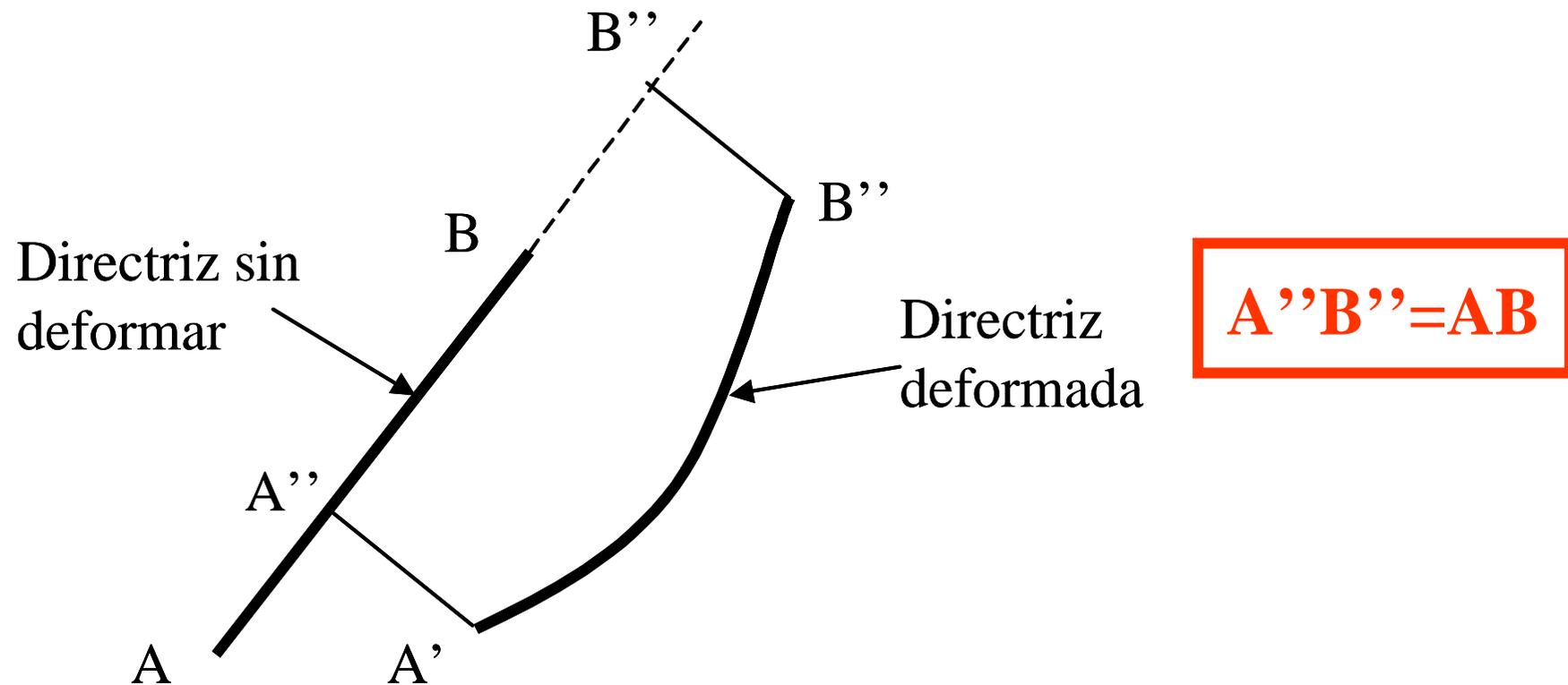


ESTRUCTURAS RETICULADAS

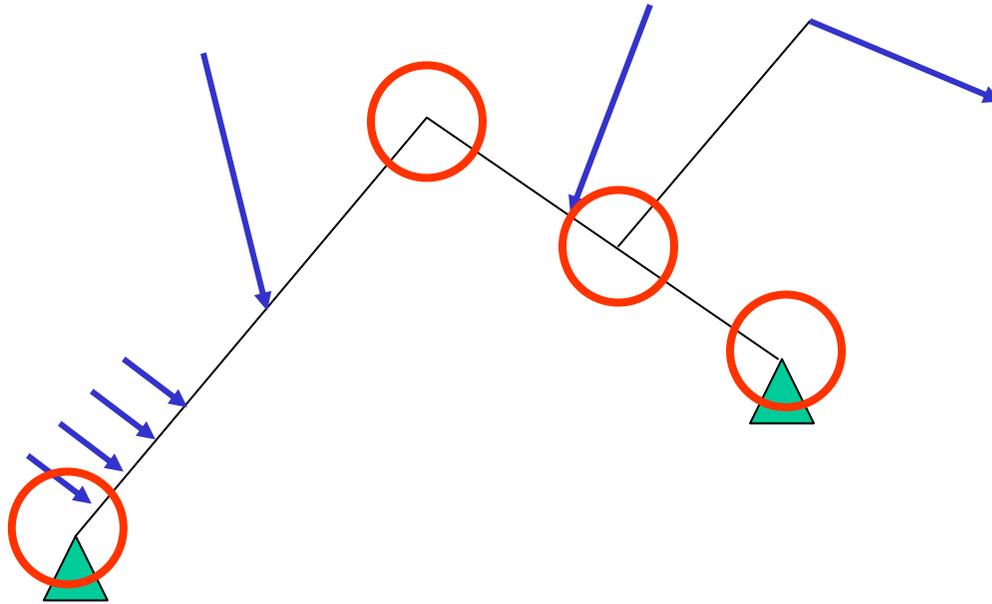
Prof. Carlos Navarro

Departamento de Mecánica de Medios Continuos
y Teoría de Estructuras

En el cálculo estructuras reticuladas suele despreciarse las deformaciones inducidas por los esfuerzos axiales y cortantes. Despreciar el primer tipo de esfuerzo equivale a decir que las barras de la estructura ni se acortan ni se alargan.



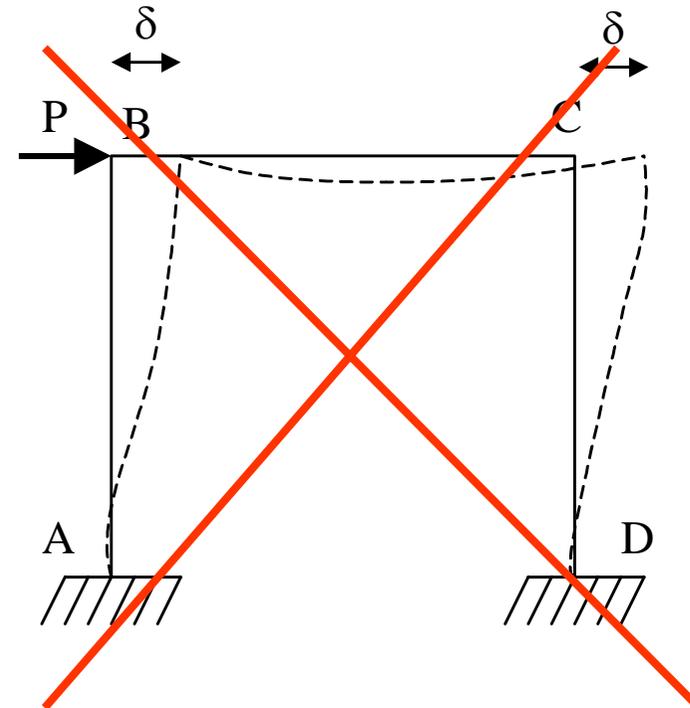
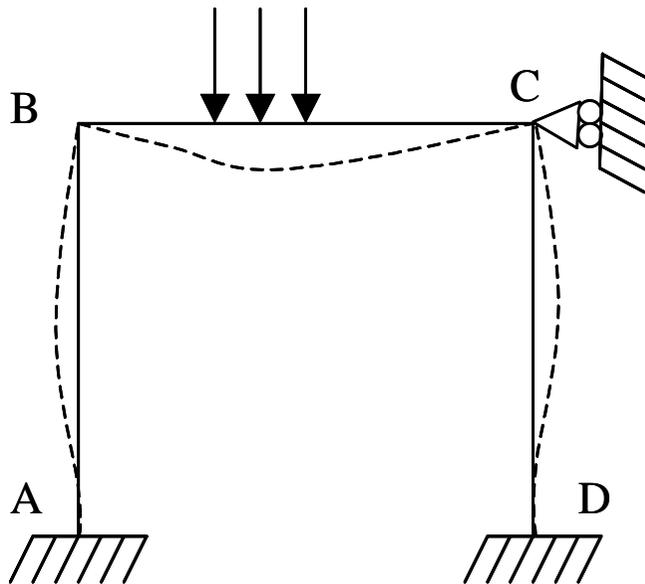
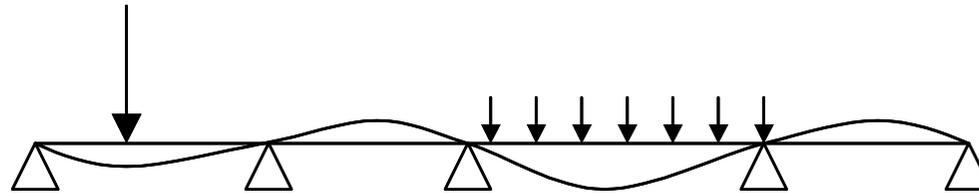
CONCEPTO DE NUDO EN UNA ESTRUCTURA FORMADA POR BARRAS

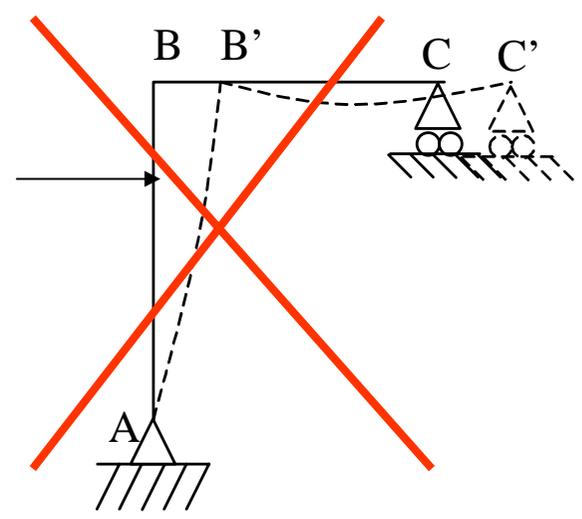
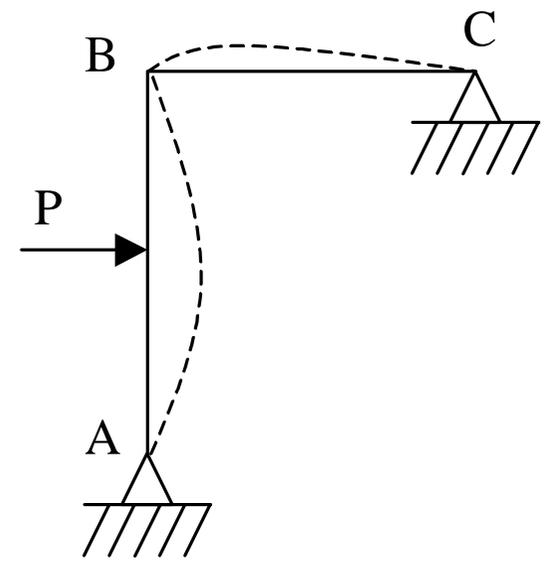
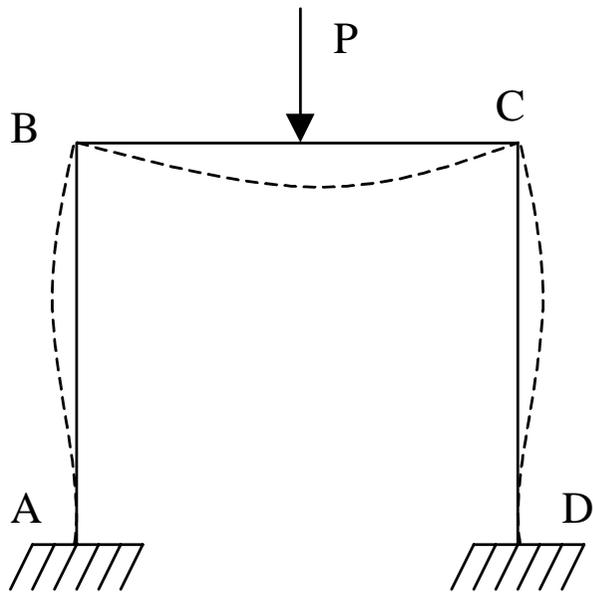


