

5.- ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS

5.1 DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Una estructura se dice articulada o triangulada cuando está formada por barras conectadas entre si mediante articulaciones perfectas (rótulas). En la figura 5.1 se muestra la viga Warrem como ejemplo de estructura articulada, nombrando los diferentes tipos de barras que la constituyen.

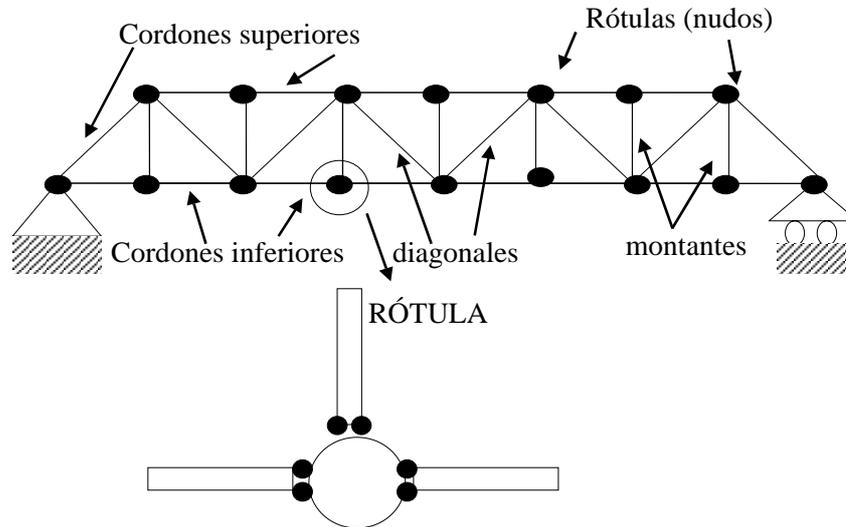


Figura 5.1

Las articulaciones antiguamente se hacían con un pasador o bulón que atravesaba las barras. En la actualidad esta disposición constructiva se ha substituido por la unión de las barras mediante roblones a una chapa (figura 5.2).

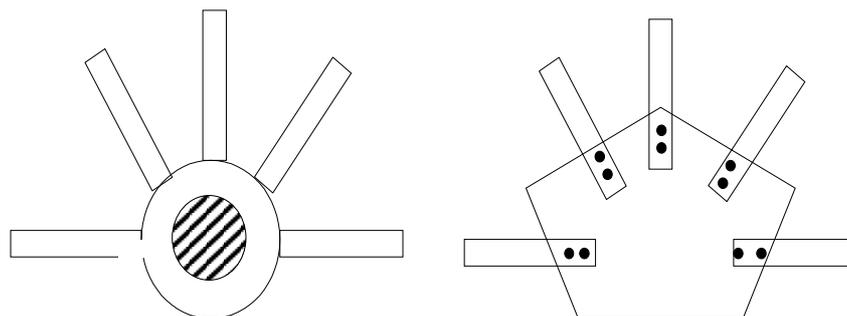


Figura 5.2

5.2 TIPO DE ESFUERZOS.

Caso a). Las cargas exteriores actúan solamente en los nudos.-

En la figura 5.3 se muestra una barra separada de las rótulas a las que estaba inicialmente unida, así como, también, las rótulas y la rebanada última de la barra.

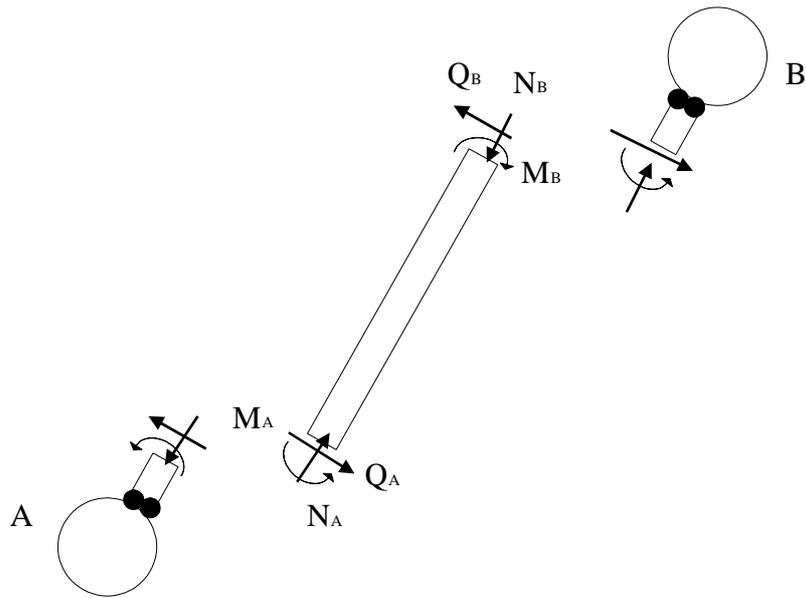


Figura 5.3

Analizando el equilibrio de la rótula (bulón) sometida a los esfuerzos que la barra le transmite se obtienen las siguientes conclusiones:

- $M_A (= M_B) = 0$ porque la rótula no absorbe momentos
- $Q_A (= Q_B) = 0$ porque de no ser así, sobre la barra existiría un par que habría de ser equilibrado con un momento
- $N_A = N_B \neq 0$

Obsérvese en la figura que si el axil de la barra es de compresión (tracción), la acción de la barra contra el nudo lleva la dirección de barra a nudo (de nudo a barra)

Caso b). Las cargas exteriores actúan sobre las barras.-

Considérese una estructura articulada como la que se muestra en la figura 5.4 sobre la que actúan una carga P aplicada sobre la barra AB

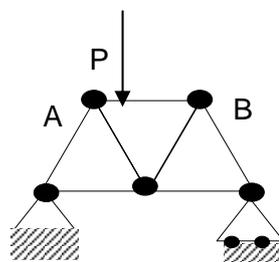


Figura 5.4

La barra AB se apoya sobre el resto de la estructura de forma tal que la carga P (que actúa sobre AB) se transmite a la estructura a

través de los nudos A y B. Considerando la barra AB separadamente, las reacciones (verticales) en sus apoyos son V_1 y V_2 (figura 5.5). En cuanto a los esfuerzos en la estructura y a los movimientos de sus nudos es equivalente la actuación de la carga P que la de las cargas $-V_1$ y $-V_2$.

