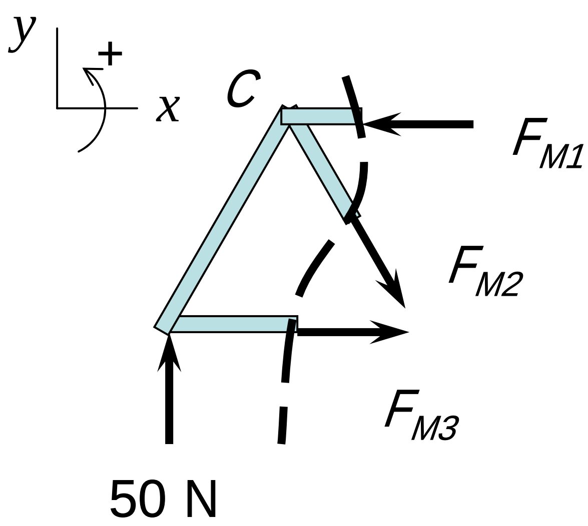
Métodos de análisis

- Método de los nudos
- Método de las secciones
- Métodos gráficos (Cremona)

Estructura articulada en equilibrio => Todas sus partes están en equilibrio

EJEMPLO:





Ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0$$

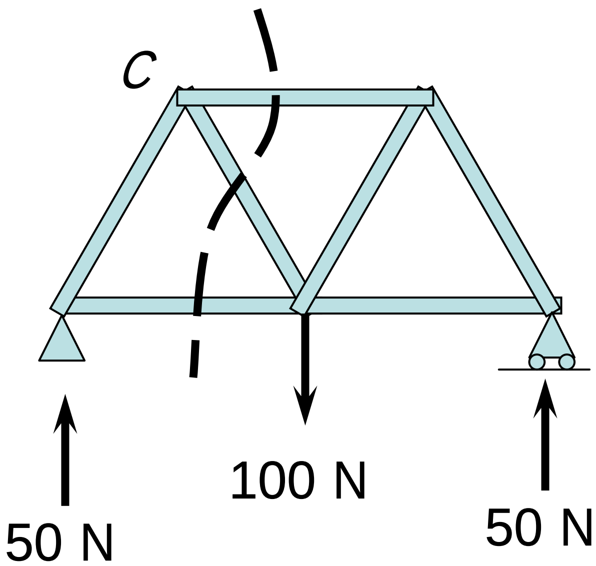
$$\sum F_y = 0$$

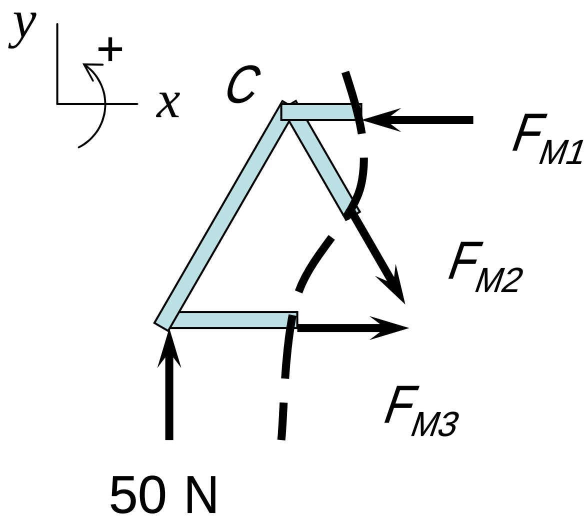
$$\sum M = 0$$

Si tomamos momentos respecto de C podríamos determinar el valor de F_{M3}.

Si, posteriormente, tomamos momentos respecto de E, determinaríamos F_{M1}, …..

EJEMPLO:





$$\sum F_y = 0; \qquad 50 - F_{M2} \cos 30 = 0; \qquad F_{M2} = 57{,}7\ \mathrm{N}$$

$$\sum M_C = 0; \qquad -50\tfrac{1}{2}a + F_{M3}\, 0{,}866a = 0; \qquad F_{M3} = 28{,}9\ \mathrm{N}$$

$$\sum F_x = 0; \qquad -F_{M1} + 57{,}7 \cos 60 + 28{,}9 = 0; \qquad F_{M1} = 57{,}7\, N$$

Métodos de análisis

- Método de los nudos
- Método de las secciones
- Métodos gráficos (Cremona)

CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS

Para calcular desplazamientos en nudos de una estructura articulada, aplicaremos el teorema de Castigliano. Para ello, consideraremos como Sistema 0 el sistema estructural real, con sus cargas, del que partimos, y como Sistema I el mismo sistema estructural pero, ahora, sólo sometido a una carga unidad en el nudo y dirección en que deseamos obtener el desplazamiento.

Sin embargo, puede haber casos en los que, además de cargas mecánicas, algunas barras experimenten un cambio de temperatura o que, alguna de ellas, presente un error de fabricación (que haya quedado más corta o más larga que la longitud requerida).

En estas condiciones, la energía elástica del sistema estructural se expresa como:

$$U = \sum_{barras} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \cdot L_i}{E \cdot \Omega_i} + \sum_{\substack{barras \\ con\ error}} N_i \, \partial_i^e + \sum_{\substack{barras \\ con\ \Delta T}} N_i \, \partial_i^{\Delta T}$$

∂_i^e = error de ejecución de la barra *i*

$\partial_i^{\Delta T}$ = cambio de longitud de la barra *i* debido a la variación de temperatura

$$\partial_i^{\Delta T} = \alpha \; L_i \; \Delta T_i$$

Al igual que hicimos para el caso de cargas mecánicas actuando sobre la estructura, el desplazamiento de un nudo en una determinada dirección lo calcularemos como ya hacíamos sólo que, ahora, hay que añadir los sumandos:

$$\sum N_i^I \partial_i^e$$

$$\sum N_i^I \partial_i^{\Delta T}$$

$$d_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{barras} N_i^0 \; N_i^I \; \frac{L_i}{E\Omega_i} + \sum N_i^I \partial_i^e + \sum N_i^I \partial_i^{\Delta T}$$

T.T.V.

$$\iiint_V \vec{f}_V \cdot \vec{\delta}\, dVol + \iint_\Omega \vec{f}_\Omega \cdot \vec{\delta}\, d\Omega =$$

$$= \iiint_V \left(\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \tau_{xy}\gamma_{xy}^\delta + \tau_{xz}\gamma_{xz}^\delta + \tau_{yz}\gamma_{yz}^\delta\right) dVol$$

Trabajo virtual fuerzas exteriores:

$$\iiint_V \vec{f}_V \cdot \vec{\delta}\, dVol + \iint_\Omega \vec{f}_\Omega \cdot \vec{\delta}\, d\Omega = 0$$

Trabajo virtual tensiones internas:

$$\iiint_V \left(\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \tau_{xy}\gamma_{xy}^\delta + \tau_{xz}\gamma_{xz}^\delta + \tau_{yz}\gamma_{yz}^\delta\right) dVol =$$

$$= \sigma_{CB} \frac{\delta \cos\alpha}{L_{CB}} \left(A \cdot L_{CB}\right) + \sigma_{DB} \frac{\delta \cos\beta}{L_{DB}} \left(A \cdot L_{DB}\right)$$

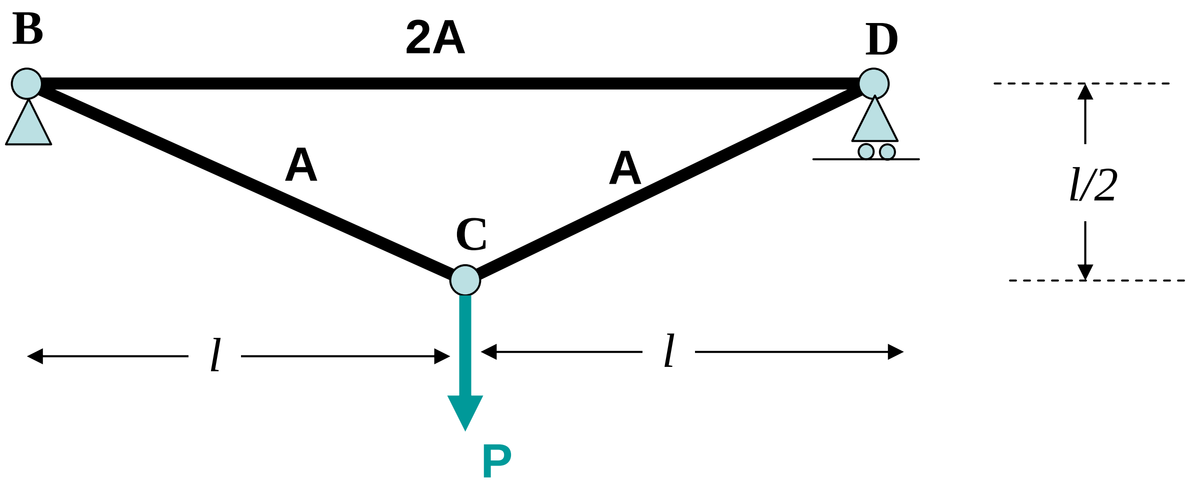
$$\sigma_{CB} \frac{\delta \cos\alpha}{L_{CB}} \left(A \cdot L_{CB}\right) + \sigma_{DB} \frac{\delta \cos\beta}{L_{DB}} \left(A \cdot L_{DB}\right) = 0$$