ESTRUCTURAS RETICULADAS INTRASLACIONALES

CONCEPTO DE ESTRUCTURA INTRASLACIONAL

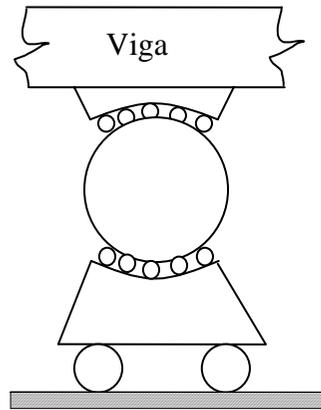
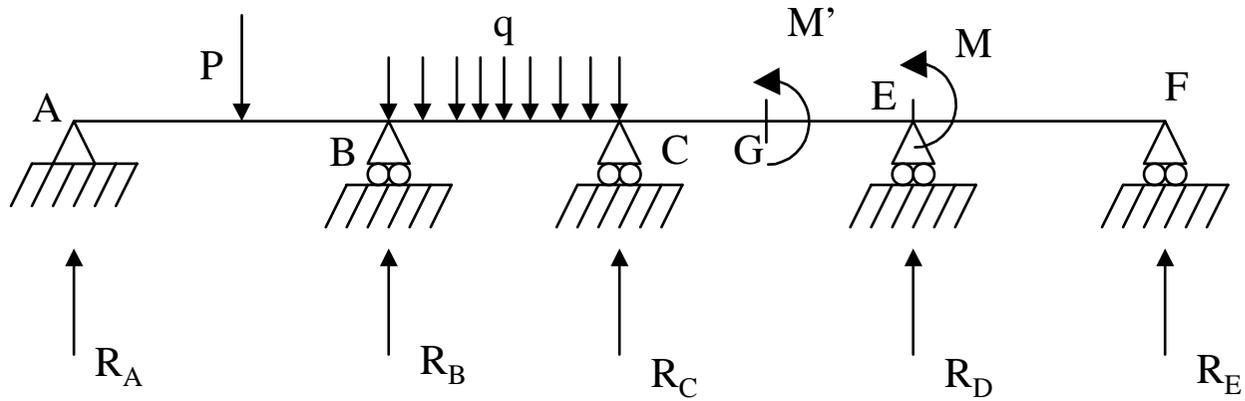
Los nudos no se desplazan, pero las secciones correspondientes sí giran

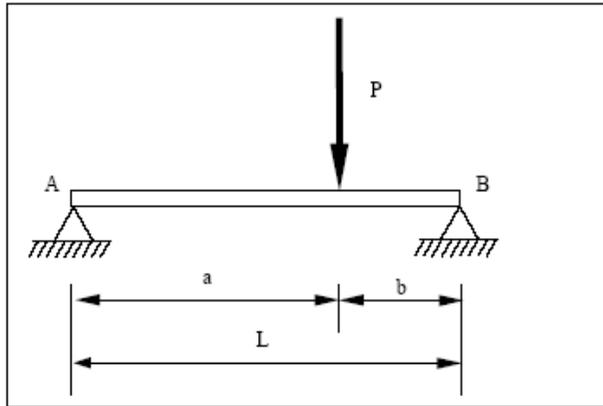




CALCULO DE ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES

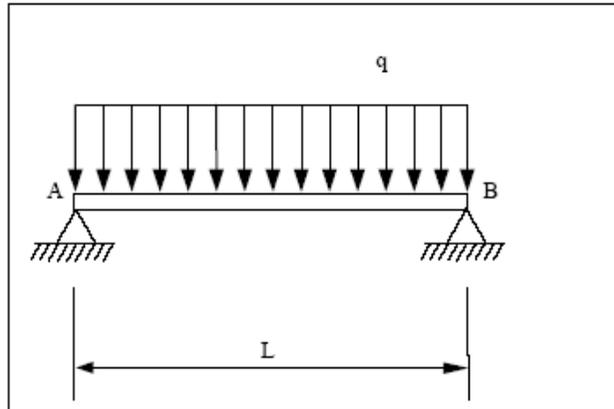
a) VIGAS CONTINUAS



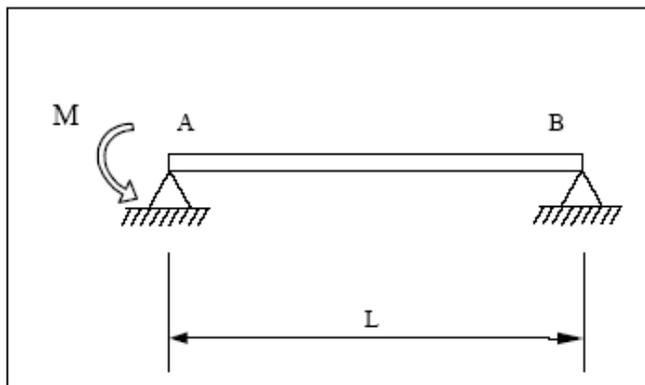


$$\theta_A = \frac{P \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (L + b)$$

$$\theta_B = \frac{P \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (L + a)$$

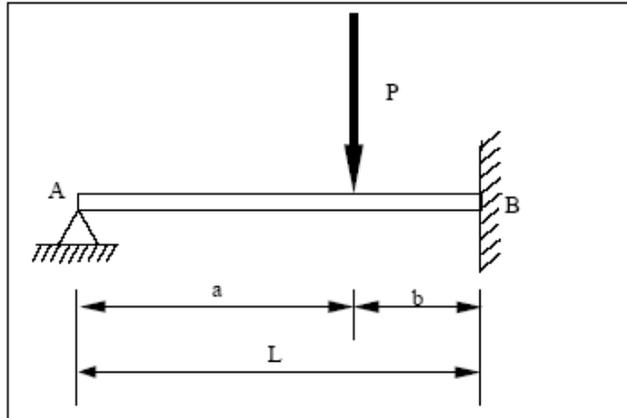


$$\theta_A = \theta_B = \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

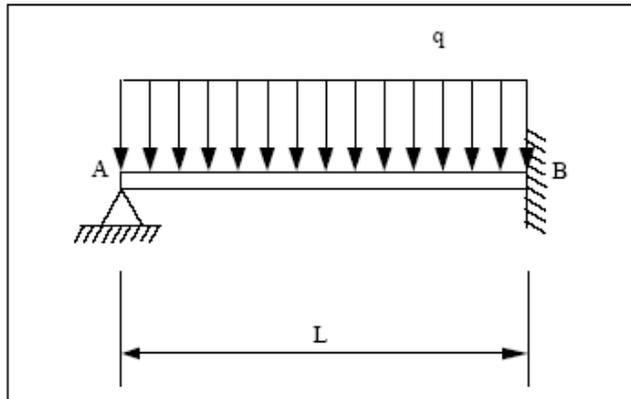


$$\theta_A = \frac{M \cdot L}{3 \cdot E \cdot I}$$

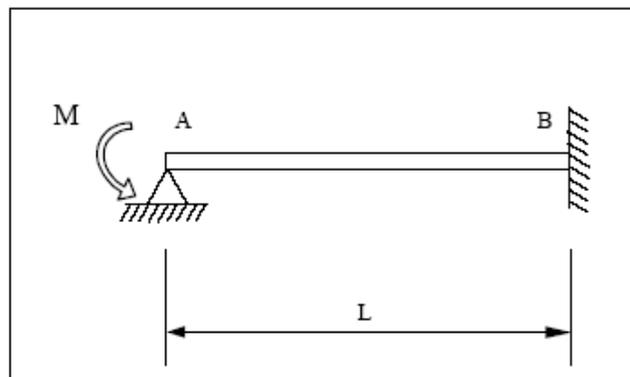
$$\theta_B = \frac{M \cdot L}{6 \cdot E \cdot I}$$



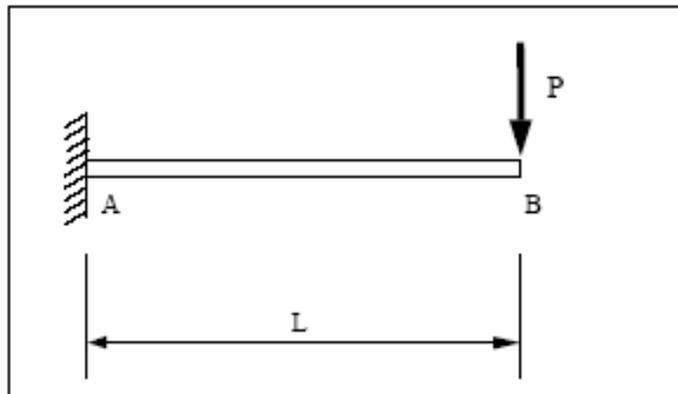
$$\theta_A = \frac{P \cdot a \cdot (L - a)^2}{4 \cdot E \cdot I \cdot L}$$



$$\theta_A = \frac{q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

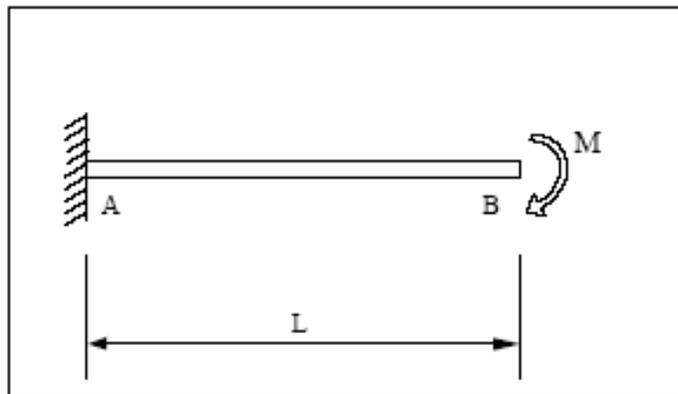


$$\theta_A = \frac{M \cdot L}{4 \cdot E \cdot I}$$



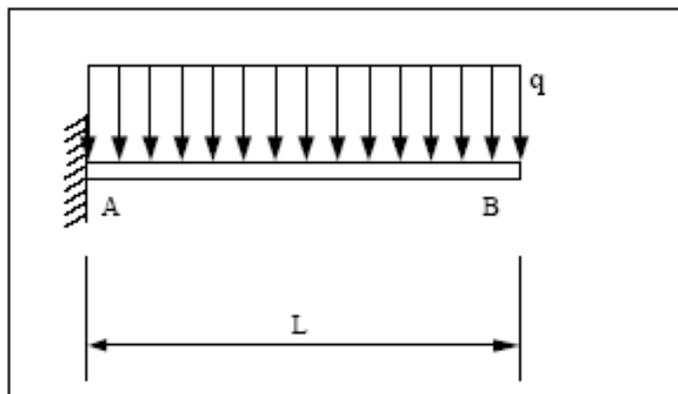
$$\downarrow f_B = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\curvearrowright \theta_B = \frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$



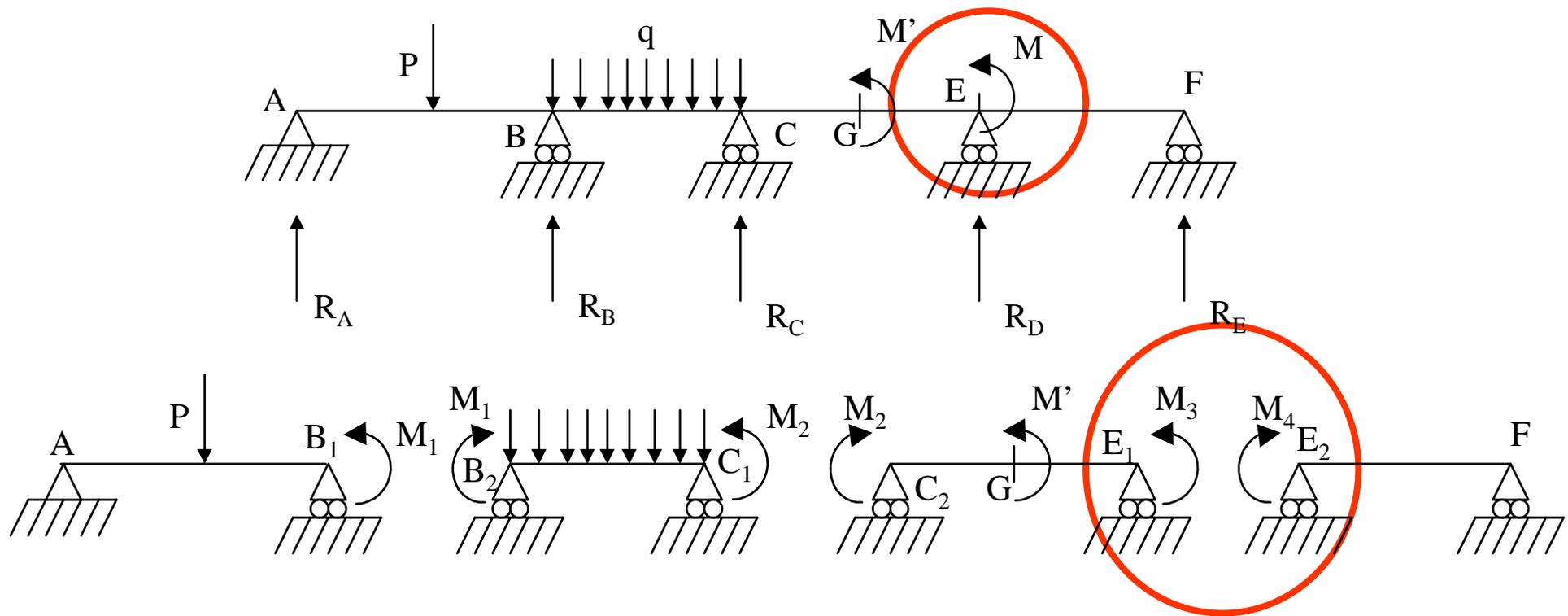
$$\downarrow f_B = \frac{M \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$\curvearrowright \theta_B = \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$$



$$\downarrow f_B = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I}$$

$$\curvearrowright \theta_B = \frac{q \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I}$$