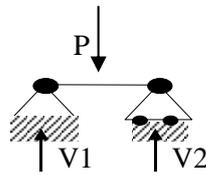


Figura 5.5

El sistema constituido por la estructura de la figura 5.4 y las cargas actuantes sobre ella puede entonces desglosarse en la superposición de los estados I y II (figura 5.6). En el estado I se han colocado dos apoyos en los nudos A y B lo que equivale a hacer actuar en dichos nudos las cargas (reacciones) V_1 y V_2 . En el estado 2 las fuerzas actuantes son $-V_1$ y $-V_2$

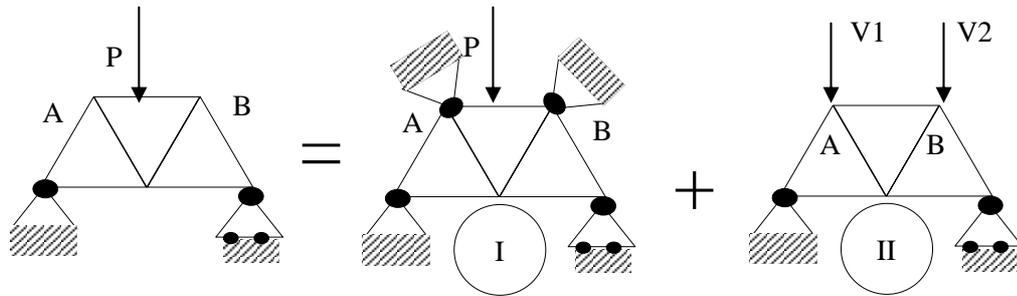


Figura 5.6

En el estado I, la barra AB es la única que sufre esfuerzos (cortantes y flectores). En el estado II todas las barras tendrán esfuerzos axiales.

5.3 ISOSTATISMO E HIPERESTATISMO EN ESTRUCTURAS DE BARRAS ARTICULADAS.

Una estructura articulada se califica de **isostática o estrictamente completa** cuando pueden determinarse los esfuerzos axiales en todas las barras utilizando **sólo** las ecuaciones de la estática.

A continuación se incluyen algunos ejemplos del proceso numérico de identificación como isostática o hiperestática de una estructura articulada siguiendo la metodología expuesta en el capítulo 3.3.

1) Sea la estructura articulada de la figura 5.7

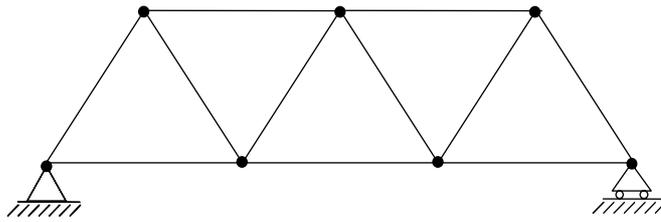


Figura 5.7

G.D.L.E. = 3 **C.E.** = 3

G.D.L.I. = $3 \cdot (11 - 1) = 30$ **C.I.** = $2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot 2 \cdot (3 - 1) + 3 \cdot 2 \cdot (4 - 1) = 30$

Por lo tanto....

Estructura isostática

2) La estructura articulada de la figura 5.8 es la del ejemplo 1) a la que se le ha eliminado una barra

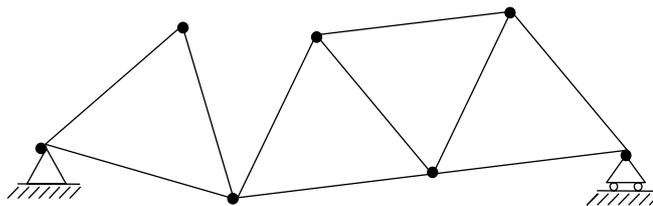


Figura 5.8

G.D.L.E. = 3 **C.E.** = 3

G.D.L.I. = $3 \cdot (10 - 1) = 27$ **C.I.** = $3 \cdot 2 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot 2 \cdot (3 - 1) + 2 \cdot 2 \cdot (4 - 1) = 26$

Por lo tanto....

Estructura inestable: Mecanismo

3) La estructura articulada de la figura 5.9 es la del ejemplo anterior a la que se le ha añadido un apoyo con deslizadera

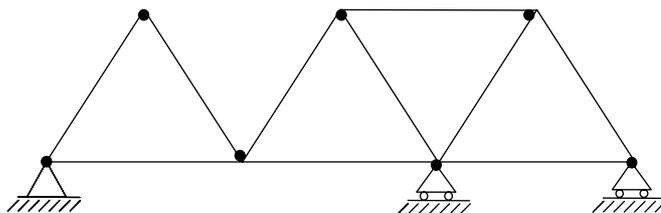


Figura 5.9

$$\mathbf{G.D.L.E.} = 3$$

$$\mathbf{C.E.} = 4$$

$$\mathbf{G.D.L.I.} = 3*(10-1) = 27 \quad \mathbf{C.I.} = 3*2*(2-1)+2*2*(3-1)+2*2*(4-1) = 26$$

Por lo tanto....

Estructura isostática

4) La estructura articulada de la figura 5.10 es la del ejemplo 1) a la que se le ha eliminado una barra y aumentado una coacción (apoyo derecho)

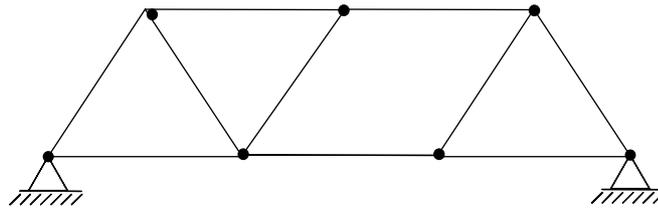


Figura 5.10

$$\mathbf{G.D.L.E.} = 3$$

$$\mathbf{C.E.} = 4$$

$$\mathbf{G.D.L.I.} = 3*(10-1) = 27 \quad \mathbf{C.I.} = 2*2*(2-1)+4*2*(3-1)+1*2*(4-1) = 26$$

Estructura aparentemente isostática

5) La estructura articulada de la figura 5.11 es la del ejemplo 1) a la que se le ha añadido una barra

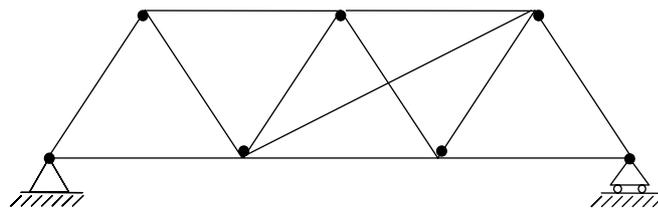


Figura 5.11

$$\mathbf{G.D.L.E.} = 3$$

$$\mathbf{C.E.} = 3$$

$$\mathbf{G.D.L.I.} = 3*(12-1) = 33 \quad \mathbf{C.I.} = 2*2*(2-1)+1*2*(3-1)+3*2*(4-1)+1*2*(5-1) = 34$$

Estructura hiperestática de grado 1

Metodología alternativa.-

Otro procedimiento que puede utilizarse alternativamente para la determinación de una estructura articulada como isostática o hiperestática es el que, a continuación, se expone.