En el sistema articulado de la figura formado por tres barras de idéntico material y siendo las áreas de sus respectivas secciones transversales: A, para las barras BC y CD, y 2A para la barra BD, determinar, cuando, sobre él actúa la carga P:

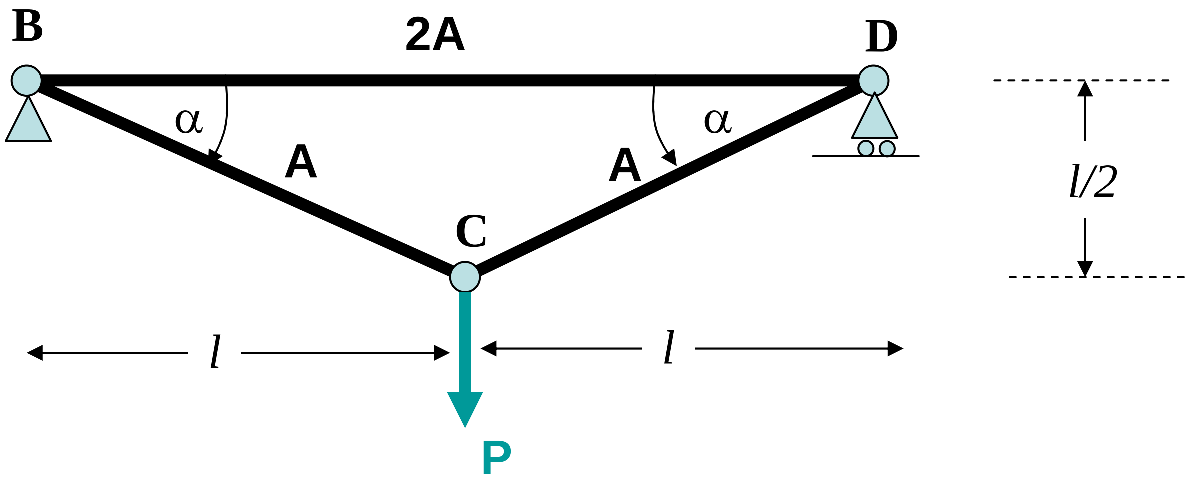
a.- Las fuerzas axiles a las que se encuentran sometidas cada una de las barras

b.- La energía elástica que almacena el sistema

c.- El desplazamiento vertical del nudo C y el horizontal del nudo D.



ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LA ESTRUCTURA ARTICULADA

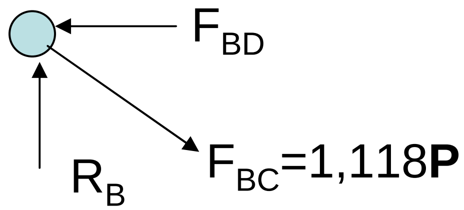


$$\alpha = \boldsymbol{arctan}\frac{\boldsymbol{l}/2}{\boldsymbol{l}} = 26{,}565$$

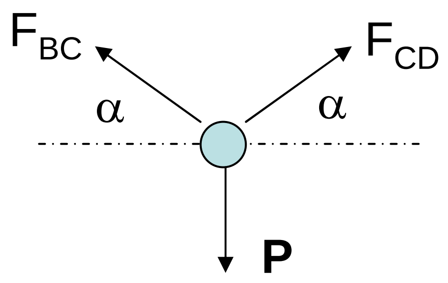
$$\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{CD} = \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{cos}\,\alpha} = 1{,}118\boldsymbol{l}$$

RESOLUCIÓN DE LA EXTRUCTURA POR EQUILIBRIO DE NUDOS:

NUDO B



NUDO C



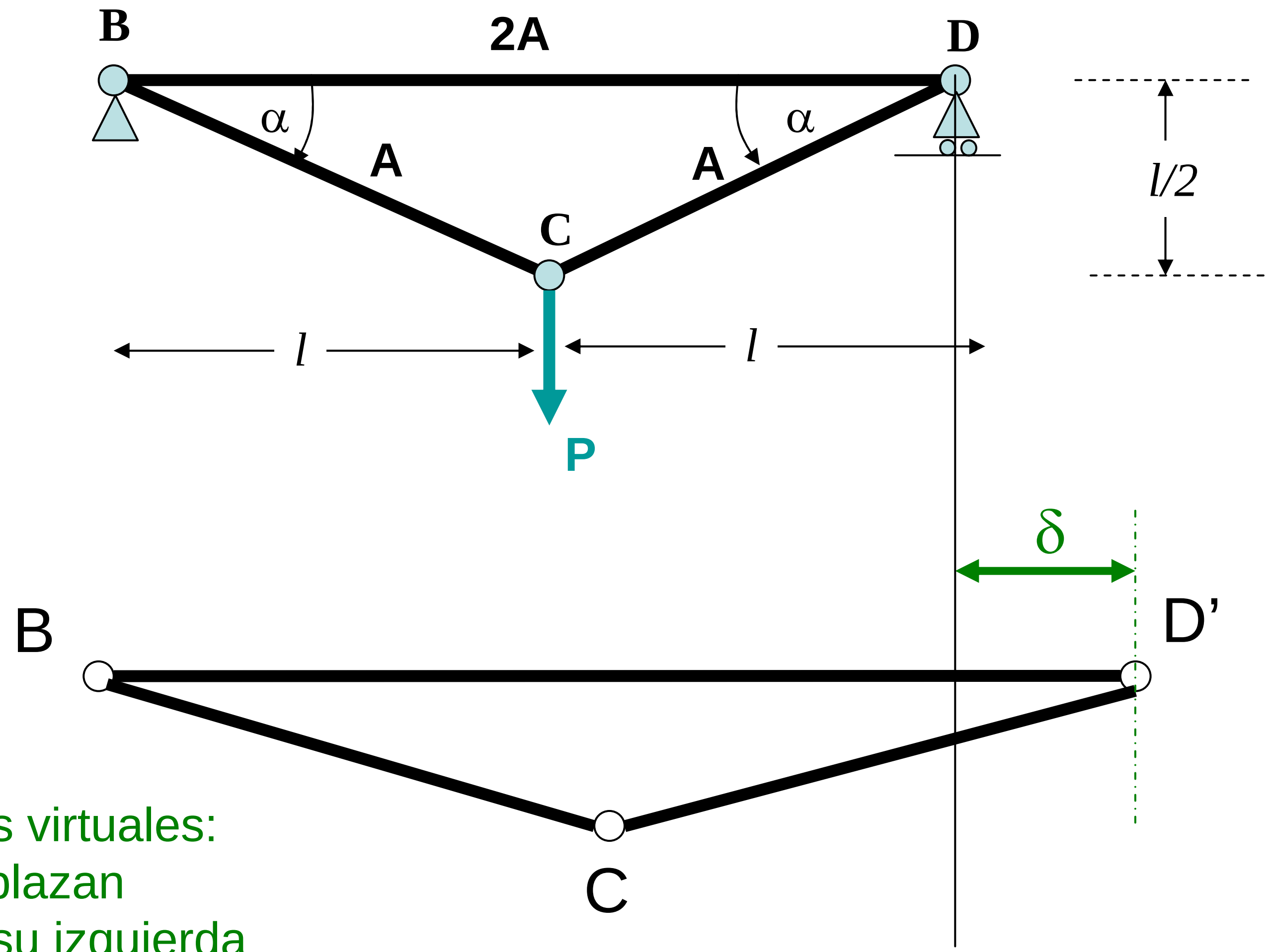
$$\boldsymbol{F_{BC}=F_{CD}} \text{ por simetría}$$