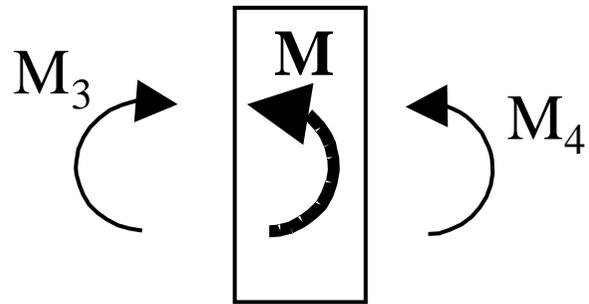
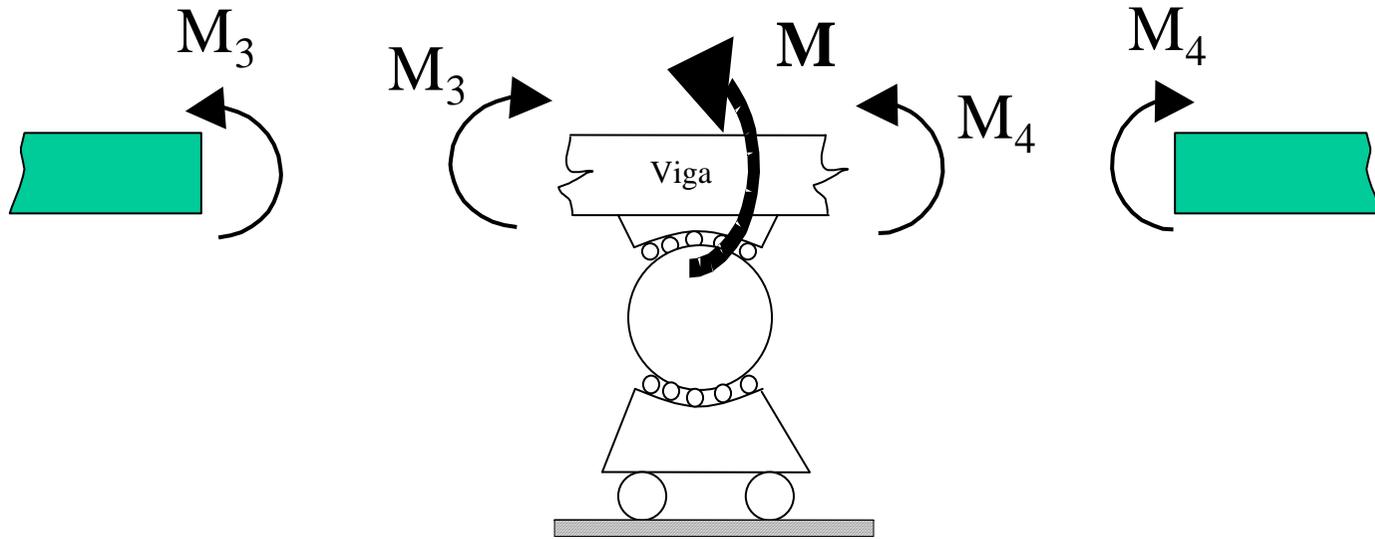
Incógnitas: M_1 , M_2 , M_3 y M_4

Ecuaciones:

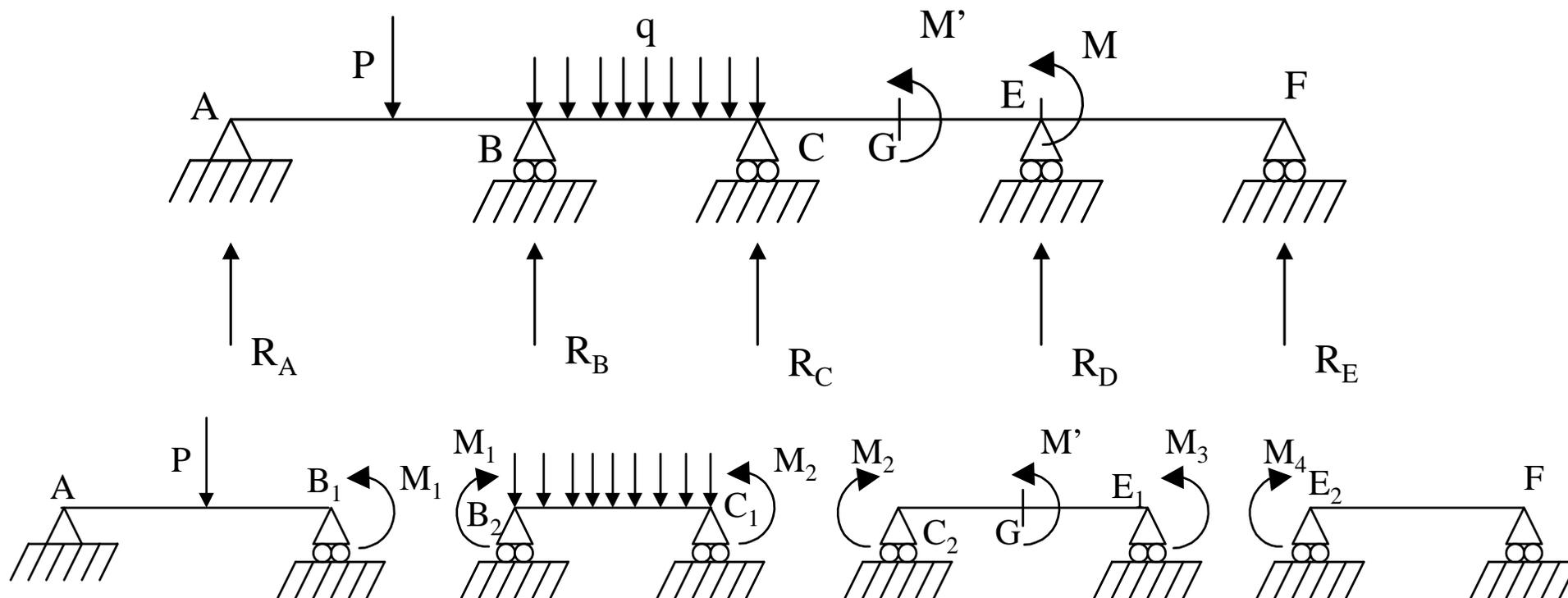
$$\theta_{B_1} (\text{antihoario}) = \theta_{B_2} (\text{antihoario})$$

$$\theta_{C_1} (\text{antihoario}) = \theta_{C_2} (\text{antihoario})$$

$$\theta_{E_1} (\text{antihoario}) = \theta_{E_2} (\text{antihoario})$$



$$M + M_4 - M_3 = 0$$



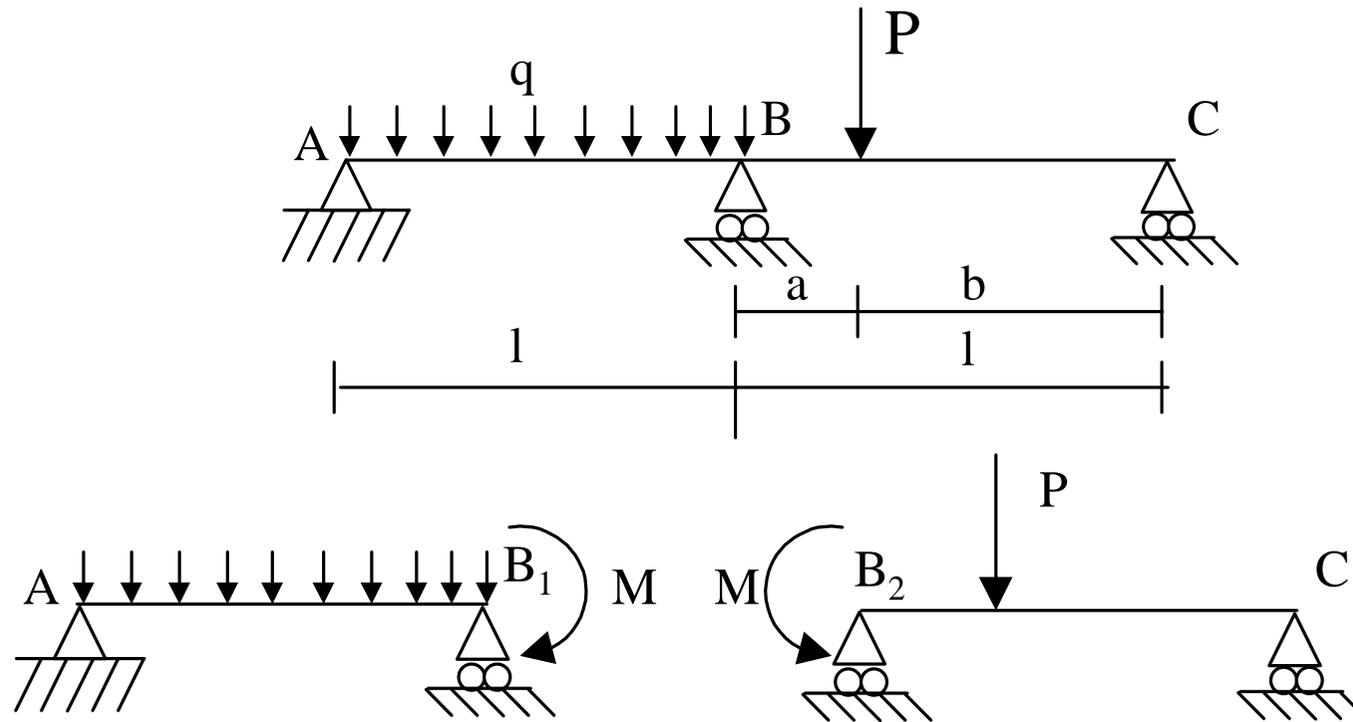
$$R_A = R_A$$

$$R_B = R_{B_1} + R_{B_2}$$

$$R_C = R_{C_1} + R_{C_2}$$

$$R_E = R_{E_1} + R_{E_2}$$

EJEMPLO:

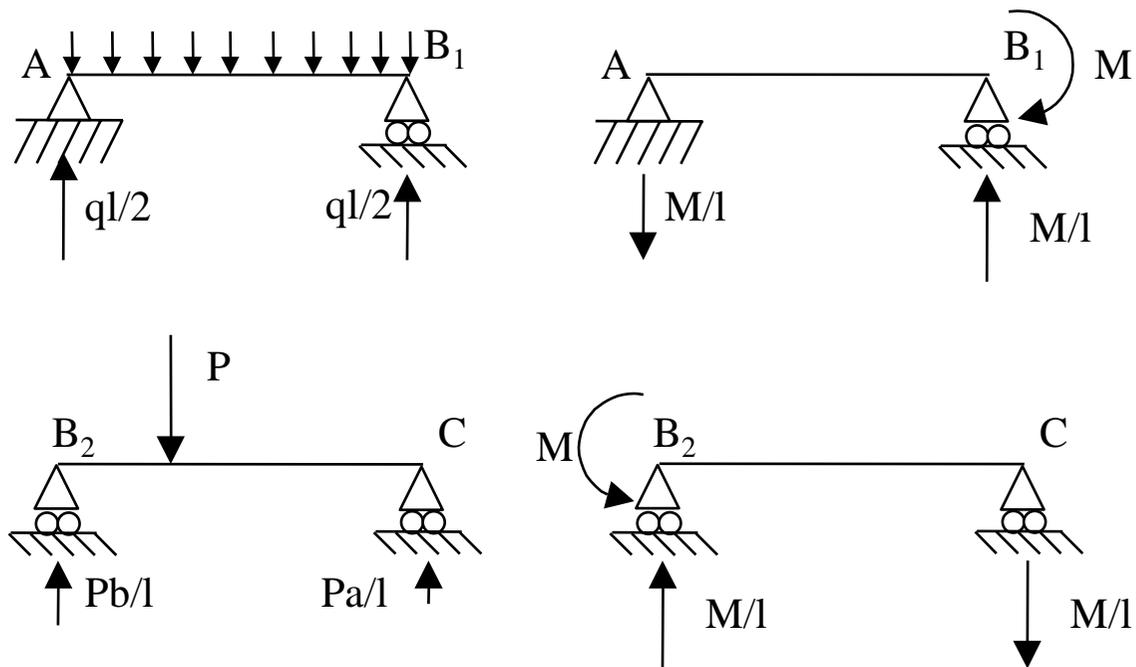


$$\theta_{B_1} (\text{antihorario}) = \theta_{B_2} (\text{antihorario})$$

$$\theta_{B_1} (\text{antihorario}) = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{Ml}{3EI}$$