En el equilibrio de una barra de la estructura intervienen las fuerzas que directamente actúan sobre ella así como las reacciones (4) en los nodos en los que la barra se une a la estructura; el n° de incógnitas por cada barra es, en consecuencia, 4 (figura 5.12), con lo cual:

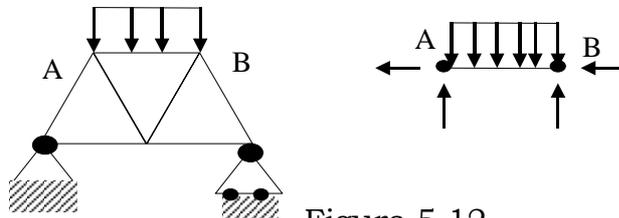


Figura 5.12

- Número total de incógnitas: **4b** siendo b el n° de barras
- Número de coacciones externas: **c** (en el ejemplo c=3)
Total incógnitas: **4b + c**
- Número de ecuaciones que se pueden aplicar:
Equilibrio de una barra: 3 ($\sum H=0, \sum V=0, \sum M=0$)
Equilibrio de un nudo: 2 ($\sum H=0, \sum V=0$)
Total ecuaciones: **3b + 2n** siendo
b el número de barras
n es el número de nudos de la estructura
- La estructura es **isostática** si:

$$4b+c = 3b+2n \quad (b=2n-c)$$

La estructura es **hiperestática** si:

$$b > 2n-c$$

definiéndose “grado de hiperestatismo G” como

$$g = b+c-2n$$

La estructura es **mecanismo** si:

$$b < 2n-c$$

EJEMPLOS.-

1) Determinése la condición de la estructura articulada de la figura 5.13

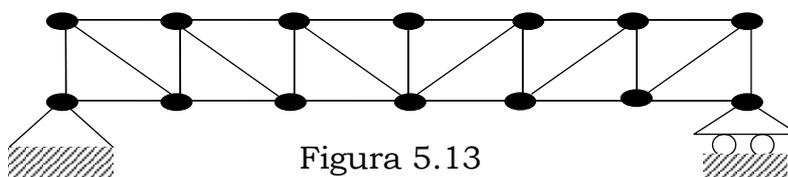


Figura 5.13

$$b = 25, n = 14, c = 3 \Rightarrow g = 25 + 3 - 2 \cdot 14 = 0$$

¡Estructura isostática!

2) Determinése la condición de la estructura articulada de la figura 5.14

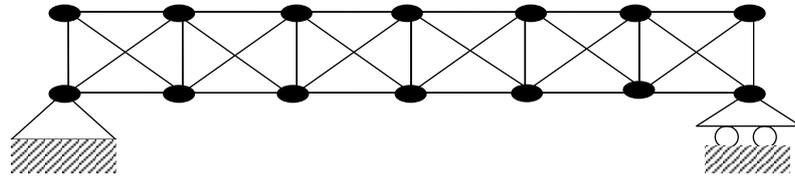


Figura 5.14

$$b = 31, n = 14, c = 3 \Rightarrow g = 31 + 3 - 2 \cdot 14 = 6$$

¡Estructura hiperestática de grado 6!

(Obsérvese que la estructura tiene las mismas condiciones de apoyo que la de la figura 5.13 pero seis barras más)

Aplicando el método expuesto en el capítulo 3.3 se obtendría, en este caso:

$$\mathbf{G.D.L.E.} = 3 \qquad \mathbf{C.E.} = 3$$

$$\mathbf{G.D.L.I.} = 3(31-1) = 90 \qquad \mathbf{C.I.} = 4 \cdot 2 \cdot (3-1) + 10 \cdot 2 \cdot (5-1) = 96$$

$$\text{Total } \mathbf{G.D.L} = 93 \qquad \mathbf{C} = 99$$

¡Hiperestática de grado 6!

La diferencia en la aplicación de ambos métodos está en que

Observación

La condición $b = 2n - c$ es una condición **necesaria pero no suficiente** de isostaticidad. Obsérvese, por ejemplo, las estructuras de la figura 5.15; el criterio $b = 2n - c$ diagnostica que ambas son isostáticas y, sin embargo, la de la derecha es un mecanismo.

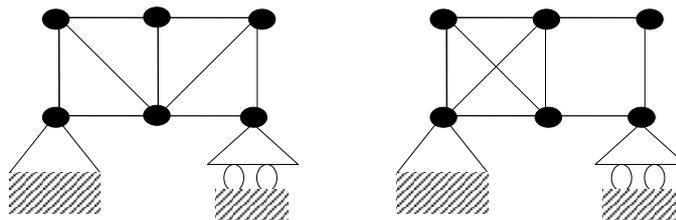


Figura 5.15

5.4 ESFUERZOS EN ESTRUCTURAS ARTICULADAS ISOSTÁTICAS.

5.4.1 Método del equilibrio de nudos

a) Método analítico.-

Considérese una estructura isostática como la de la figura 5.16 de la que se han obtenido sus reacciones.

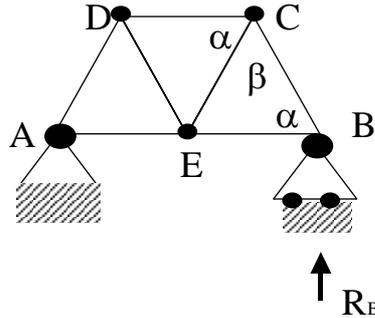


Figura 5.16

En el nudo B confluyen tres fuerzas (figura 5.17):

- La reacción R_B
- La acción de la barra CB contra el nudo
- La acción de la barra EB contra el nudo

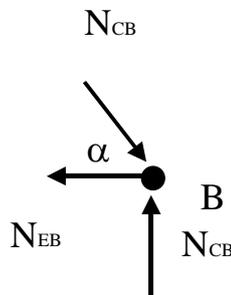


Figura 5.17

El equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el nudo permite escribir

$$N_{EB} \operatorname{sen} \alpha = R_B$$

$$N_{CB} \operatorname{cos} \alpha = N_{EB}$$

sistema del que se obtienen N_{EB} y N_{CB} .