$$2\boldsymbol{F_{CD}sen}\alpha = \boldsymbol{P}$$

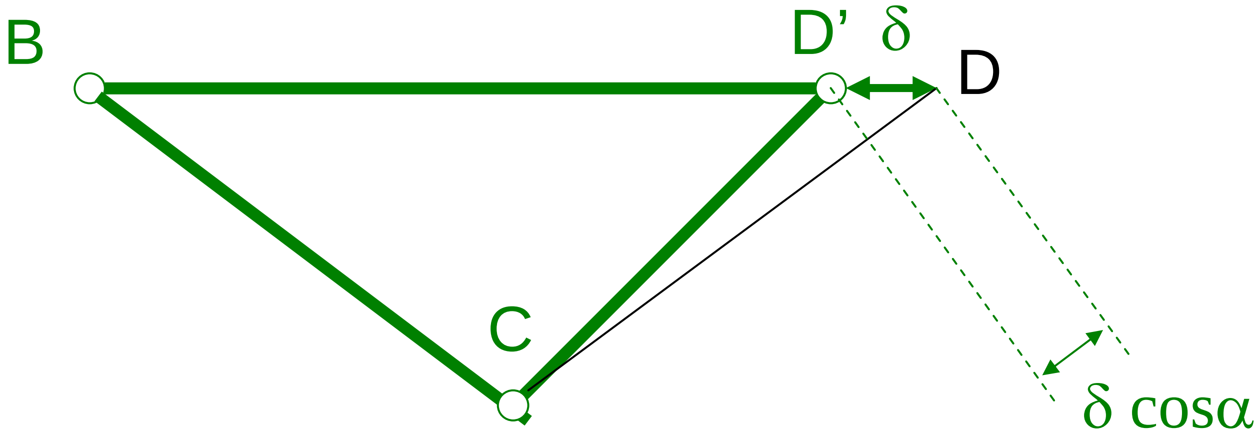
$$\boldsymbol{F_{CD}} = 1{,}118\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F_{BC}}$$

$$\boldsymbol{F_{BD}} = 1{,}118\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{cos}\,\alpha = \boldsymbol{P}$$

RESOLUCIÓN DE LA EXTRUCTURA POR EL P.T.V.:



Desplazamientos virtuales:
B y C no se desplazan
D lo hace hacia su izquierda
una magnitud δ



$$\varepsilon_{CD}^{\delta} = \frac{\delta \cos\alpha}{l'} \qquad \varepsilon_{BD}^{\delta} = \frac{\delta}{2l}$$

Trabajo fuerzas actuantes: $\delta W_{ext}=0$

Trabajo fuerzas internas:

$$\delta W_{\mathbf{int}} = \sigma_{CD}\varepsilon_{CD}^{\delta} \cdot Al' + \sigma_{BD}\varepsilon_{BD}^{\delta} \cdot (2A \cdot 2l) = \sigma_{CD} \frac{\delta \cos\alpha}{l'} \cdot Al' + \sigma_{BD} \frac{\delta}{2l}(2A \cdot 2l) =$$

$$= \frac{F_{CD}}{A}\frac{\delta \cos\alpha}{l'} \cdot Al' + \frac{F_{BD}}{2A}\frac{\delta}{2l}(2A \cdot 2l) = F_{CD} \cdot \delta \cos\alpha + F_{BD} \cdot \delta$$

$$\delta W_{ext} = \delta W_{\mathbf{int}} \quad \Rightarrow \quad 0 = F_{CD} \cdot \delta \cos\alpha + F_{BD} \cdot \delta \quad \forall \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_{CD} \cdot \cos\alpha + F_{BD} = 0$$

$$\boldsymbol{U} = \sum \frac{\boldsymbol{F_i}^2 \boldsymbol{L_i}}{2\boldsymbol{A_i E}} = \boldsymbol{U}_{BD} + \boldsymbol{U}_{BC} + \boldsymbol{U}_{CD} = \frac{\boldsymbol{P}^2 \cdot 2\boldsymbol{l}}{2(2\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}} + 2\frac{(1{,}118\boldsymbol{P})^2(1{,}118\boldsymbol{l})}{2\boldsymbol{AE}} = \frac{1{,}898\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\boxed{U = W}$$

NUDO C:

$$\frac{1}{2}Pd = \frac{1{,}898P^2 l}{AE} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3{,}796Pl}{AE}$$

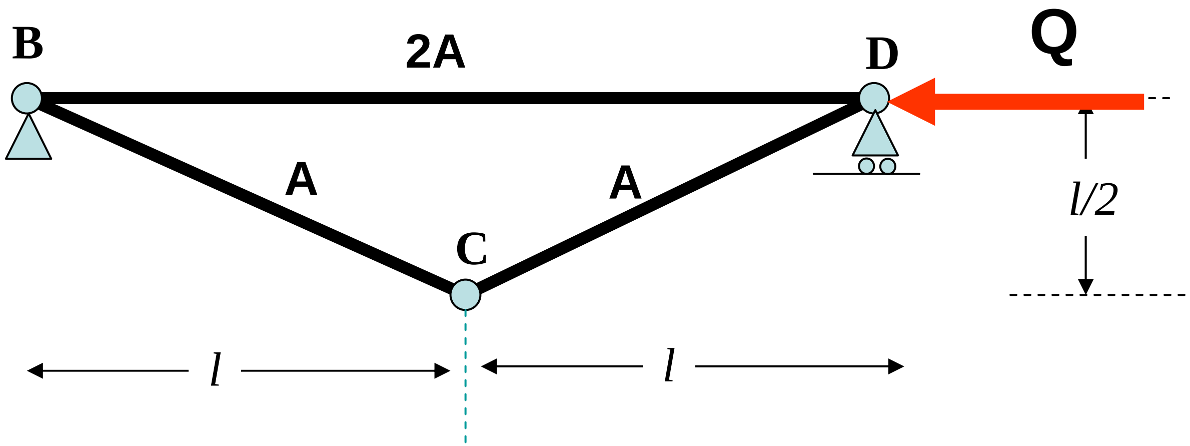
NUDO D:

$$\overleftarrow{u} = \varepsilon_{BD} \cdot (2l) = \frac{P/2A}{E} = \frac{P \cdot (2l)}{2EA} = \frac{P \cdot l}{EA}$$

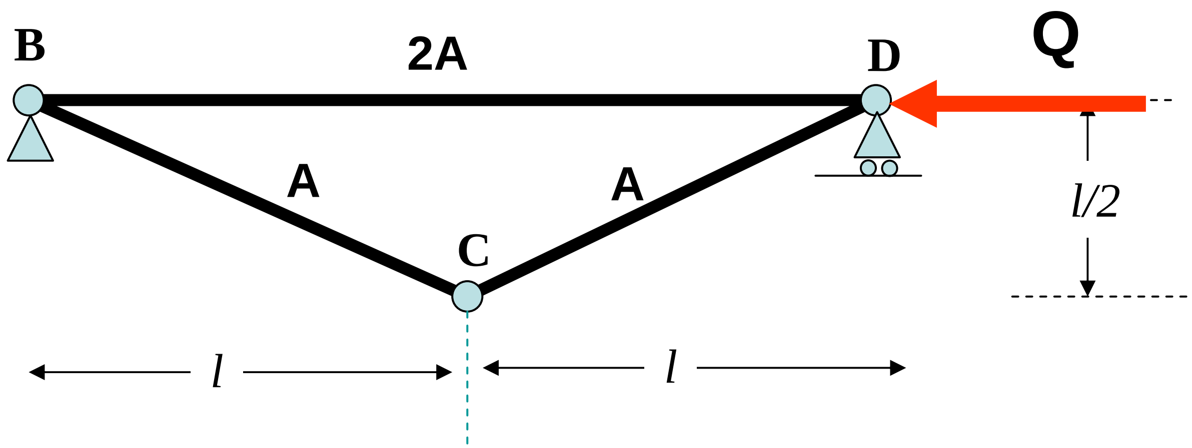
PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO:

$$d = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1{,}898 \cdot 2Pl}{AE} = \frac{3{,}796Pl}{AE}$$

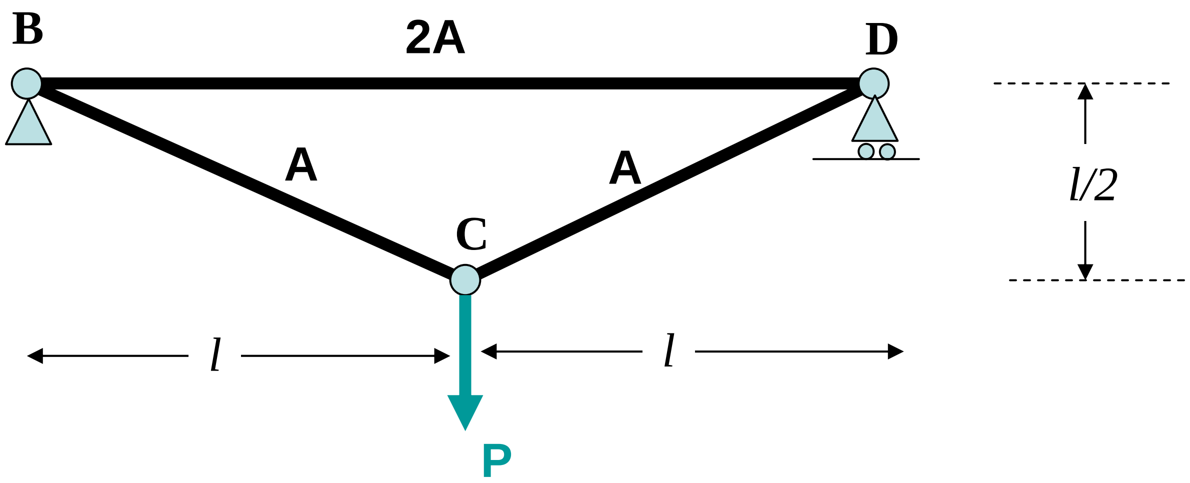
Determinar, aplicando el teorema de reciprocidad y para la estructura articulada del problema anterior el desplazamiento vertical del punto C cuando actúa la carga Q que se observa en la figura:



SISTEMA I



SISTEMA II



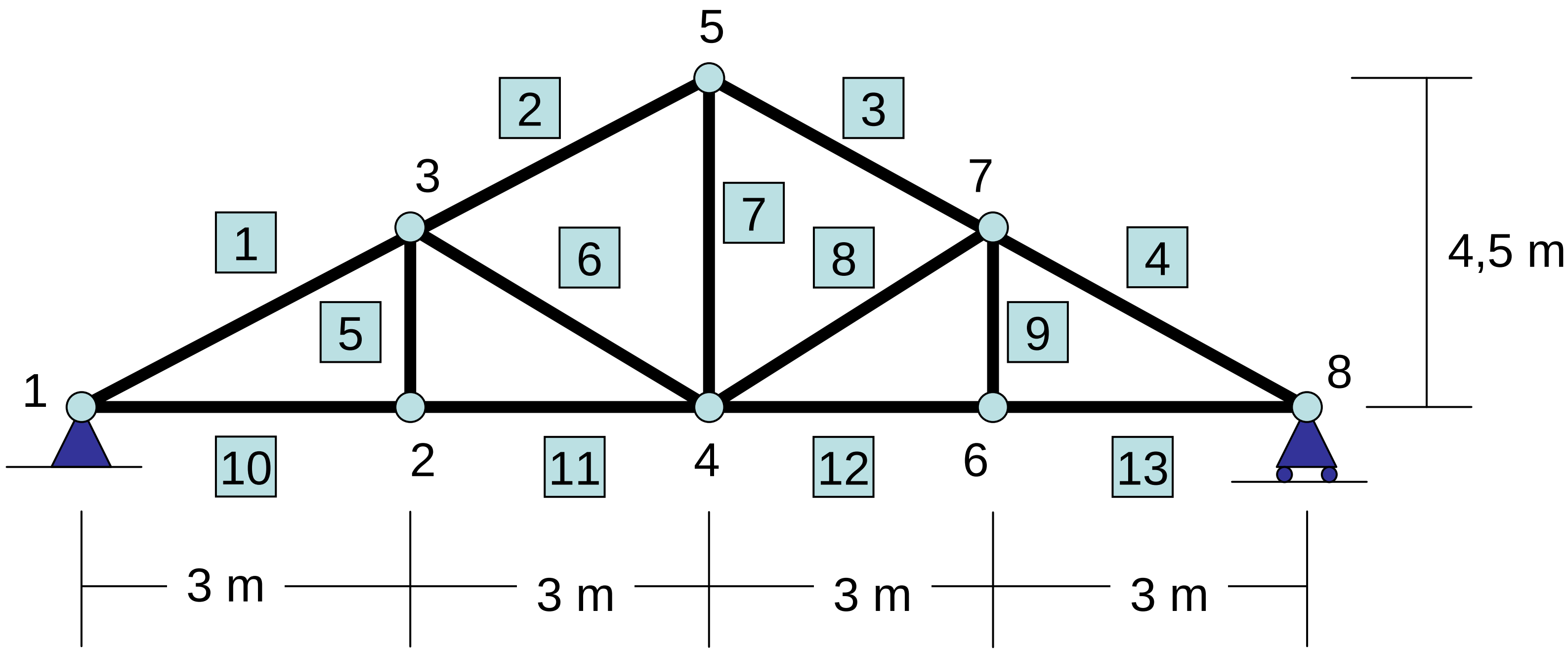
$$P \cdot d_C^{I}(\downarrow) = Q \cdot u_D^{II}(\leftarrow)$$

$$\overleftarrow{u}_D^{II} = \frac{P \cdot l}{EA}$$

$$d_C^{I}(\downarrow) = \frac{Q}{P} \cdot u_D^{II}(\leftarrow) = \frac{Q \cdot l}{EA}$$

PROBLEMA PROPUESTO 1

En la estructura articulada de la figura, las barras 1-2 y 2-4 sufren un descenso de temperatura de 15 ºC y las barras 1-3, 3-5, 5-7 y 7-8 un aumento de 30 ºC. Determinar el desplazamiento vertical que experimenta el nudo 4.

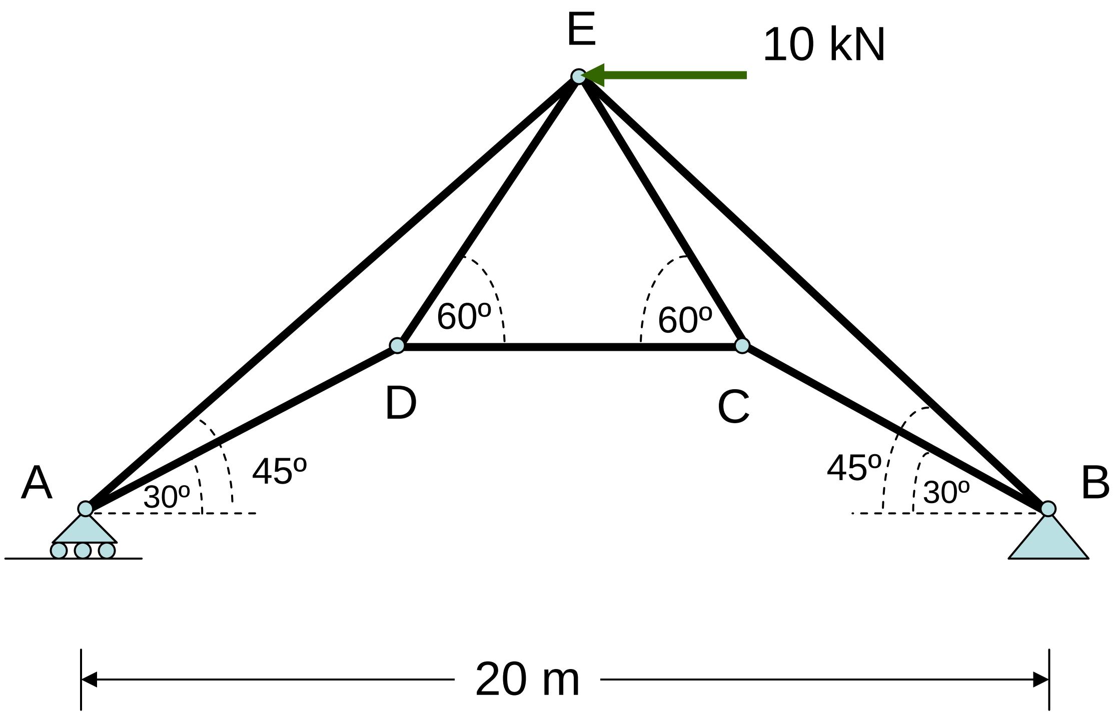


NOTA: El material de las barras es acero (E=210 GPa), y todas ellas tienen la Misma sección transversa (5 cm^2) y mismo coeficiente de dilatación lineal ($\alpha=10^{-5}$ $(ºC)^{-1}$)