$$\theta_{B_2} (\text{antihorario}) = \frac{Ml}{3EI} - \frac{Pab(l+b)}{6EI l}$$

$$M = \frac{ql^2}{16} + \frac{Pab(l+b)}{4l^2}$$

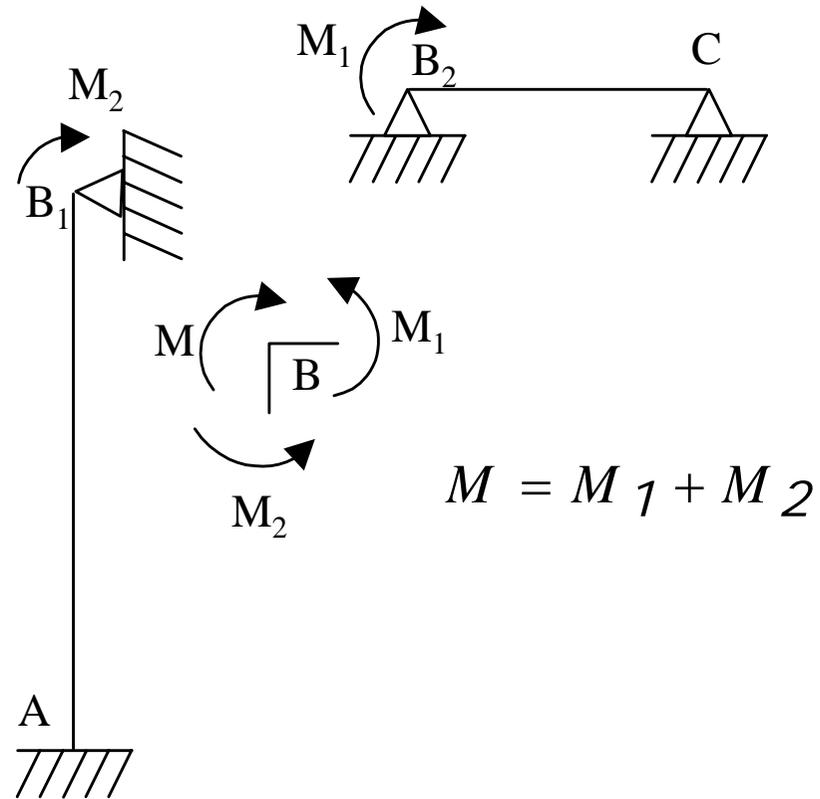
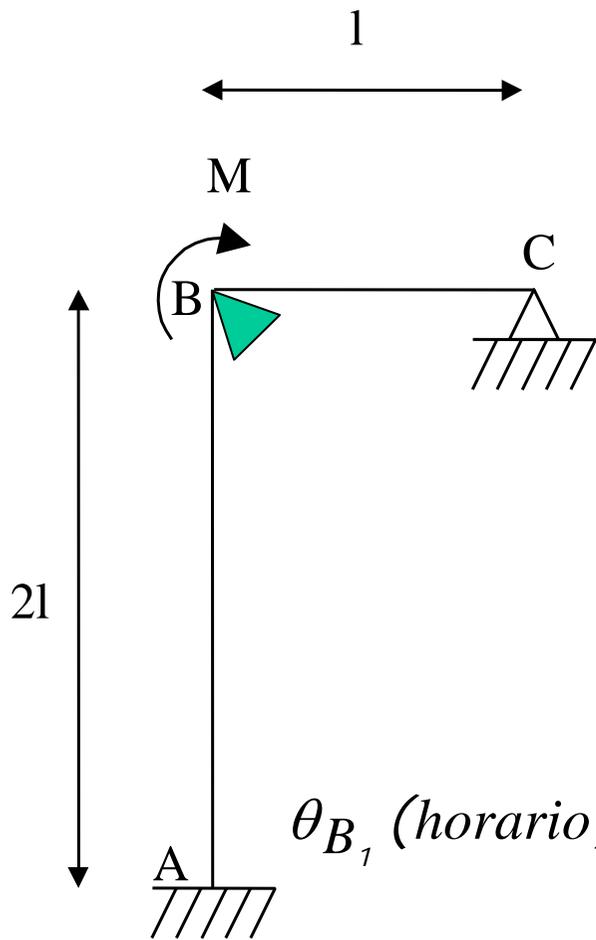


$$R_A \uparrow = \frac{ql}{2} - \frac{M}{l}$$

$$R_B \uparrow = \frac{ql}{2} + \frac{M}{l} + \frac{Pb}{l} + \frac{M}{l}$$

$$R_C \uparrow = \frac{Pa}{l} - \frac{M}{l}$$

b) SEMIPÓRTICOS



$$\theta_{B_1} (\text{horario}) = \theta_{B_2} (\text{horario})$$

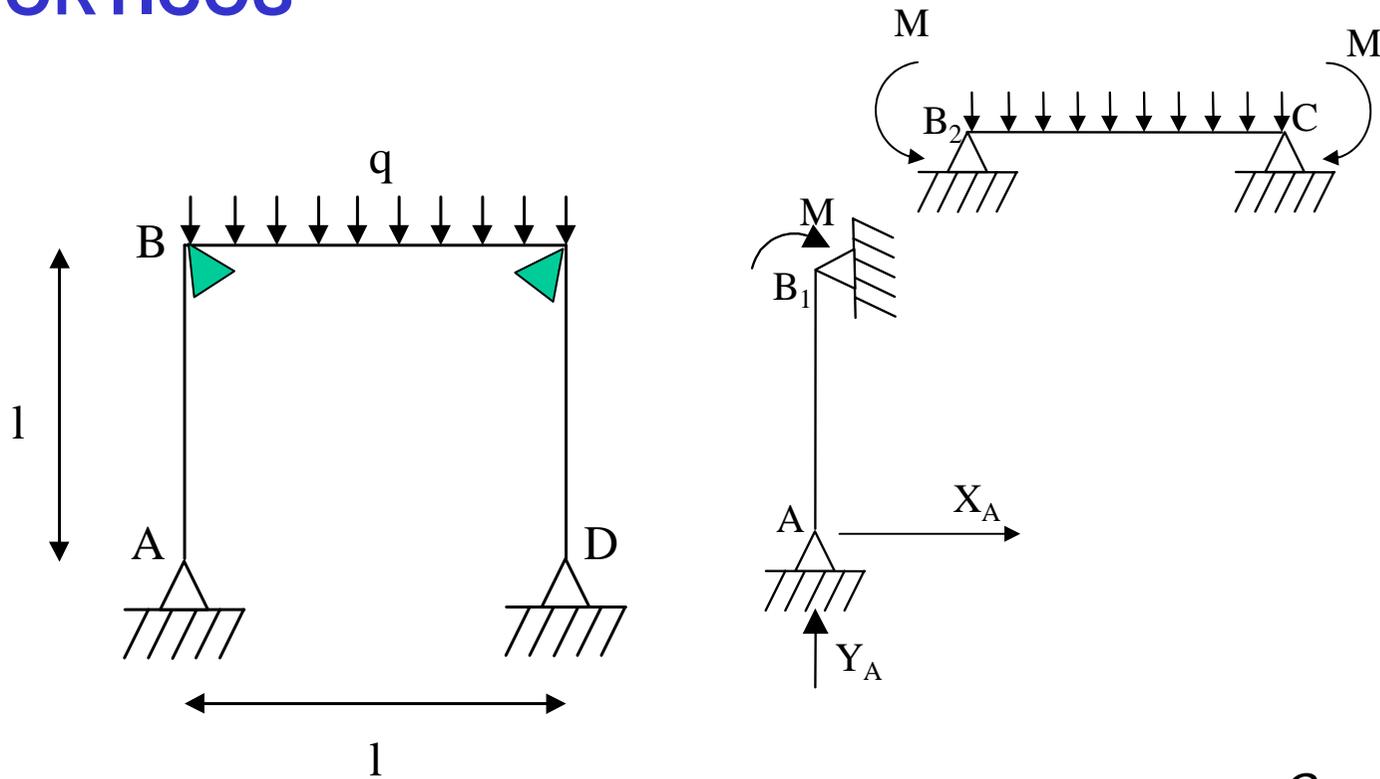
$$\theta_{B_1} (\text{horario}) = \frac{M_2 (2l)^2}{4EI(2l)} = \frac{M_2 l}{2EI}$$

$$\theta_{B_2} (\text{horario}) = \frac{M_1 l}{3EI}$$

$$M_2 = \frac{2}{5} M$$

$$M_1 = \frac{3}{5} M$$

c) PÓRTICOS



$$\theta_{B_1} (\text{horario}) = \theta_{B_2} (\text{horario})$$

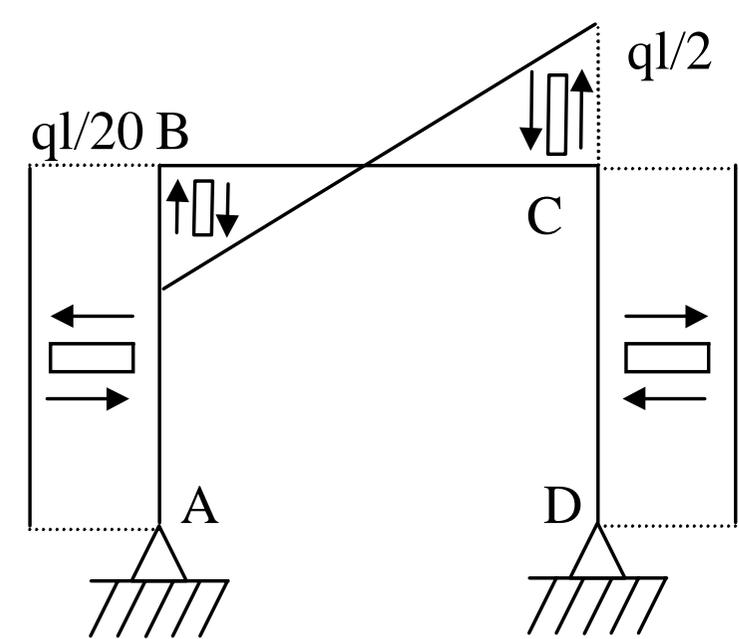
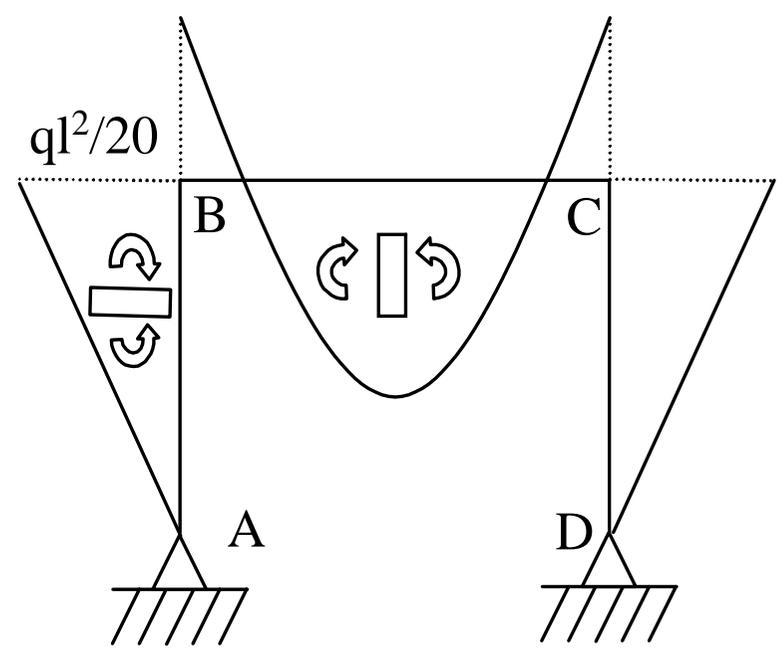
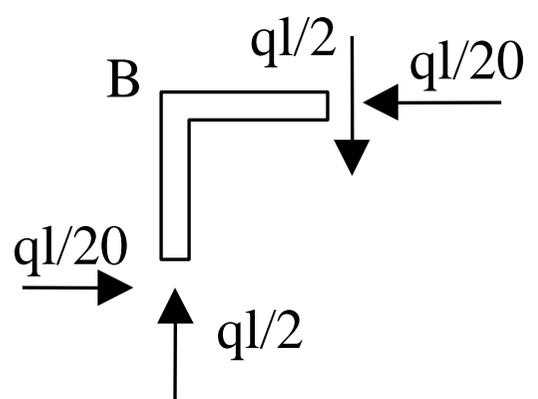
$$\theta_{B_1} (\text{horario}) = \frac{Ml}{3EI}$$

$$\theta_{B_2} (\text{horario}) = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{Ml}{3EI} - \frac{Ml}{6EI}$$