Sobre el nudo C confluyen tres fuerzas:

- La acción de la barra CB contra el nudo (conocida)
- La acción de la barra EC contra el nudo

- La acción de la barra DC contra el nudo (figura 5.18)

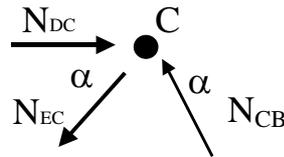


Figura 5.18

El equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el nudo permite escribir

$$N_{DC} - N_{EC} \cos \alpha = N_{CB} \cos \alpha$$

$$N_{EC} \operatorname{sen} \alpha = N_{CB} \operatorname{sen} \alpha$$

sistema del que se obtienen N_{EC} y N_{DC} .

Continuando con el resto de los nodos se obtienen los axiles de las diferentes barras de la estructura. Al llegar al último nudo (nodo A) ya se conocen los axiles de todas las barras con lo cual el equilibrio de este nudo servirá como comprobación de los valores obtenidos (nodo de cierre).

Observación.- La acción de una barra contra un nudo tiene, evidentemente, la dirección de la barra. Su sentido es, sin embargo, más difícil de predecir; si con argumentaciones previas relativas a la deformada de la estructura puede razonarse este sentido, al aplicar las ecuaciones de equilibrio del nudo saldrá un valor positivo para la acción barra-nudo.

b) Método gráfico (Cremona)

Este método es conceptualmente similar al anterior (equilibrio de las fuerzas que confluyen en cada uno de los nodos), pero utiliza el polígono de fuerzas en lugar de plantear las ecuaciones de equilibrio (figura 5.19)

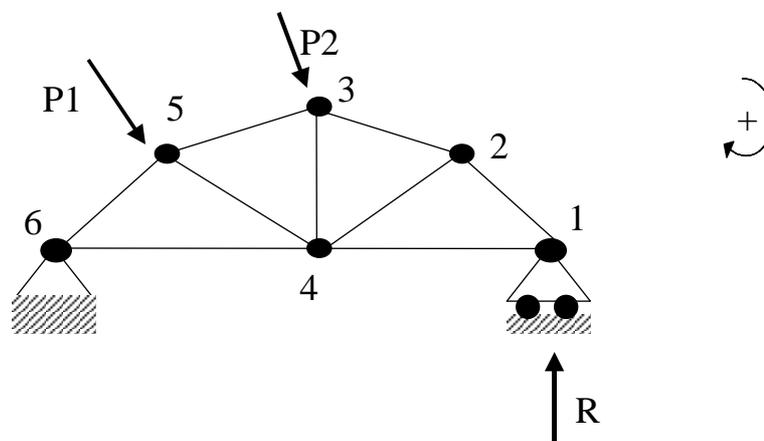


Figura 5.19

En cada nudo, el polígono de fuerzas (que ha de ser cerrado) se inicia por alguna fuerza conocida (por ejemplo, en el nudo 1 se empieza por la reacción). Una vez elegido un orden de recorrido de las fuerzas (en el ejemplo, el sentido de las agujas del reloj) se van colocando estas (o sus líneas de acción) hasta que el polígono cierra (figura 5.20). Por medición directa sobre el polígono (lo que requiere un dibujo limpio y preciso) se obtienen los módulos y sentidos de los axiles que actúan en todas las barras de la estructura.

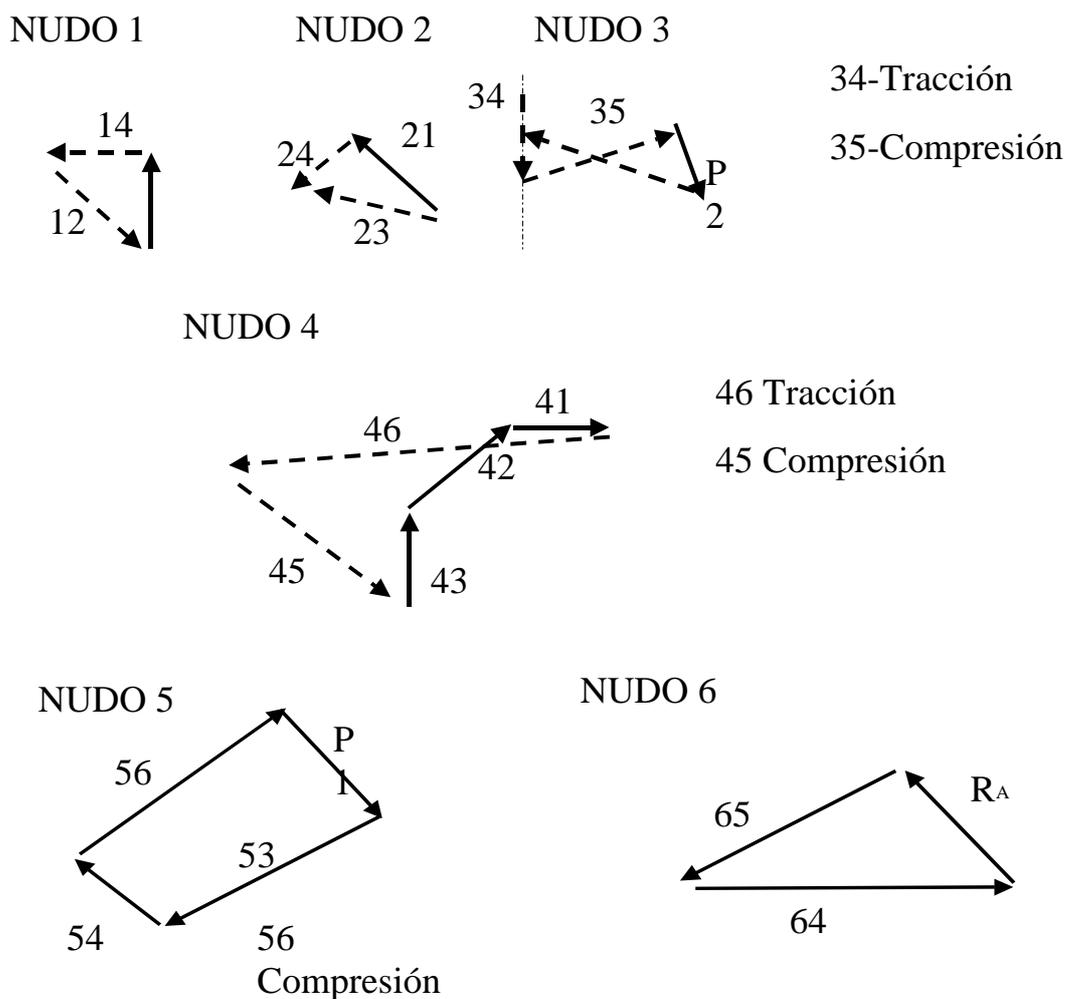


Figura 5.20

5.4.2 Método analítico del equilibrio de secciones (Ritter).-

Este método se basa en plantear el equilibrio de una parte o trozo de la estructura. En la figura 5.21 puede verse una estructura que, a efectos de su análisis, se ha dividido en dos partes habiéndose planteado el equilibrio de la parte identificada con trazo continuo.