Solución: d_v=4,35 mm hacia abajo

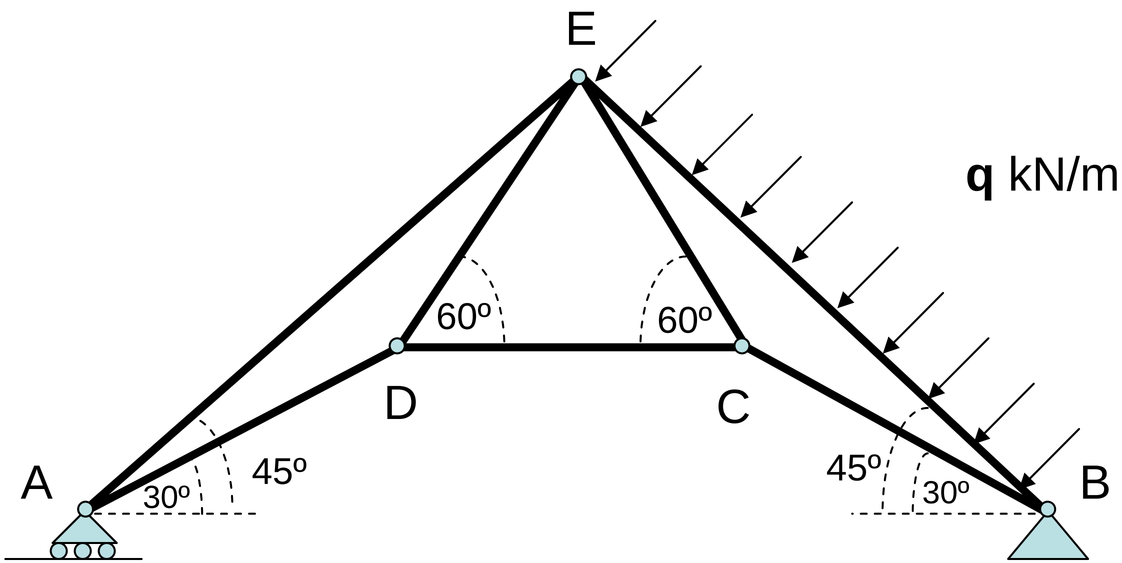
PROBLEMA PROPUESTO 2

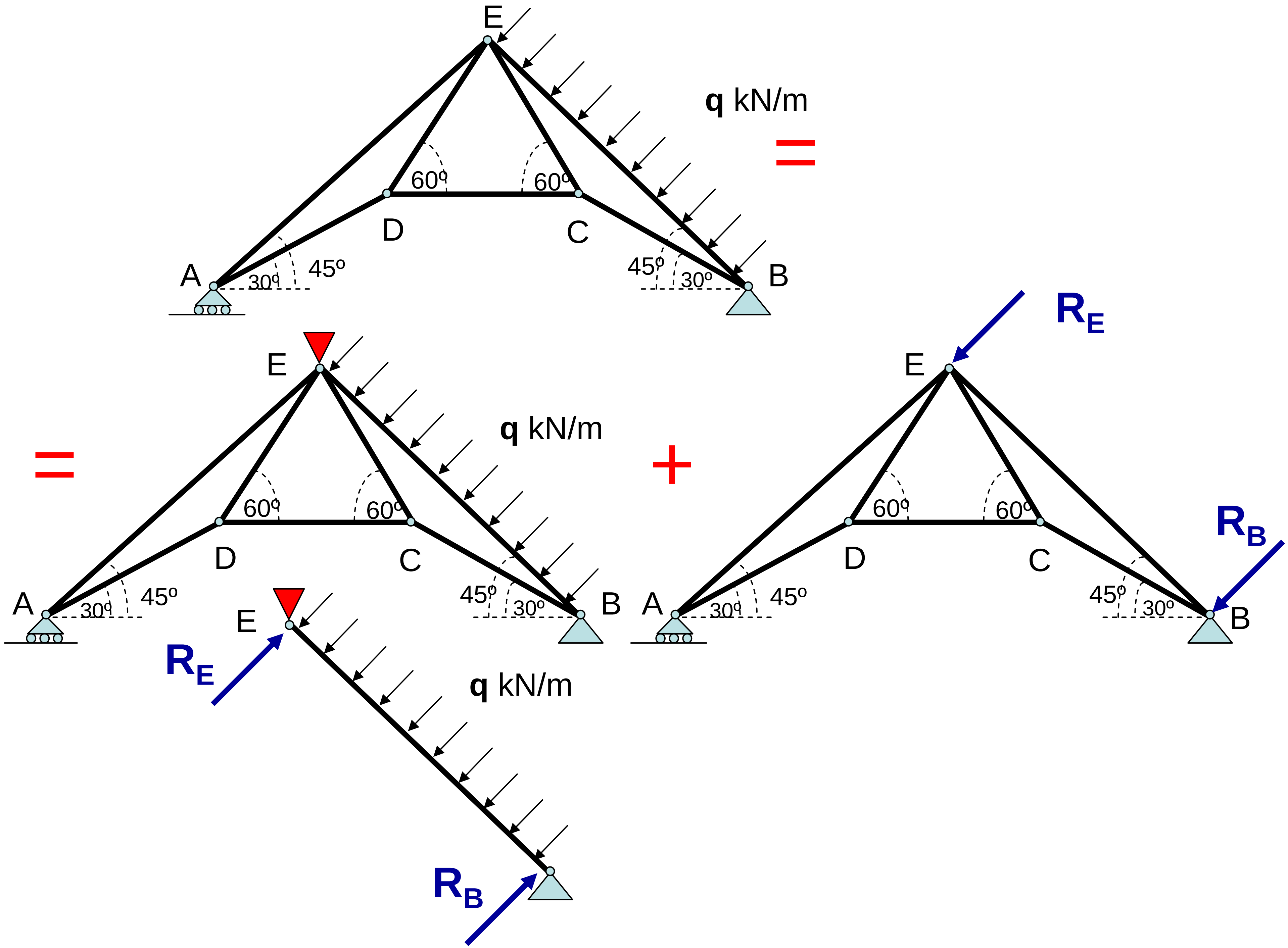
Determinar los desplazamientos horizontal y vertical del nudo E de la estructura articulada de la figura.
Tómese EA=100 MN



Solución:
d_h=8,15 mm
d_v=8,67 mm

Hasta ahora, las cargas se han supuesto actuando en los nudos.
¿Qué hacer cuando una barra se encuentre directamente cargada?