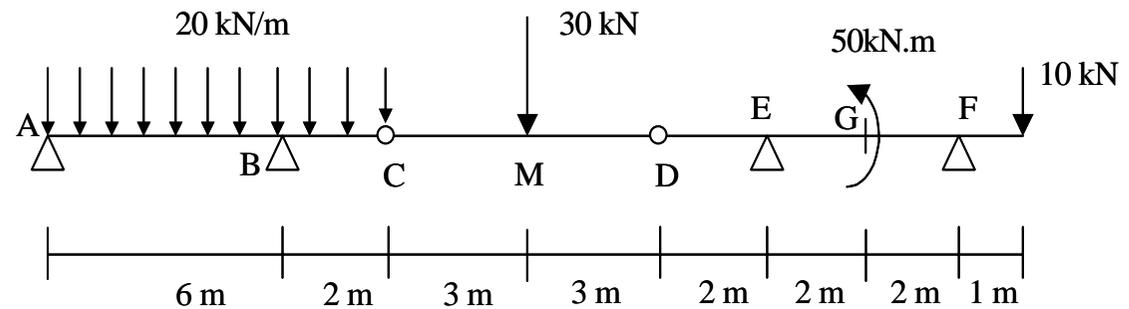
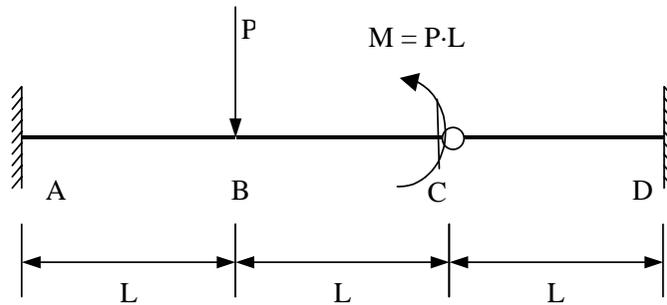
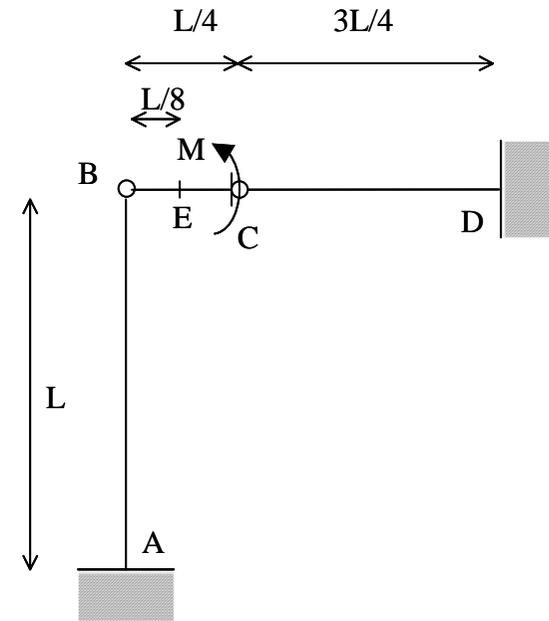
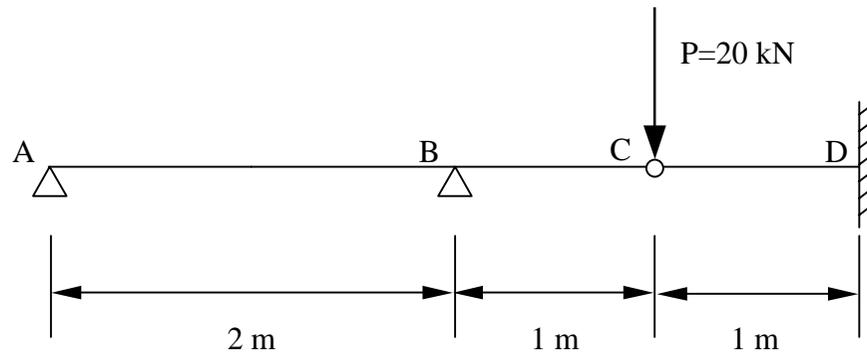
$$M = \frac{ql^2}{20}$$

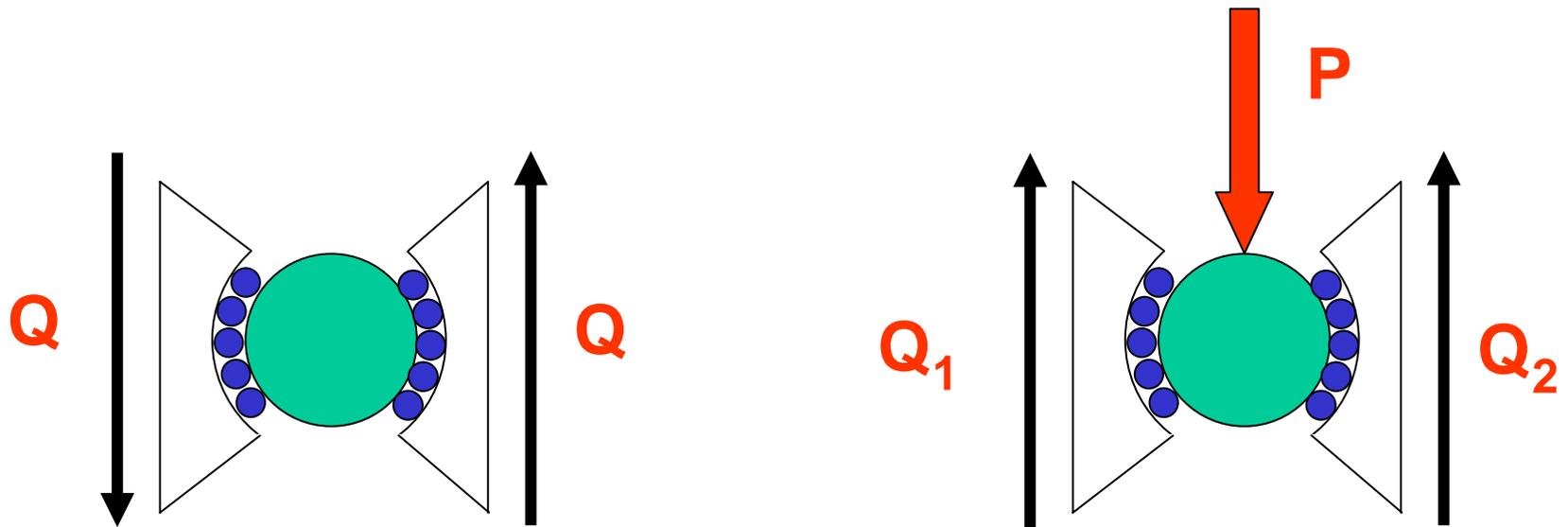
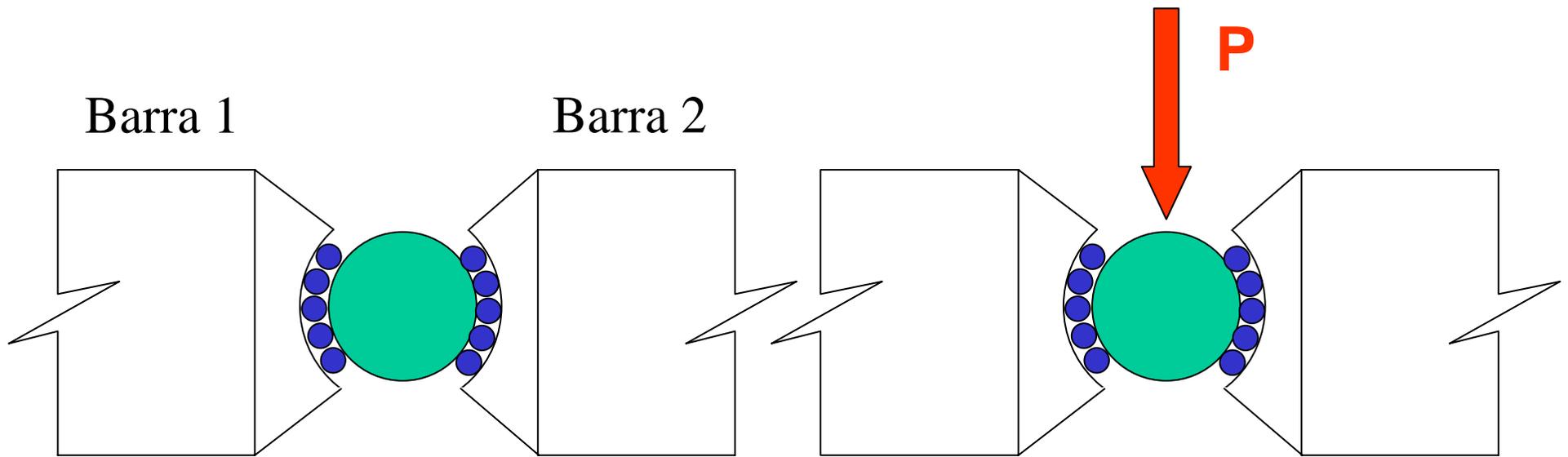
$$Y_A = \frac{ql}{2}$$

$$X_A = \frac{ql}{20}$$

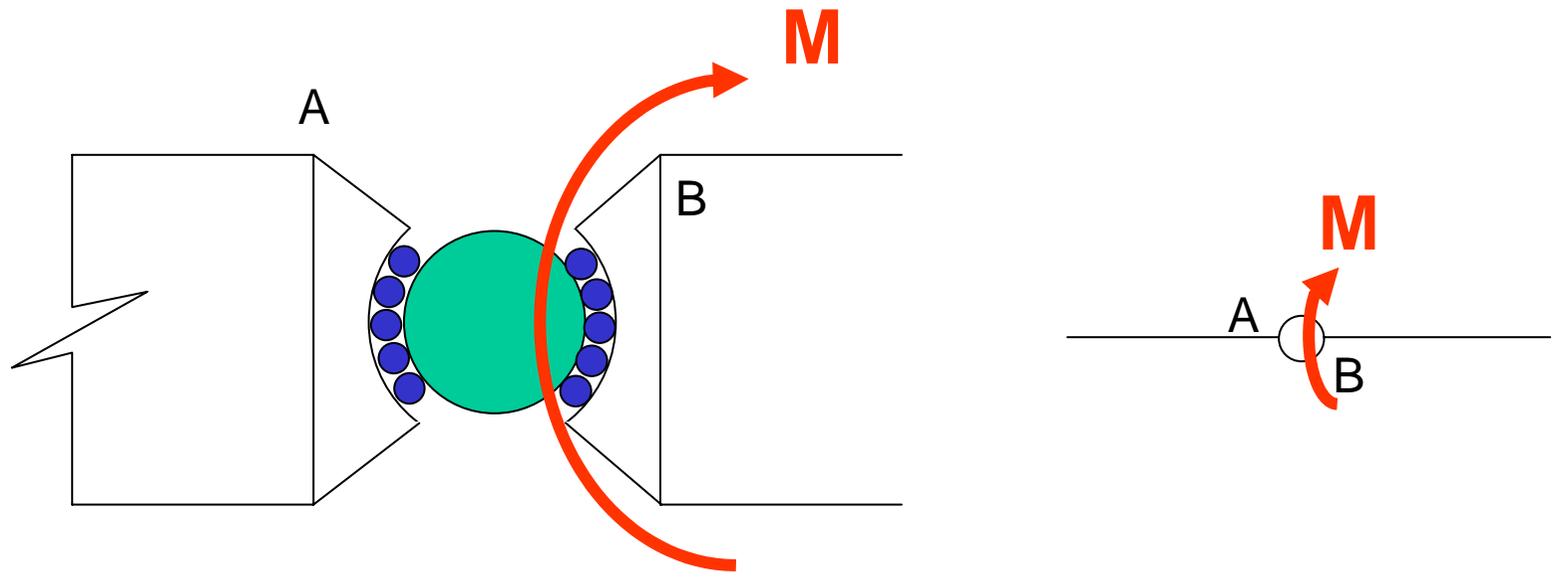
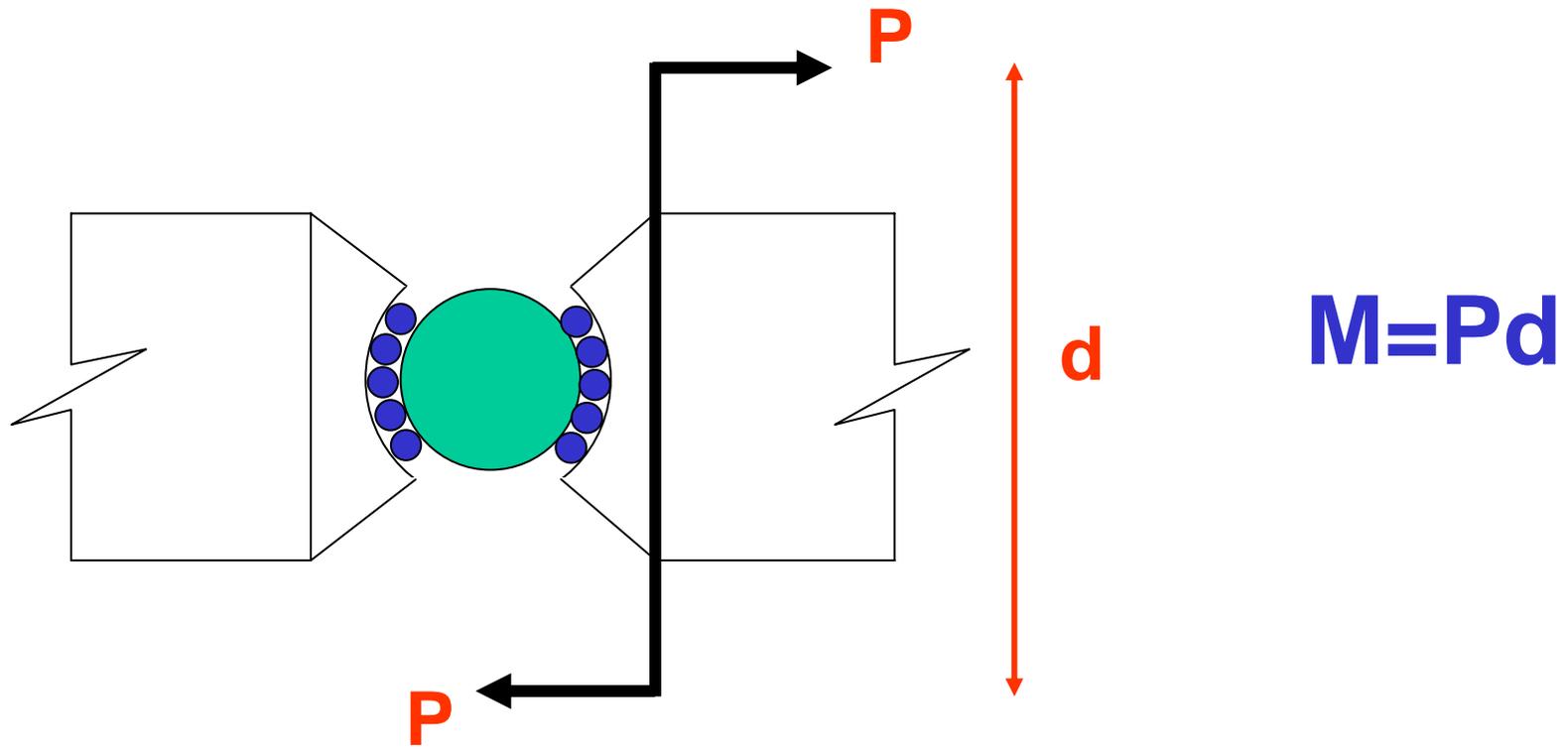