Las fuerzas que intervienen en el equilibrio de la parte analizada son:

- Las fuerzas aplicadas sobre sus nudos
- Las reacciones en el o en los apoyos que formen parte de ella
- Los axiles de las barras de unión entre las dos partes.

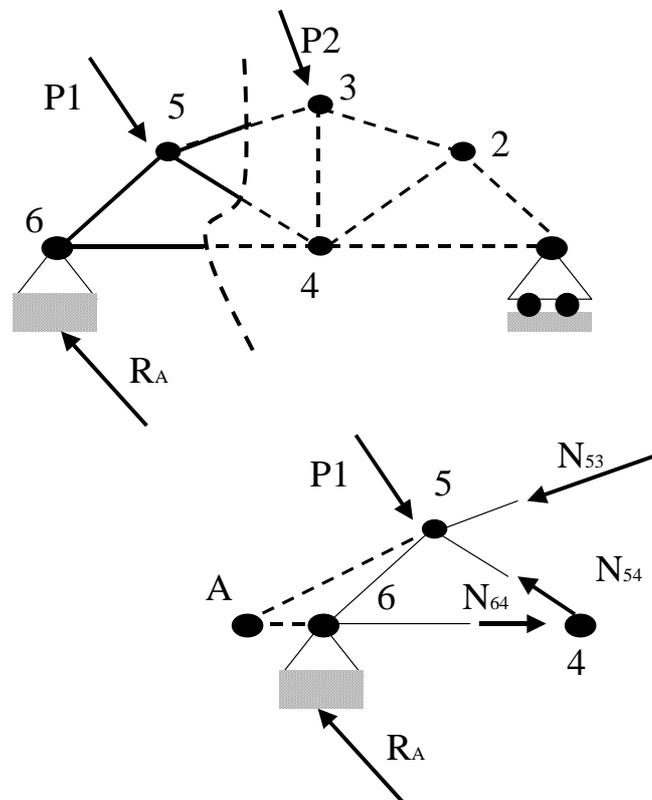


Figura 5.21

El siguiente paso es plantear las ecuaciones de equilibrio. La nulidad del momento del sistema de fuerzas se ha de plantear en puntos oportunamente seleccionados para obtener los axiles de las barras de unión, que son las incógnitas del problema; en el ejemplo de la figura 5.21

- Tomando momentos en 4 se obtiene N_{53}
- Tomando momentos en 5 se obtiene N_{64}
- Tomando momentos en A se obtiene N_{54}

5.5 MOVIMIENTOS EN ESTRUCTURAS ARTICULADAS ISOSTÁTICAS

Para calcular un movimiento (U o V) de un nodo de una estructura articulada, es recomendable aplicar el teorema de Castigliano.

$$\delta = \sum \int_A^B \left[N^0 N^I \frac{ds}{E\Omega} + M^0 M^I \frac{ds}{EI} + Q^0 Q^I \frac{ds}{GA_C} + M_T^0 M_T^I \frac{ds}{GK} \right]$$

siendo:

N^0 , M^0 , Q^0 y M_T^0 el axil, el flector, el cortante y el torsor en el estado real

N^I , M^I , Q^I y M_T^I el axil, el flector, el cortante y el torsor en un estado ficticio sin carga exterior alguna excepto una carga unidad en la dirección del movimiento que se desea calcular.

δ el movimiento en el punto de aplicación de la carga unidad y en la dirección de esta.

En el caso de las estructuras articuladas, el único esfuerzo a considerar es el axil (los flectores y cortantes sobre una barra cargada no participan en los movimientos traslacionales de los nodos), con lo cual la expresión a utilizar es:

$$\delta = \sum \int_A^B \left[N^0 N^I \frac{ds}{E\Omega} \right]$$

Pero los axiles de cada barra son constantes a lo largo de la barra con lo cual

$$\delta = \sum N^0 N^I \int_A^B \left[\frac{ds}{E\Omega} \right] = \sum N^0 N^I \frac{L_i}{E\Omega_i}$$

Sea, por ejemplo, la estructura de la figura 5.22 en la que se quiere calcular el desplazamiento vertical del punto A. Los axiles N^0 de la expresión anterior son los que se obtendrían del estado real 0 y los axiles N^I los que se obtendrían de un estado auxiliar 1 en el que una carga vertical unidad actúa sobre el punto A.

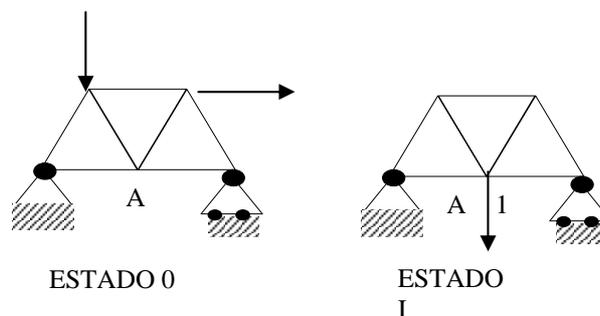


Figura 5.22

Ejemplo.- En la estructura de la figura 5.23 obtener el movimiento horizontal del punto A