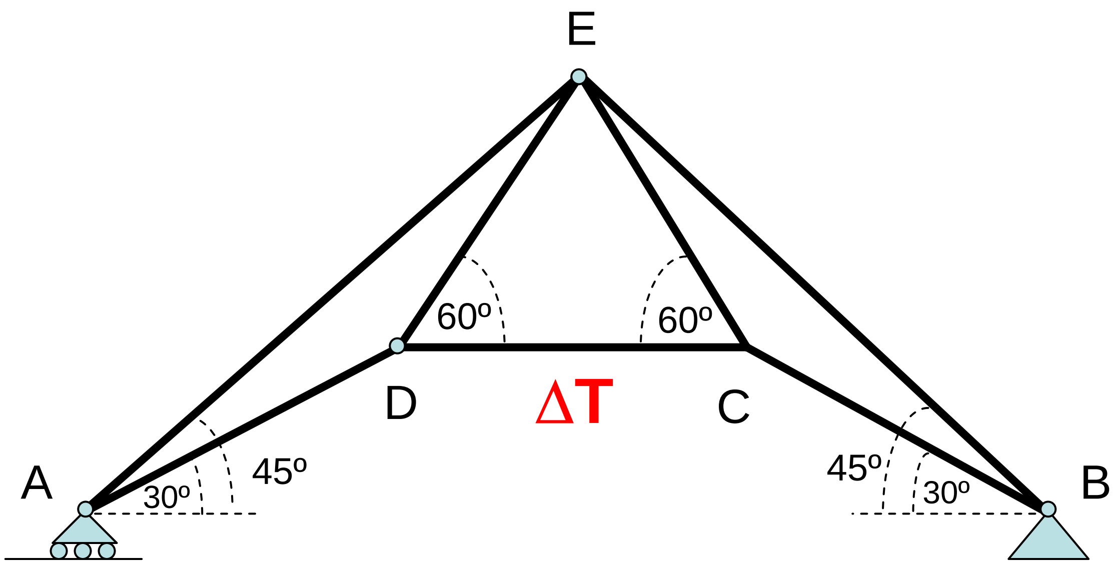


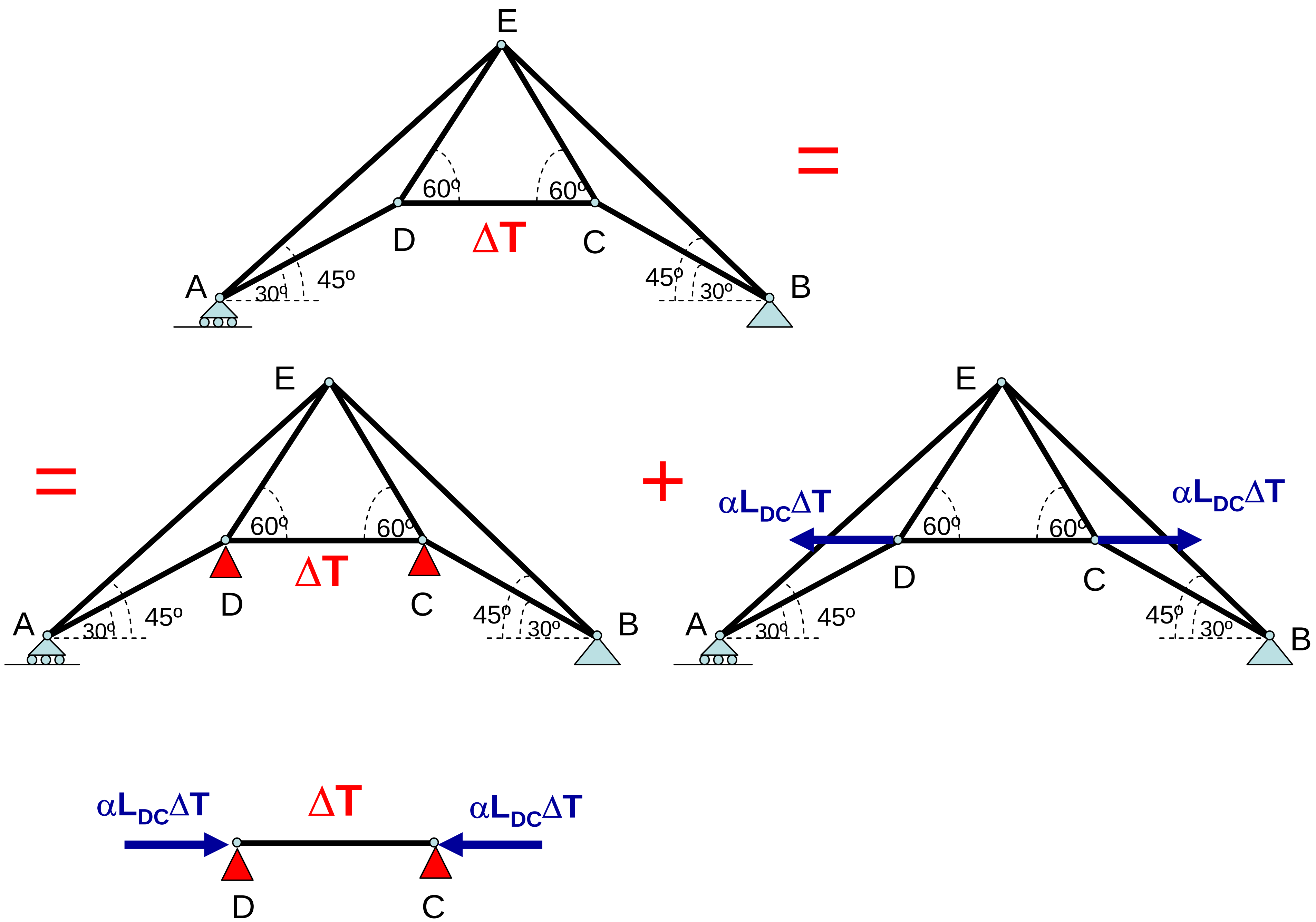


E
q kN/m
=
60º
60º
D
C
A
30º
45º
45º
30º
B
=
+
R_E
R_B

¿Qué hacer cuando una barra se encuentra sometida a un incremento térmico?

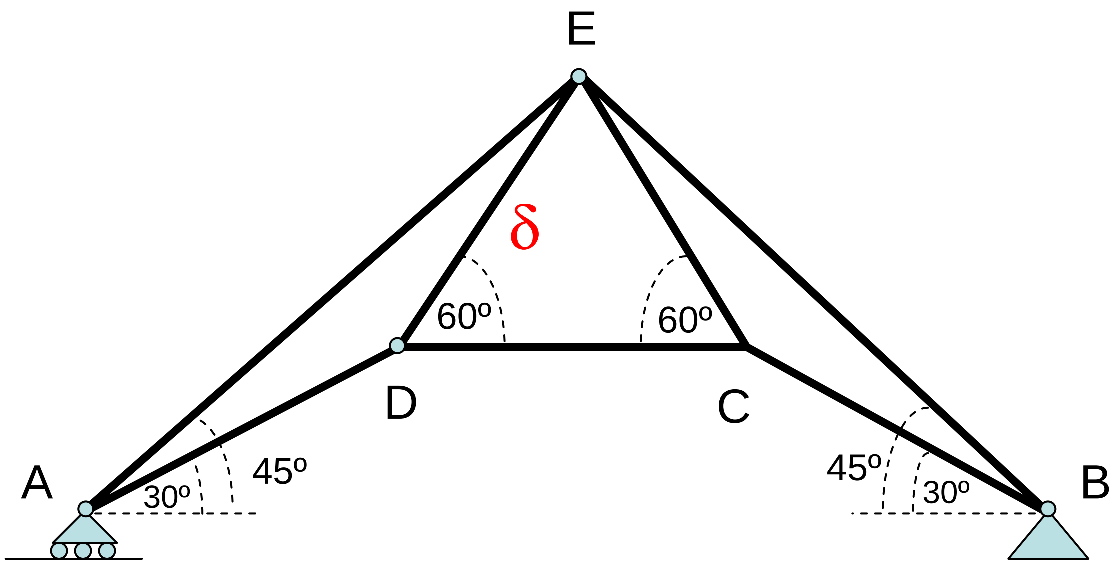
(Por ejemplo, la barra DC sufre un incremento térmico ΔT)

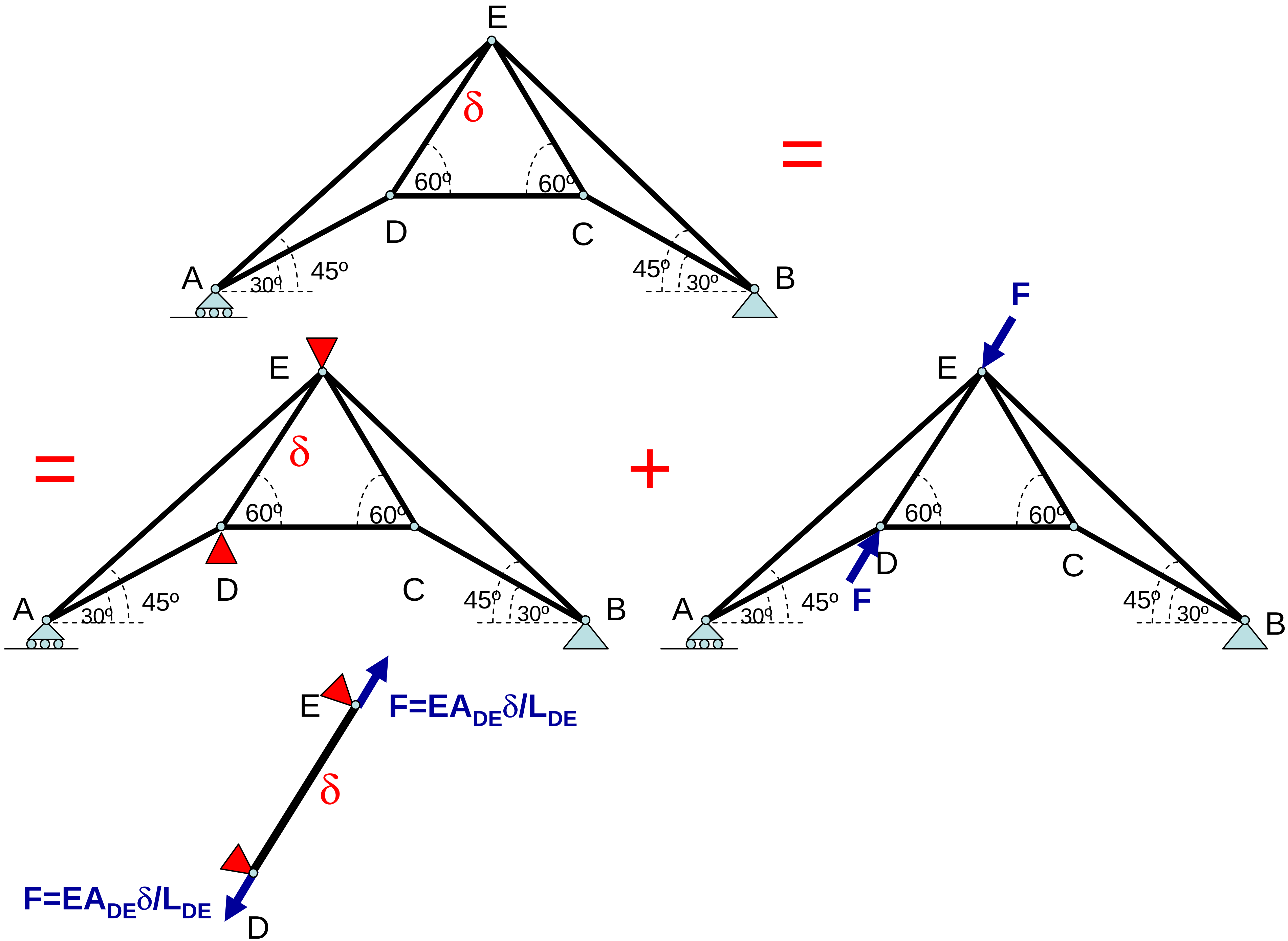



E
60º
60º
D
ΔT
C
A
30º
45º
45º
30º
B
=
=
E
60º
60º
D
ΔT
C
A
30º
45º
45º
30º
B
+
αL_DCΔT
αL_DCΔT
E
60º
60º
D
C
A
30º
45º
45º
30º
B
αL_DCΔT
ΔT
αL_DCΔT
D
C

¿Qué hacer cuando una barra sufrió un error de ejecución?