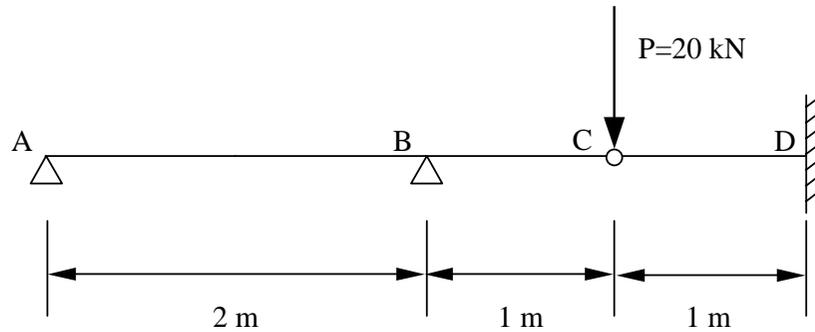
ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES CON ROTULAS





$$Q_1 + Q_2 = P$$





Incógnitas:

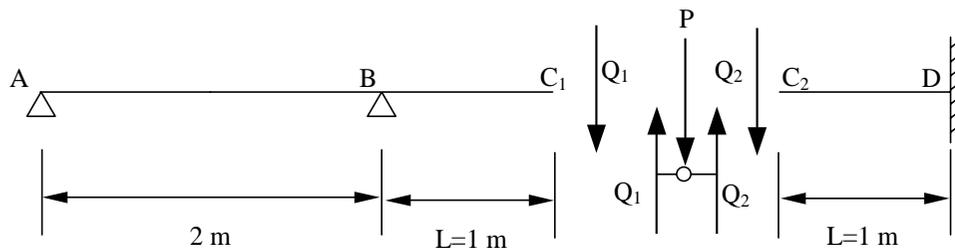
- 1 reacción vertical en A
- 1 reacción vertical en B
- 1 reacción vertical en D
- 1 momento en el empotramiento D

4

Ecuaciones de la estática:

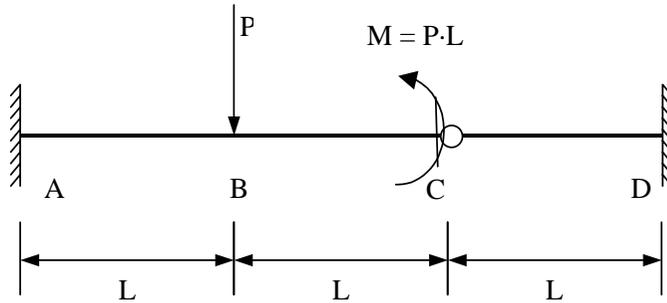
- (1) Suma de fuerzas verticales nula
- (1) Suma de momentos en un punto igual a cero
- (1) Momentos en la rótula de una de las partes Igual a cero

3



PROBLEMA HIPERESTÁTICO DE GRADO 1

Ecuación adicional: flecha en C_1 igual a flecha en C_2



Incógnitas:

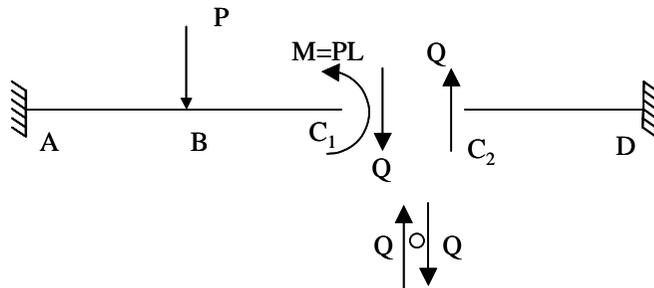
1 reacción vertical en A

1 reacción vertical en D

1 momento en el empotramiento A

1 momento en el empotramiento D

4



Ecuaciones de la estática:

(1) Suma de fuerzas verticales nula

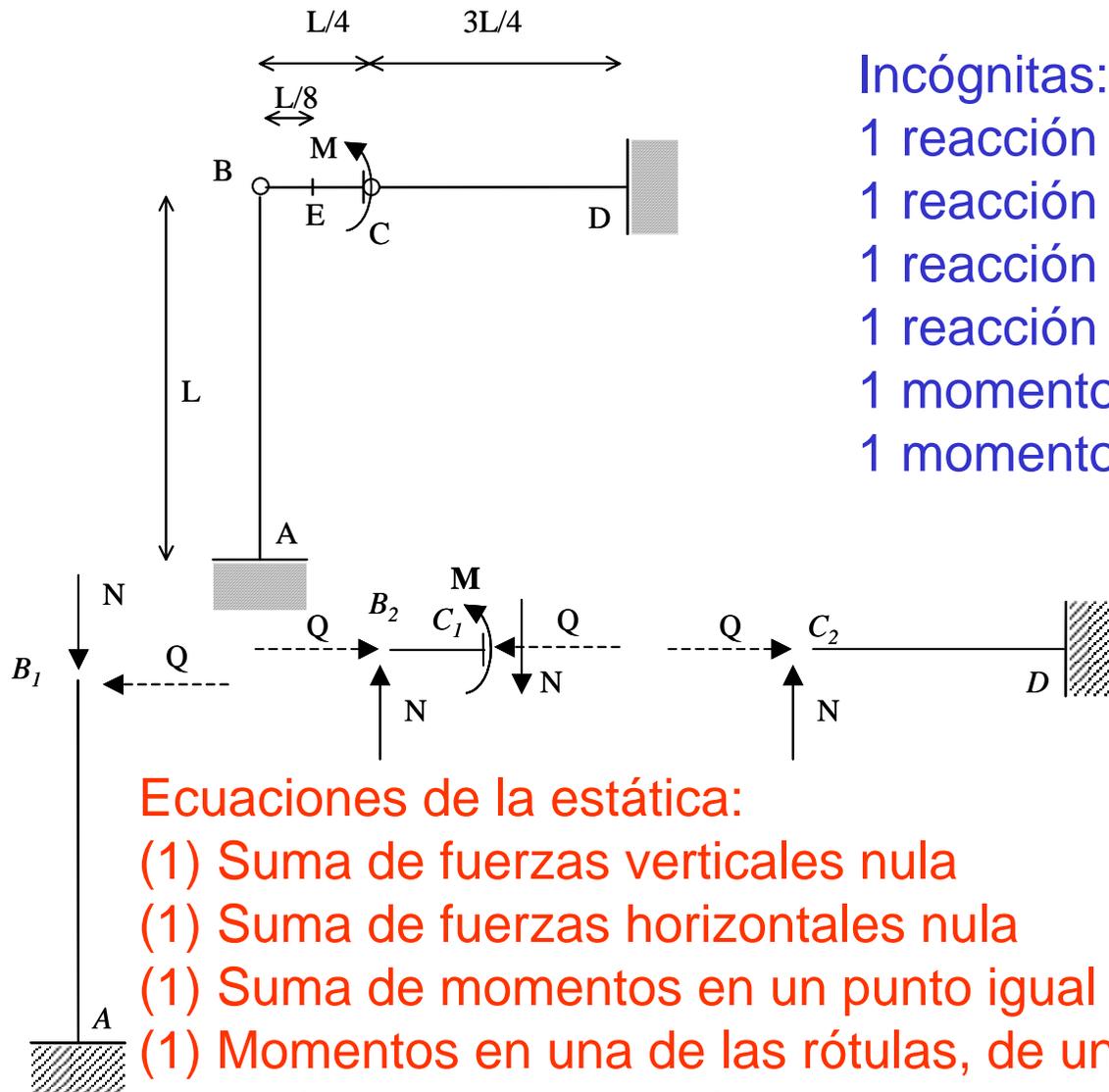
(1) Suma de momentos en un punto igual a cero

(1) Momentos en la rótula de una de las partes Igual a cero

3

PROBLEMA HIPERESTÁTICO DE GRADO 1

Ecuación adicional: flecha en C_1 igual a flecha en C_2



Incógnitas:

- 1 reacción vertical en A
- 1 reacción horizontal en A
- 1 reacción vertical en D
- 1 reacción horizontal en D
- 1 momento en el empotramiento A
- 1 momento en el empotramiento D

6

Ecuaciones de la estática:

- (1) Suma de fuerzas verticales nula
- (1) Suma de fuerzas horizontales nula
- (1) Suma de momentos en un punto igual a cero
- (1) Momentos en una de las rótulas, de una de las partes de la estructura, igual a cero
- (1) Momentos en otra de las rótulas, de una de las partes de la estructura, igual a cero

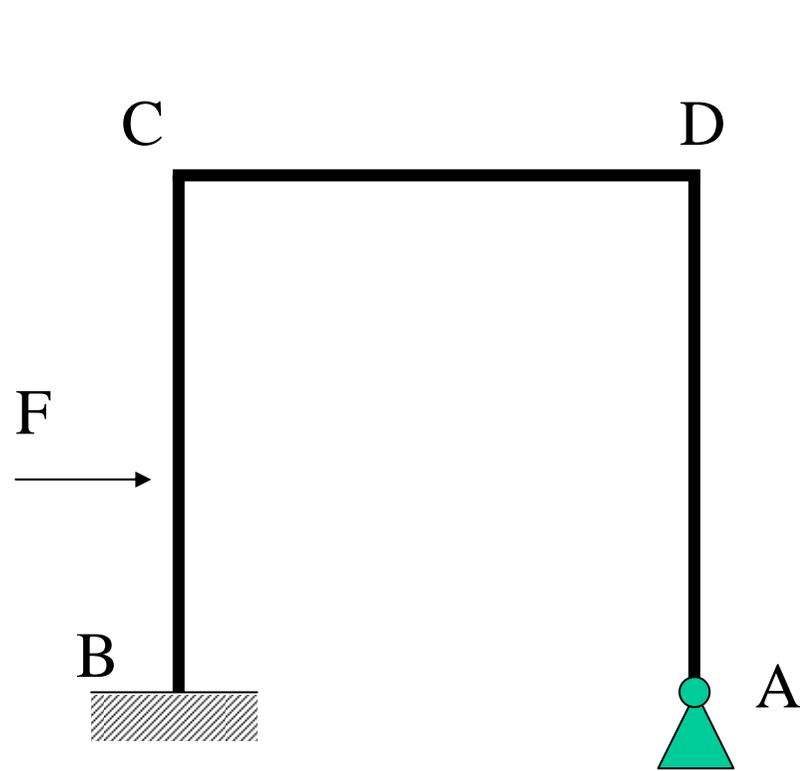
5

PROBLEMA HIPERESTÁTICO DE GRADO 1

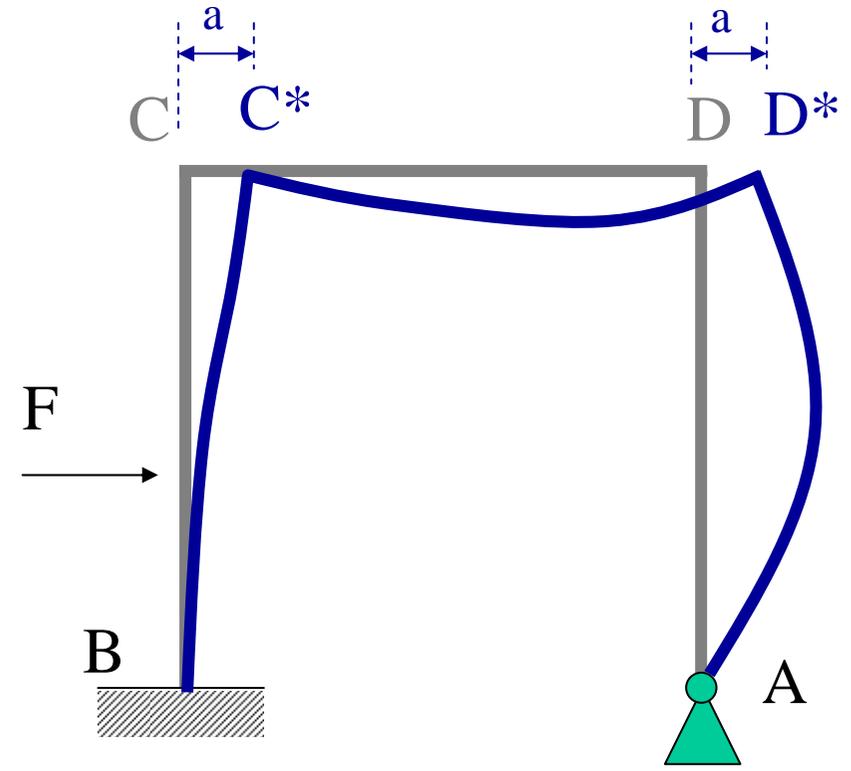
Ecuación adicional: desplazamiento horizontal de B_1 nulo