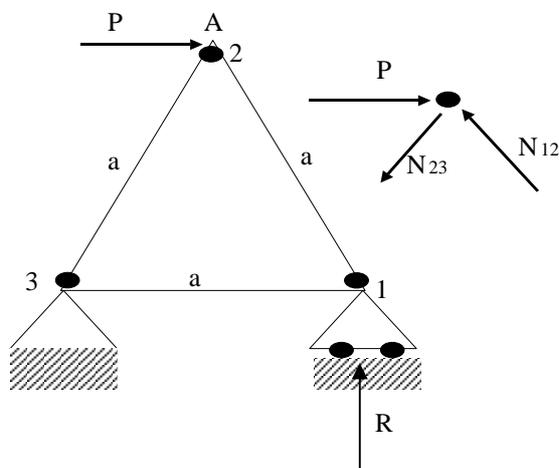


Figura 5.23

Planteando el equilibrio del nodo A se obtienen los axiles N_{12} , N_{23} y N_{13}

$$P \frac{\sqrt{3}}{2} a = R \cdot a \longrightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2} P$$

$$N_{12}(-) = \frac{R}{\cos 30^\circ}$$

$$N_{13}(+) = N_{12} \cos 60 = R \operatorname{tg} 30$$

$$N_{23} = N_{12}$$

$$U_A = \frac{a}{E\Omega} \left[2 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} P}{\cos 30} * \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 30} + \frac{\sqrt{3}}{2} P \operatorname{tg} 30 * \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} 30 \right]$$

5.6 ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ARTICULADAS HIPERESTÁTICAS

Sea el caso de una estructura como la de la figura 5.24 que es hiperestática de grado 1 siendo su **hiperestatismo externo** (una coacción “de más”).

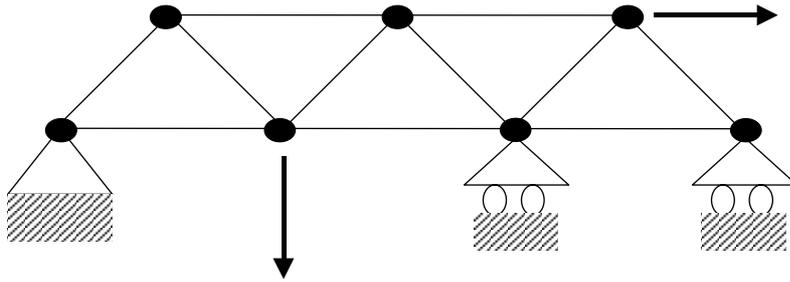


Figura 5.24

Se substituye una coacción (por ejemplo el apoyo intermedio) por su efecto, que es una reacción vertical (desconocida) R (figura 5.25).

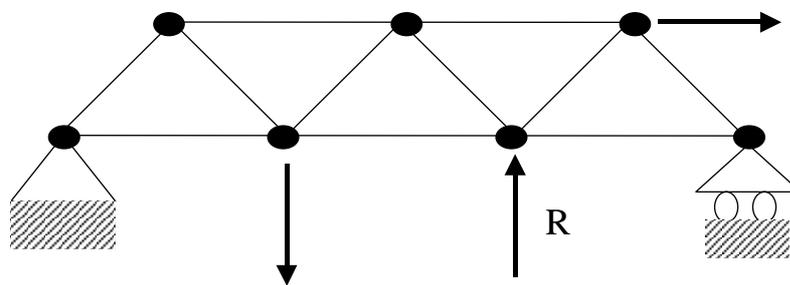


Figura 5.25

La condición a imponer es, evidentemente, que el movimiento vertical del punto de aplicación de R (el inicial apoyo) sea nulo. De esta condición se obtienen el valor de R pudiendo resolver la estructura como isostática.

Sea ahora el caso de una estructura como la de la figura 5.26 que es hiperestática de grado 1 siendo su **hiperestatismo de tipo interno** (una barra “de más”).

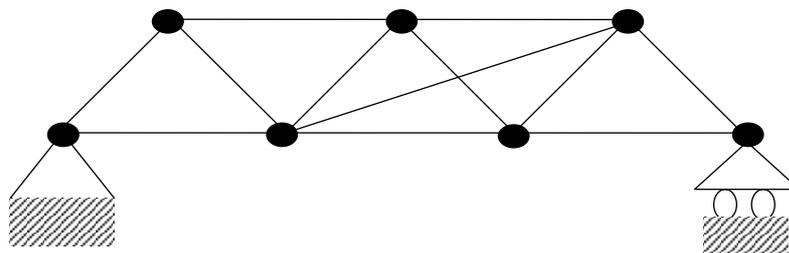


Figura 5.26

En cada barra de una estructura articulada aparece un axil porque entre sus nudos extremos hay un desplazamiento relativo con lo cual la estructura actúa sobre la barra (axil) y la barra actúa (en acción recíproca) sobre la estructura. En la estructura de la figura 5.26 se elimina el hiperestatismo interno substituyendo, por ejemplo, la barra más larga, por su efecto sobre la estructura, que es el de un par de

fuerzas iguales y opuestas que actúan en los nodos A y B a los que la barra está unida (figura 5.27).

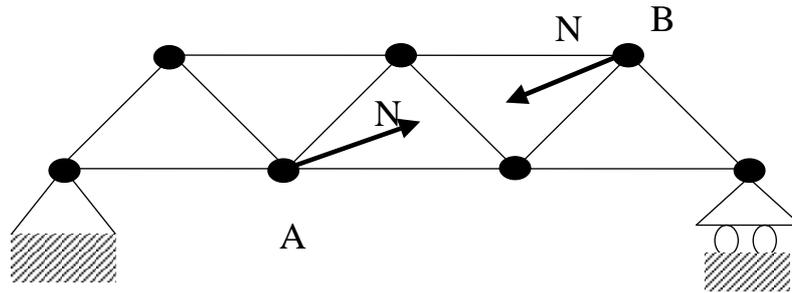


Figura 5.27

Estas fuerzas actuantes sobre los nodos A y B (acción de la barra contra el nudo) son iguales (figura 5.28) a las fuerzas actuantes en los extremos de la barra (acción del nudo contra la barra).

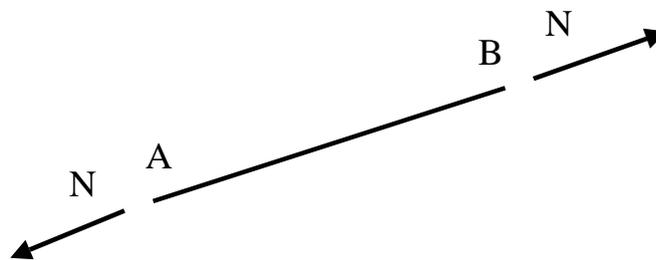


Figura 5.28

La condición evidente de compatibilidad a imponer es que el movimiento relativo entre los nodos A y B de la estructura (que se ha de calcular aplicando el teorema de Castigliano) coincida con el alargamiento de la barra obtenido aplicando la ley de Hooke.