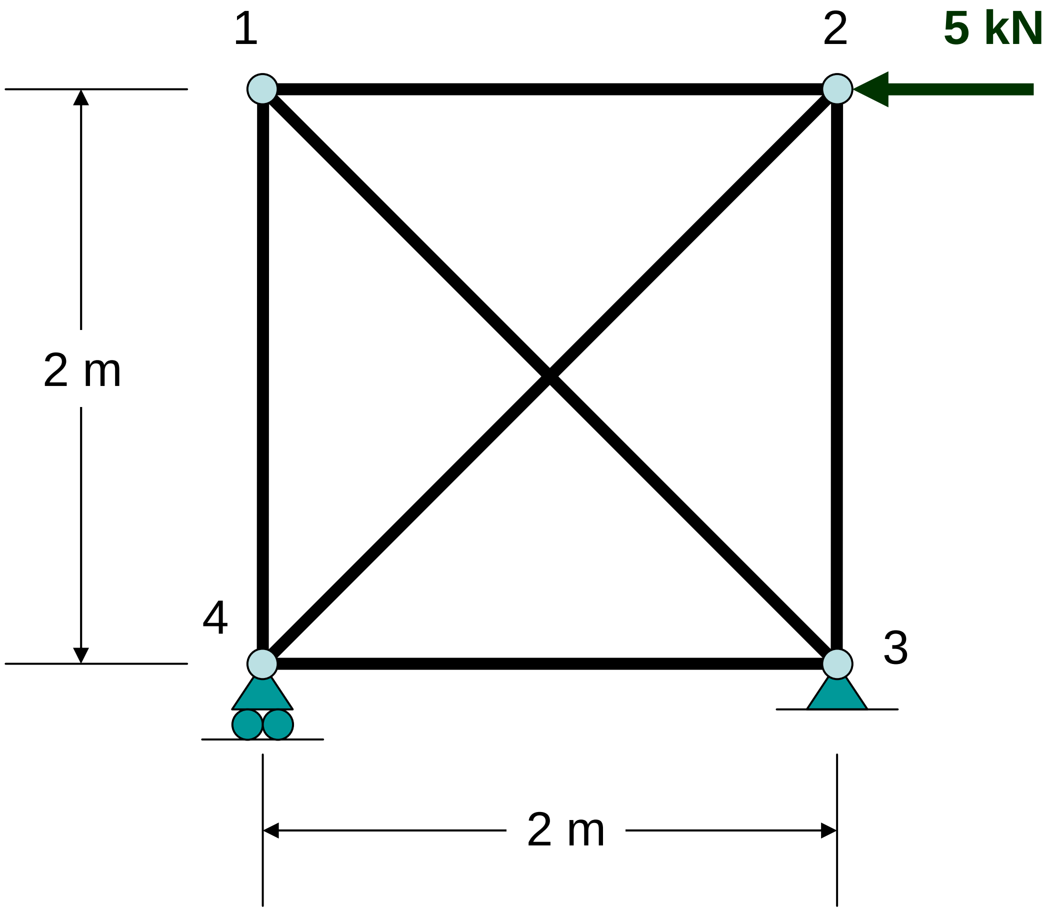
(Por ejemplo, la barra DE es δ metros más corta)





E
δ
60º
60º
D
C
A
30º
45º
45º
30º
B
=
=
E
δ
60º
60º
A
30º
45º
D
C
45º
30º
B
+
F
E
60º
60º
D
C
A
30º
45º
F
45º
30º
B
E
F=EA$_{DE}$δ/L$_{DE}$
δ
F=EA$_{DE}$δ/L$_{DE}$
D

ESTRUCTURAS ARTICULADAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

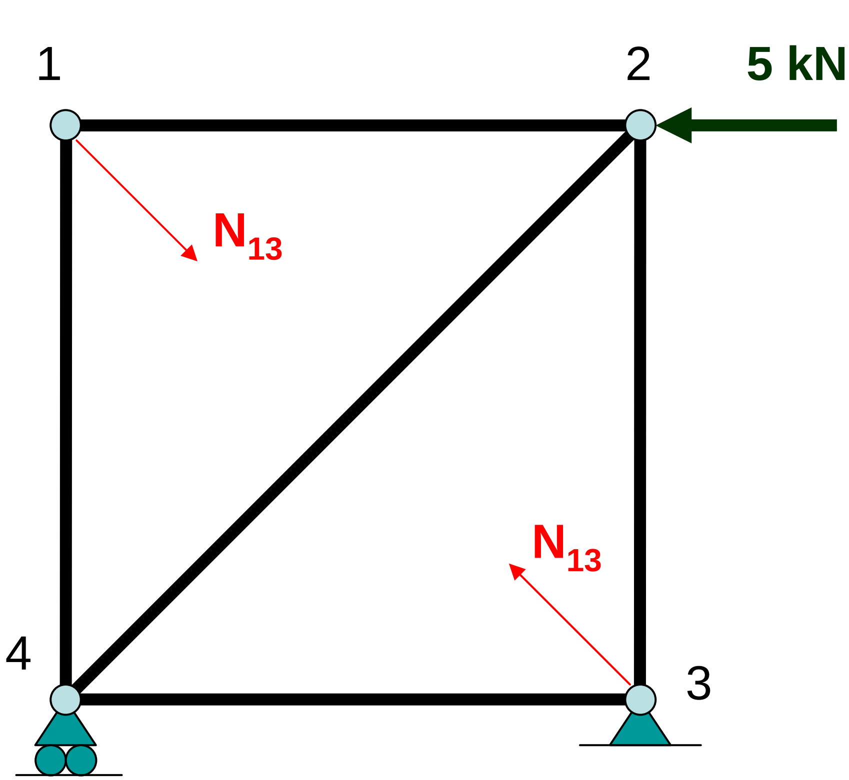


GDLE=3
CE=3

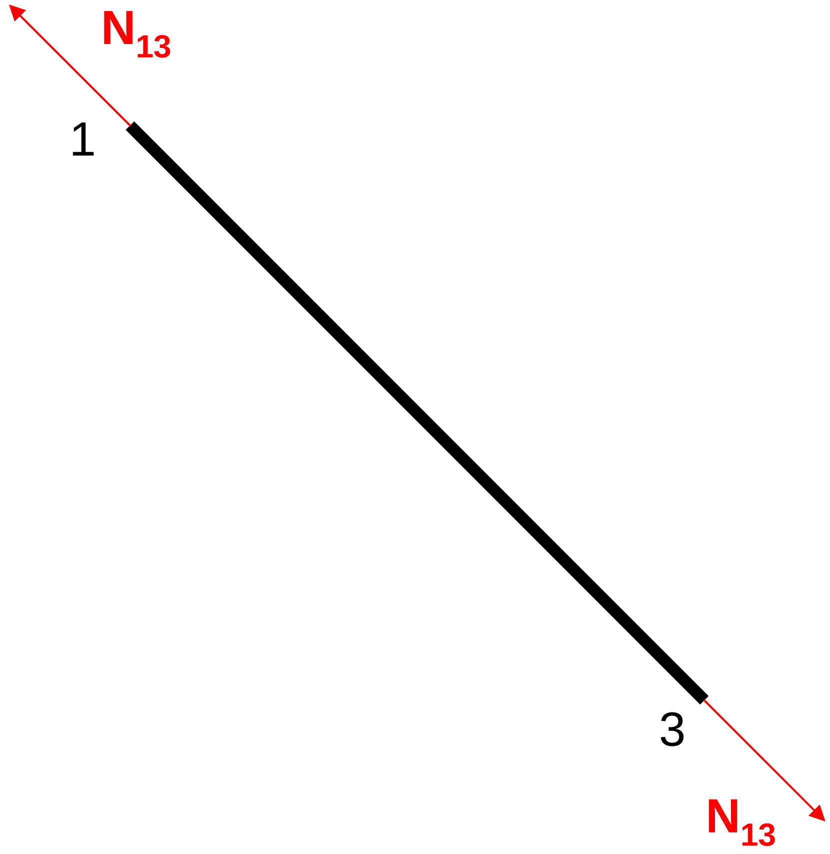
GHE=0
(estructura externamente isostática)

GDLI=3n-3=3.6-3=15
CI=2(n_{nudo} -1)=2(3-1).4=16

GHI=1
(estructura internamente hiperestática)



Sistema 0
(isostático)