ESTRUCTURAS RETICULADAS TRASLACIONALES

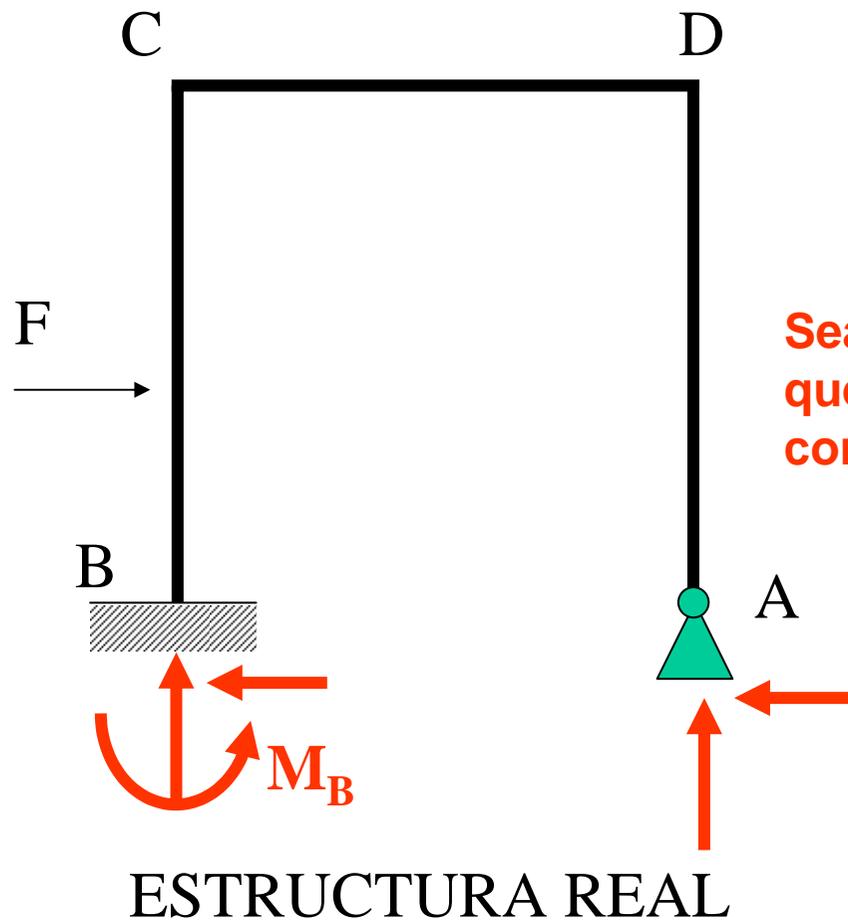
Veamos con un ejemplo la filosofía que debemos utilizar para calcular estructuras traslacionales.



ESTRUCTURA REAL

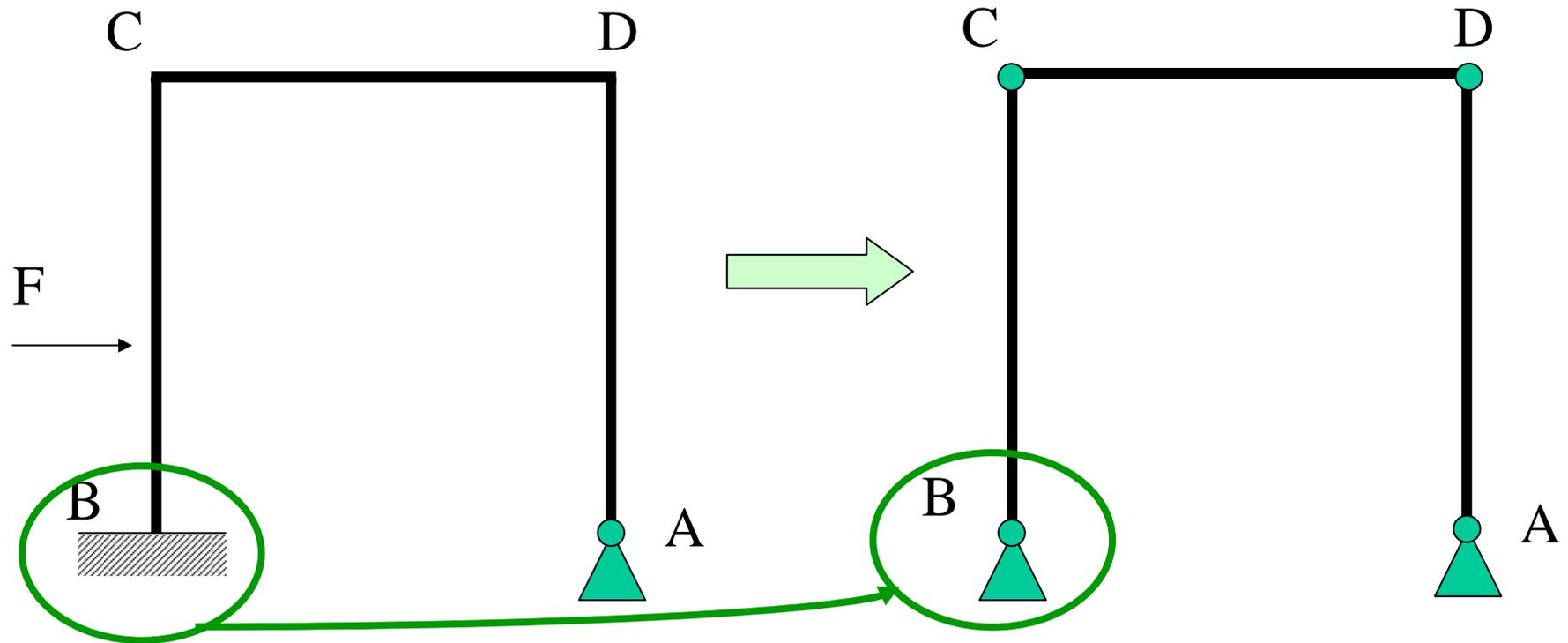


ESTRUCTURA DEFORMADA

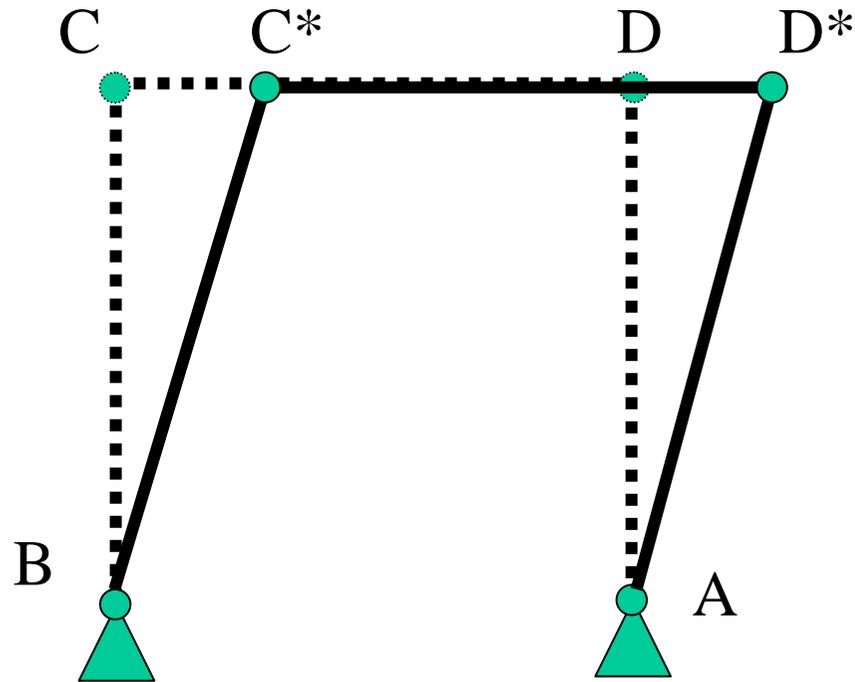


Sean M_C y M_D los momentos flectores que aparecen en las secciones en contacto con los nudos

Si prescindimos de todas las cargas que actúan y suponemos que las barras estuviesen conectadas mediante articulaciones (rótulas)

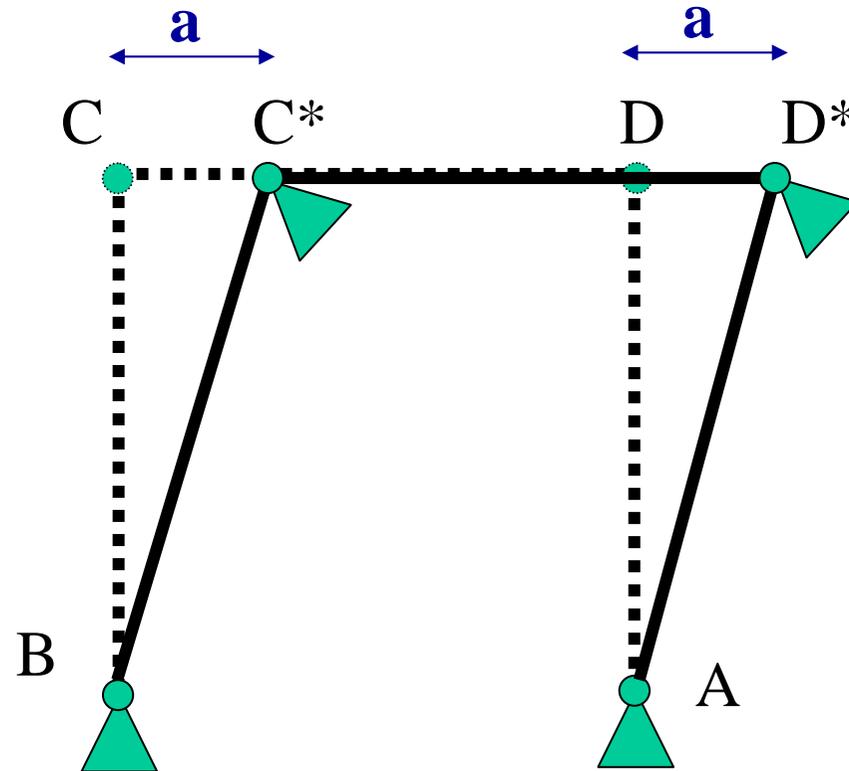


La estructura inicial se ha convertido en un mecanismo con un gdl



El movimiento de este mecanismo viene determinado por un sólo parámetro, como es el desplazamiento $CC^*=DD^*$