5.7 INCREMENTO TÉRMICO Y ERRORES DE EJECUCIÓN

En las estructuras es frecuente que durante el proceso de montaje se fuerce la instalación de barras que tienen una longitud diferente a la distancia exacta entre los bulones en los que se han de insertar (figura 5.29)

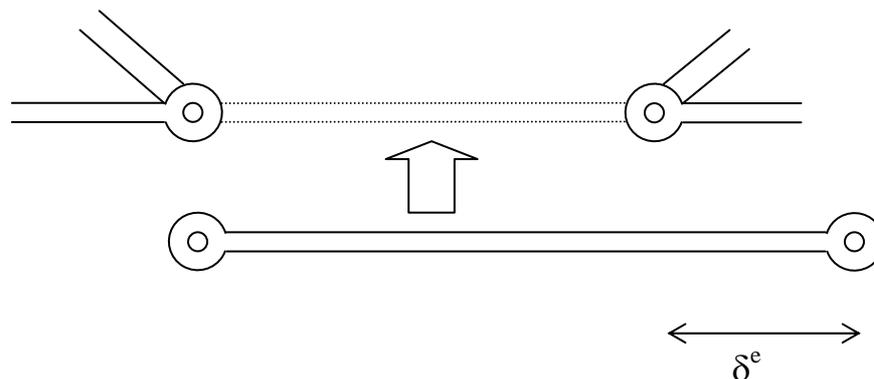


Figura 5.29

Por otro lado, a lo largo del ciclo de vida de la estructura, esta puede sufrir variaciones de la temperatura respecto a la que tenía en el momento del montaje; estas variaciones de temperatura modifican (figura 5.30) la geometría de las barras (longitud e incurvación).

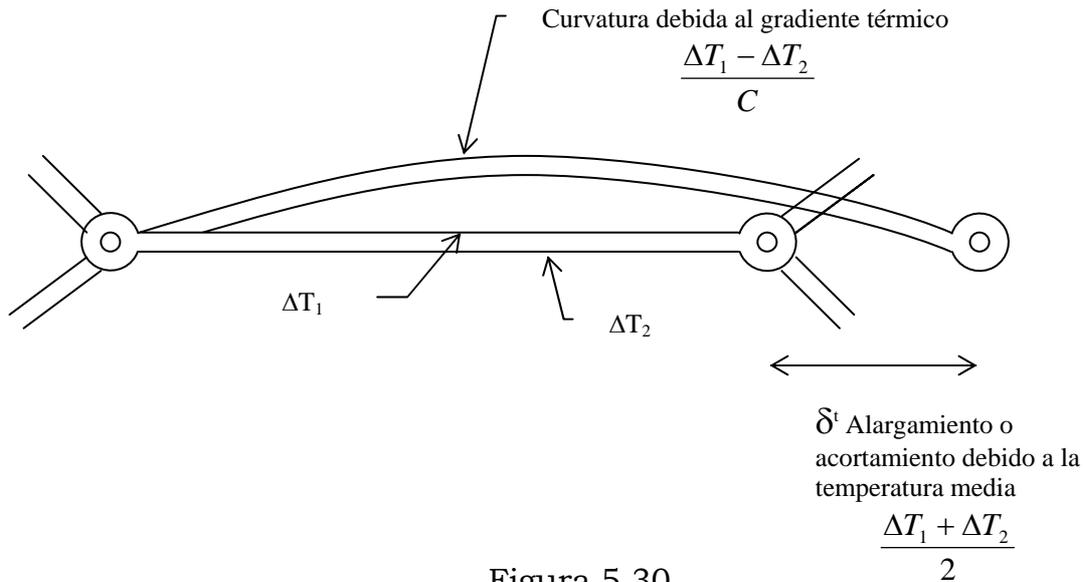


Figura 5.30

Tanto los denominados “errores de ejecución” como las variaciones térmicas, inducen variaciones de longitud en las barras sobre las longitudes teóricas establecidas por las coordenadas de los nodos y la consiguiente aparición de una interacción mutua barra-estructura que probablemente de lugar a la aparición de esfuerzos axiales que pueden llegar a ser importantes.

Supóngase que se ha modificado la longitud de una barra de una estructura por cualquiera de los efectos descritos.

a) Si la estructura es isostática no aparecen esfuerzos (figuras 5.31, 5.32 y 5.33)



Figura 5.31

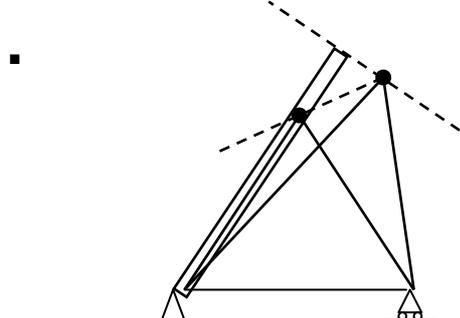


Figura 5.32

▪

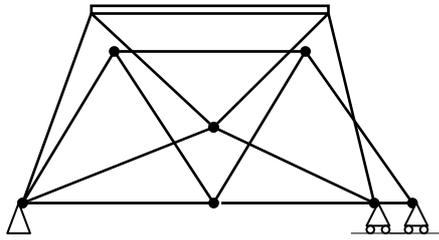


Figura 5.33

b) Si la estructura es hiperestática, pueden aparecer esfuerzos (en la parte hiperestática) (figuras 5.34 y 5.35)

•

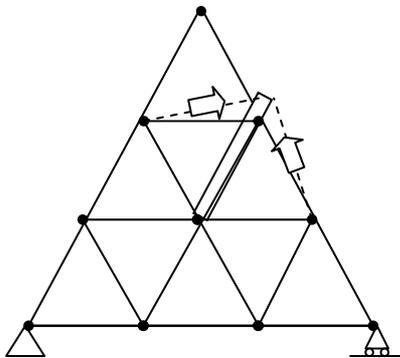


Figura 5.34

•

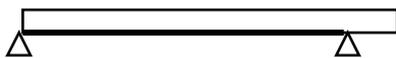


Figura 5.35

5.7.1 Un ejemplo de análisis

En la estructura articulada de la figura 5.36 cuyas barras tienen sección Ω y longitud L , la barra DB sufre un incremento térmico uniforme ΔT .