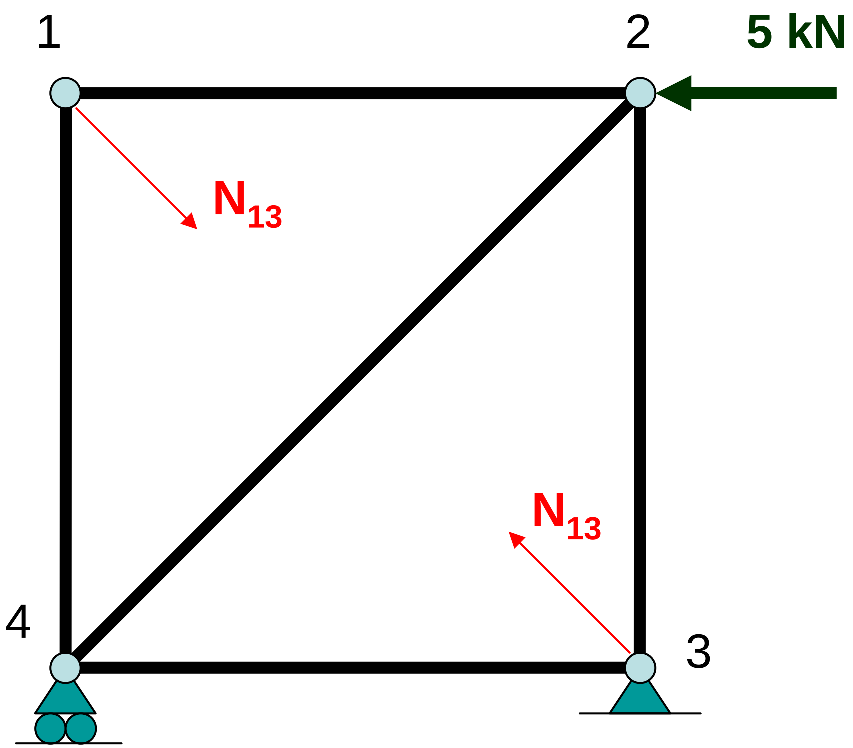


Sistema 2

Desplazamiento relativo entre los nudos 1 y 3 del sistema 0=
= Desplazamiento entre esos mismos nudos del sistema 2

(los desplazamientos mencionados deben entenderse medidos en la dirección 1-3)

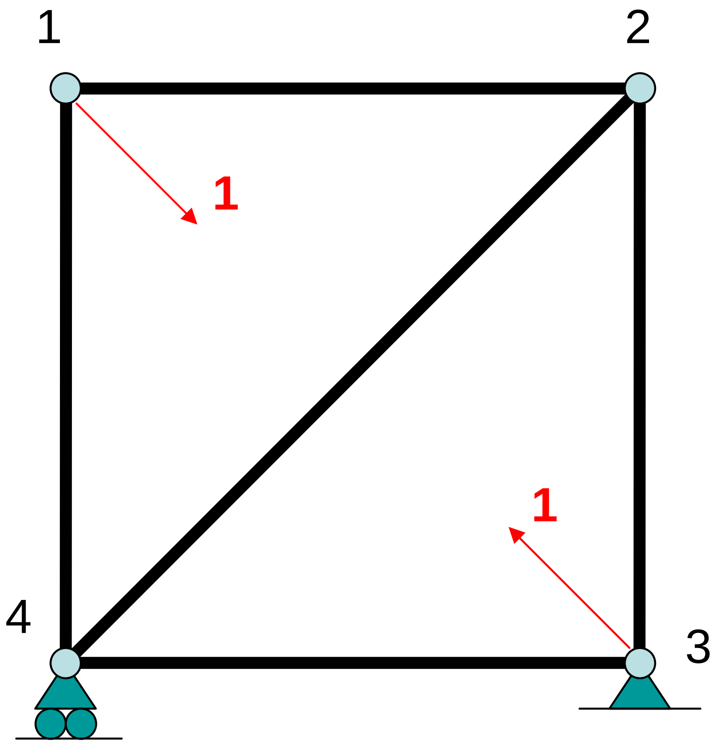
RESOLUCIÓN DEL SISTEMA 0



Sistema 1
(isostático)

Barra	Axil
1-2	$-N_{13}/\sqrt{2}$
2-3	$5-N_{13}/\sqrt{2}$
3-4	$5-N_{13}/\sqrt{2}$
4-1	$-N_{13}/\sqrt{2}$
2-4	$-5\sqrt{2}+N_{13}$

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA 1 (Auxiliar para aplicar Castigliano)



Sistema 1
(isostático)

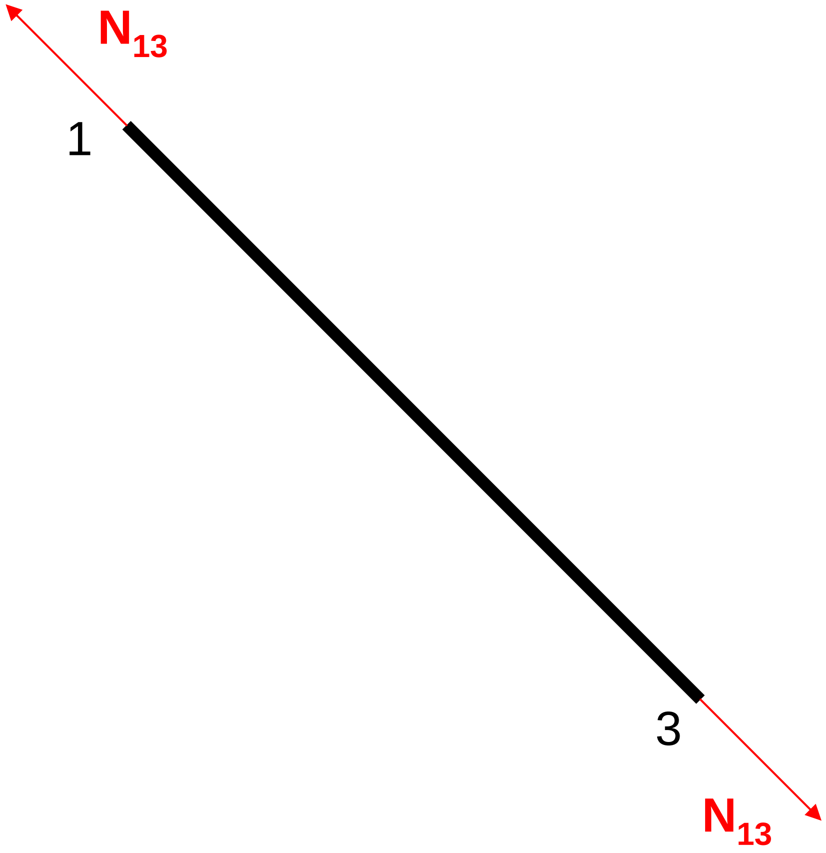
Barra	**Axil**
1-2	$-1/\sqrt{2}$
2-3	$-1/\sqrt{2}$
3-4	$-1/\sqrt{2}$
4-1	$-1/\sqrt{2}$
2-4	1

Estado 0		Estado 1	
Barra	**Axil**	**Barra**	**Axil**
1-2	$-N_{13}/\sqrt{2}$	1-2	$-1/\sqrt{2}$
2-3	$5-N_{13}/\sqrt{2}$	2-3	$-1/\sqrt{2}$
3-4	$5-N_{13}/\sqrt{2}$	3-4	$-1/\sqrt{2}$
4-1	$-N_{13}/\sqrt{2}$	4-1	$-1/\sqrt{2}$
2-4	$-5\sqrt{2}+N_{13}$	2-4	1

$$\Delta_{13}^{0}(\textbf{acercamiento}) = \frac{1}{\boldsymbol{EA}}\sum_{\boldsymbol{barras}} \boldsymbol{N}_i^0 \boldsymbol{N}_i^I \boldsymbol{L}_i = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EA}}[-\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{\boldsymbol{N}_{13}}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot 2+(5-\frac{\boldsymbol{N}_{13}}{\sqrt{2}})\cdot 2\cdot 2)+1\cdot(-5\sqrt{2}+\boldsymbol{N}_{13})\cdot 2\sqrt{2}]$$

$$\Delta_{13}^{0}(\textbf{acercamiento}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EA}}[\mathbf{N_{13}}(4+2\sqrt{2})-10(2+\sqrt{2})]$$

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA 2



Sistema 2

$$\Delta_{13}^{2}\,\mathbf{(alejamiento)} = \frac{\mathbf{N_{13}}\,2\sqrt{2}}{\mathbf{EA}}$$

$$\Delta_{13}^{0}\textbf{(acercamiento)} = -\Delta_{13}^{2}\textbf{(alejamiento)}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EA}}[\mathbf{N_{13}}(4+2\sqrt{2})-10(2+\sqrt{2})] = -\frac{\mathbf{N_{13}}2\sqrt{2}}{\mathbf{EA}}$$

N_{13}=3,53 kN