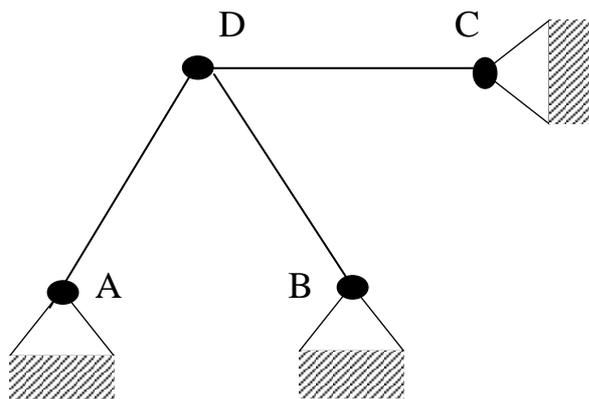


Figura 5.36

La barra DB, al sufrir un incremento térmico ΔT aumenta su longitud en un valor $\alpha \Delta T L$ siendo α el coeficiente de dilatación del material. Para impedir este alargamiento se requeriría aplicar una fuerza N que diese lugar a un acortamiento de la barra del mismo valor que el alargamiento.

$$NL/(E\Omega) = \alpha \Delta T L$$

es decir

$$N = \alpha \Delta T E \Omega$$

Considérese entonces la estructura propuesta desglosada en dos estados superpuestos (figura 5.37). En el estado 1 se impide la traslación del nodo D en la dirección de la barra DB aplicando una carga en D de valor N ; en este estado el axil de todas las barras es nulo hecha excepción del de la barra DB que es de compresión y de valor N . En el estado 2 se aplica una carga en D de valor N en la dirección de la barra DB con el sentido que se indica en la figura; este estado, en el que las cargas son fuerzas en nudos, es el que ha de resolverse aplicando el teorema de Castigliano,

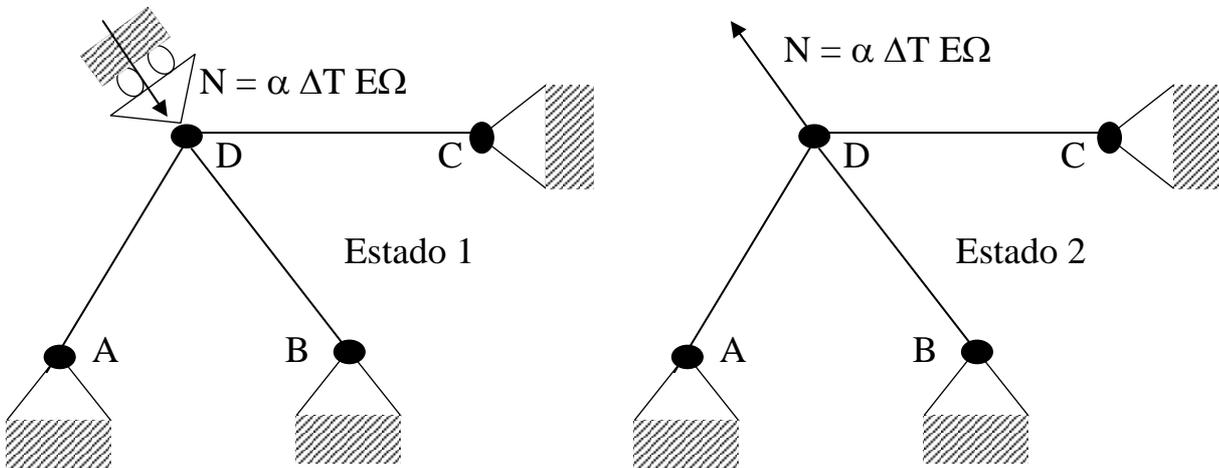


Figura 5.37

5.7.2 Energía de deformación en una estructura articulada sometida a cargas en nudos y a variaciones de longitud de sus barras.

La energía de deformación en una rebanada sometida a un esfuerzo axial, viene dada por la expresión

$$\mathbf{Energía} = \frac{1}{2} N \Delta(dS) = \frac{1}{2} \frac{N^2}{E \Omega} dS$$

expresión que puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \frac{N^2}{E \Omega} dS = \frac{1}{2} N \frac{N}{E \Omega} dS$$

pudiéndose entonces identificar el factor $NdS/(E\Omega)$ como el alargamiento de la rebanada. El factor $\frac{1}{2}$ refleja el hecho de la aplicación progresiva del axil hasta producir dicho alargamiento.

En la expresión de la energía de deformación de una estructura

$$U = \sum_{barras} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \cdot L_i}{E \cdot \Omega_i}$$

en cada uno de los sumandos se identifica, igualmente, el producto del axil de la barra por el alargamiento de la barra.

$$N_i \frac{N_i L_i}{E \Omega_i}$$

Del mismo modo, si alguna de las barras tiene un error de ejecución ∂_i^e , la energía de deformación varía en el término

$$+ \sum_{\substack{barras \\ \text{con error}}} N_i \left(\partial_i^e \right) \circ \circ \circ \text{Error de ejecución}$$

Y si alguna de las barras sufre una variación de longitud ∂_i^t por incremento térmico, la energía de deformación aumenta en al término

$$+ \sum_{\substack{barras \\ \text{con } \Delta T}} N_i \partial_i^t \quad (\partial_i^t = \alpha L_i \Delta T_i)$$

Con lo cual la energía de deformación de una estructura sometida a cargas externas y sufriendo algunas de sus barras errores de ejecución o incrementos térmicos resulta:

$$U = \sum_{barras} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \cdot L_i}{E \cdot \Omega_i} + \sum_{\substack{barras \\ \text{con error}}} N_i \partial_i^e + \sum_{\substack{barras \\ \text{con } \Delta T}} N_i \partial_i^t$$

5.7.3 Aplicación del teorema de Castigliano a la obtención de movimientos en estructuras con modificación de longitud en barras.

Si se deriva la energía de deformación con respecto a una de las cargas exteriores P_j , se obtiene el movimiento del punto de aplicación de la carga en la dirección de esta:

$$r_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{barras} N_i \frac{\partial N_i}{\partial P_j} \frac{L_i}{E \Omega_i} + \sum \frac{\partial N_i}{\partial P_j} \partial_i^e + \sum \frac{\partial N_i}{\partial P_j} \partial_i^t$$

pudiéndose interpretar $\frac{\partial N_i}{\partial P_j}$ como el axil en la barra i -ésima cuando la carga $P_j=1$. Es decir:

$$r_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{barras} N_i^0 N_i^I \frac{L_i}{E \Omega_i} + \sum N_i^I \partial_i^e + \sum N_i^I \partial_i^t$$