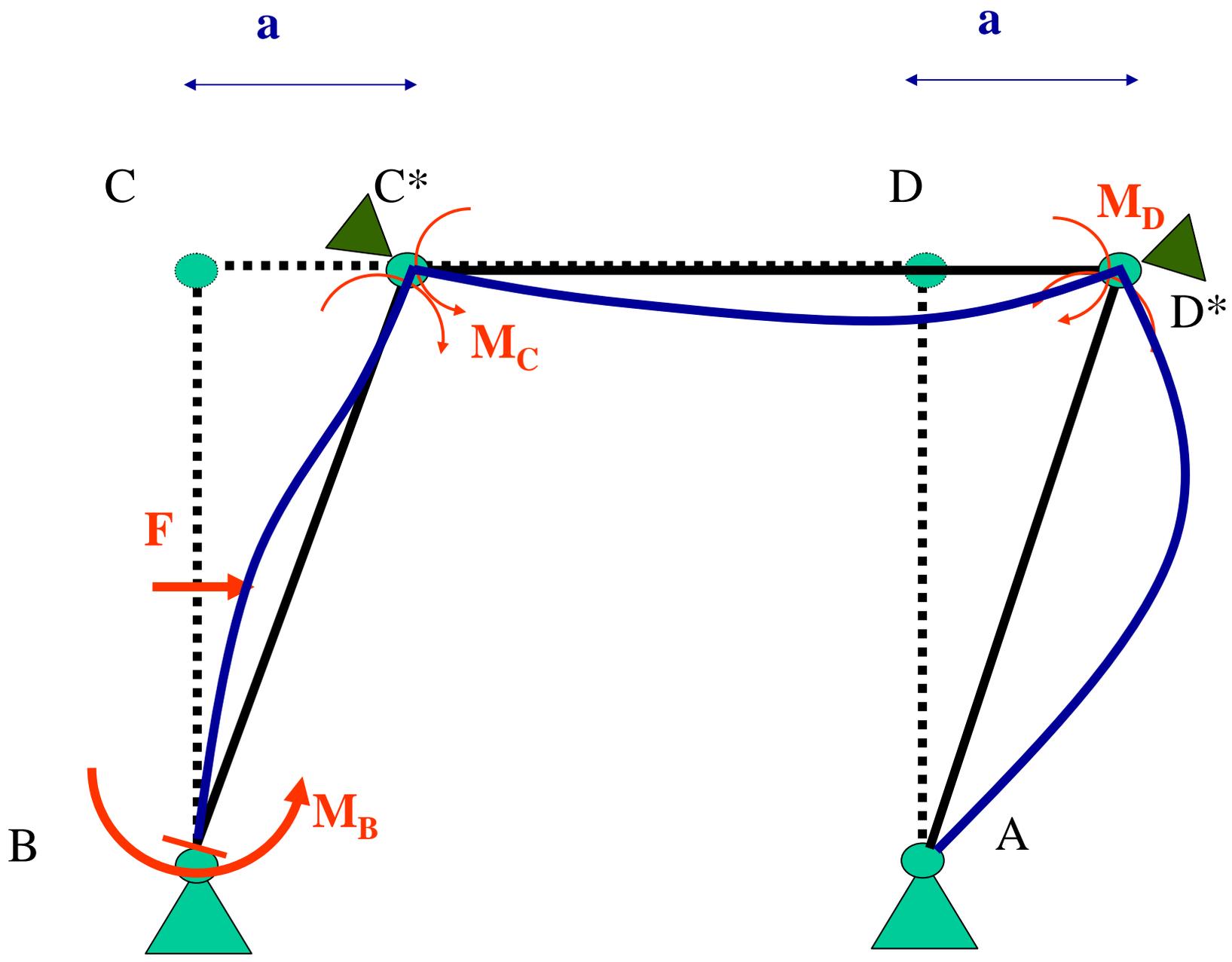
El valor de este parámetro (CC^* ó DD^*) no es conocido a priori, pero si lo supusiéramos conocido (e idéntico al que se produce en la estructura real " a ") tendríamos perfectamente determinados los desplazamientos de los nudos de la estructura.



Si, ahora, una vez que el mecanismo se ha movido de manera que el nudo C (y el D) ocupa la posición final que ocuparía en el caso de que estuviésemos considerando la estructura real, no estaríamos añadiendo nuevas coacciones al sistema porque ya se había movido

Pero, claro, en el caso del mecanismo, las secciones en contacto con la rótula que exista en un nudo giran diferente, cuando en la estructura real, las secciones de dos barras coincidentes en un nudo, tendrían que girar lo mismo.

Si, ahora, colocáramos sobre el mecanismo una vez movido, las cargas que actúan sobre la estructura y, en las secciones en contacto con las rótulas los momentos flectores que, en la realidad, actúan sobre ellas (M_B en B, M_C en C^* y M_D en D^*):

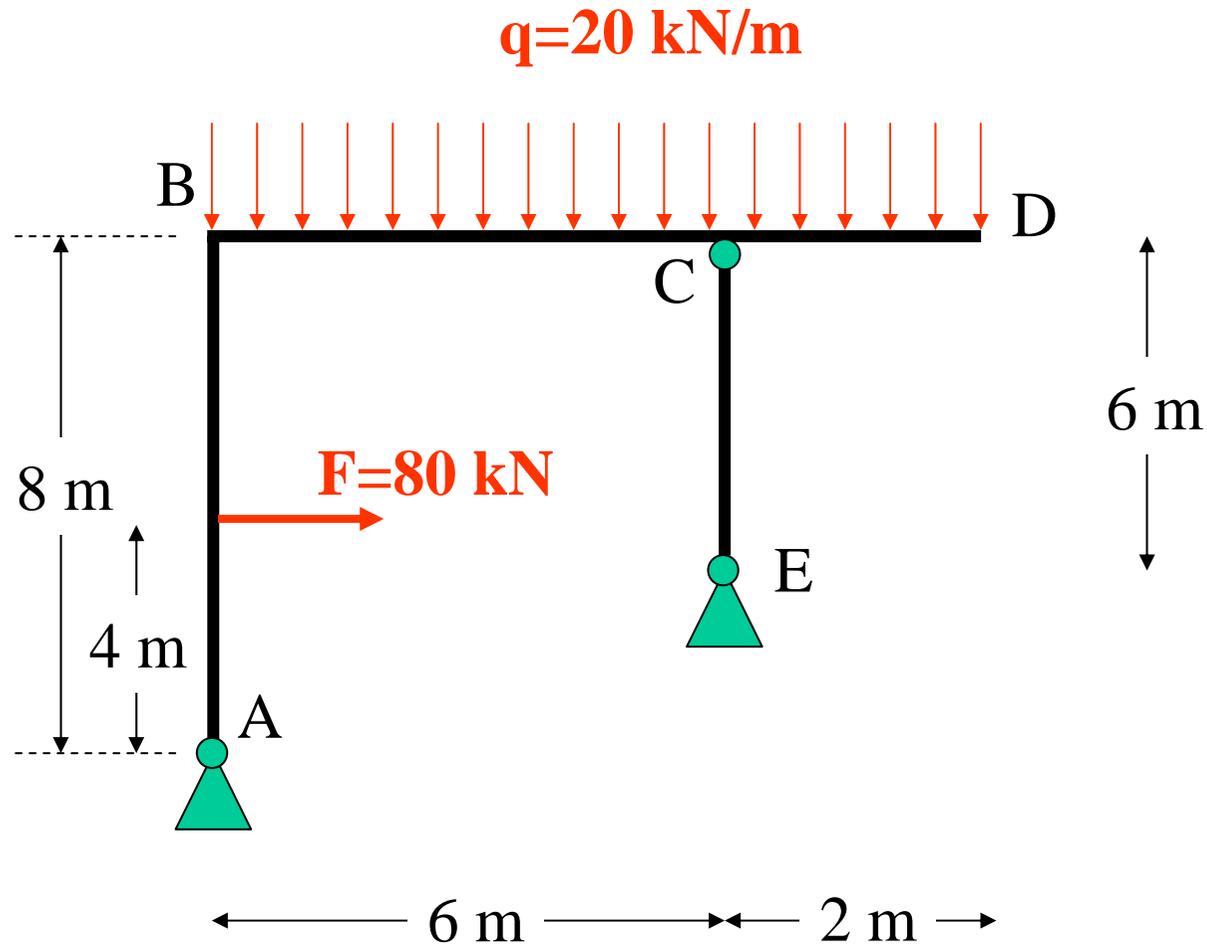


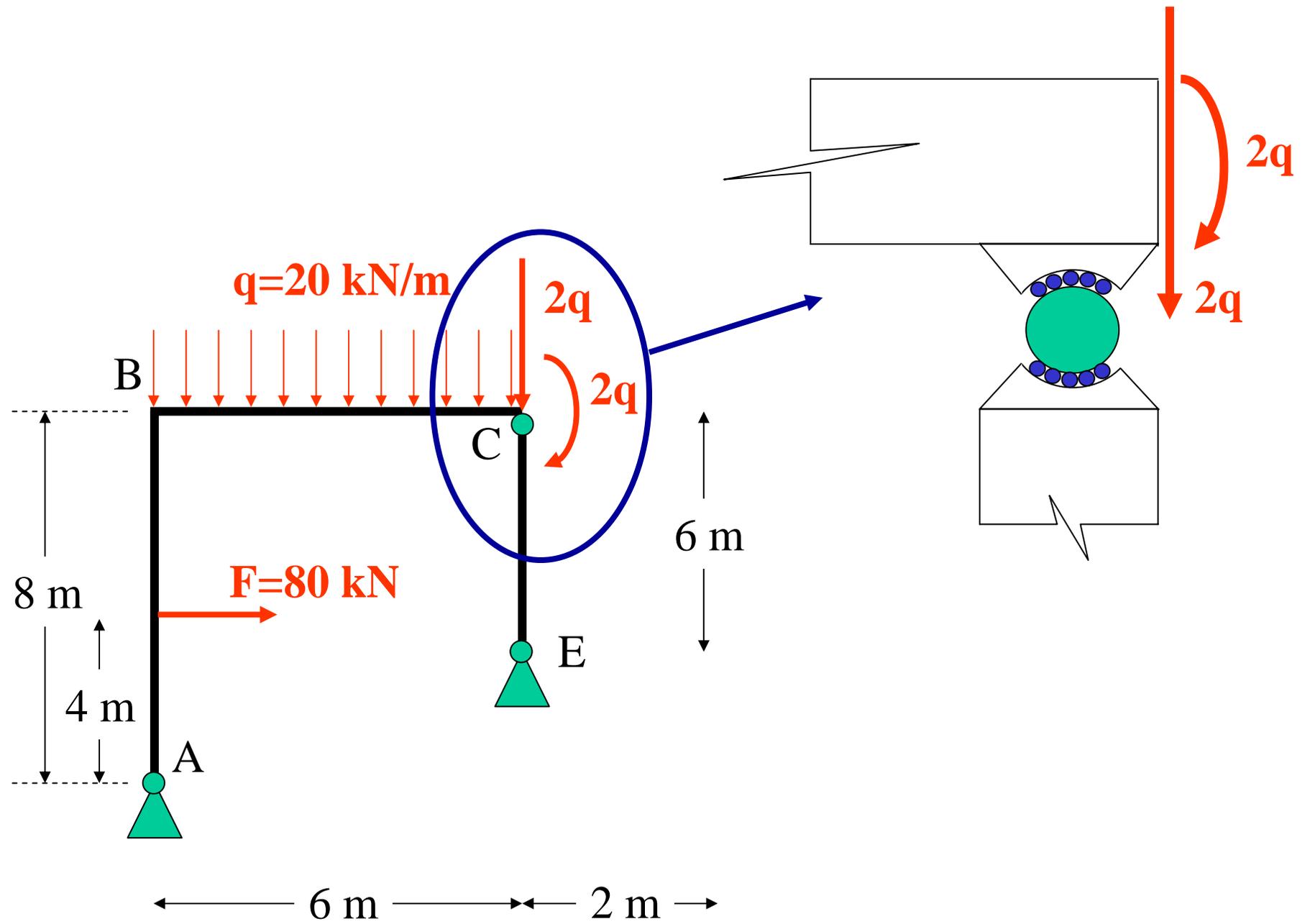
¡Obtendríamos la estructura deformada!

Veamos un ejemplo:

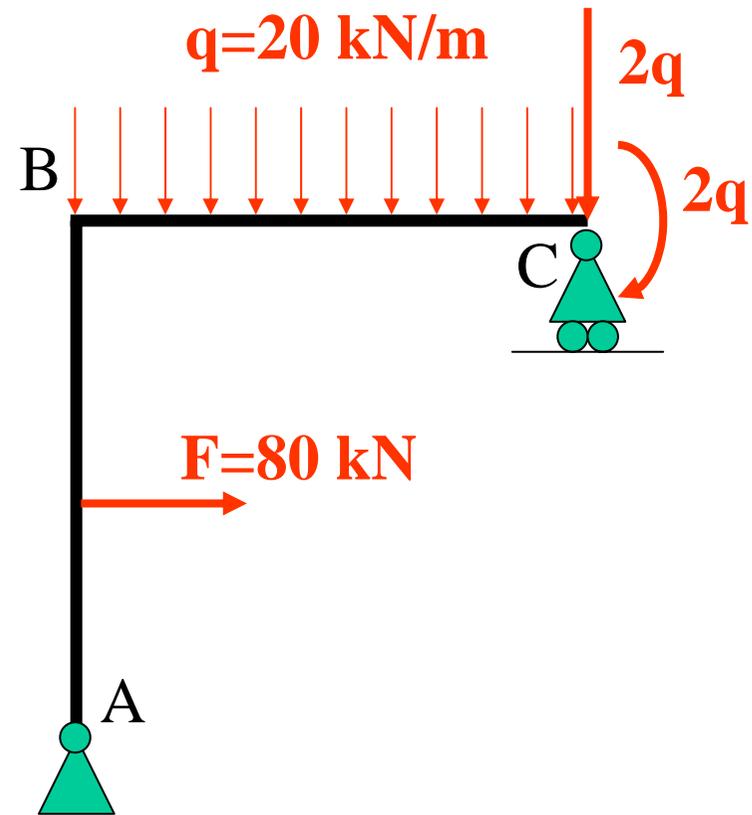
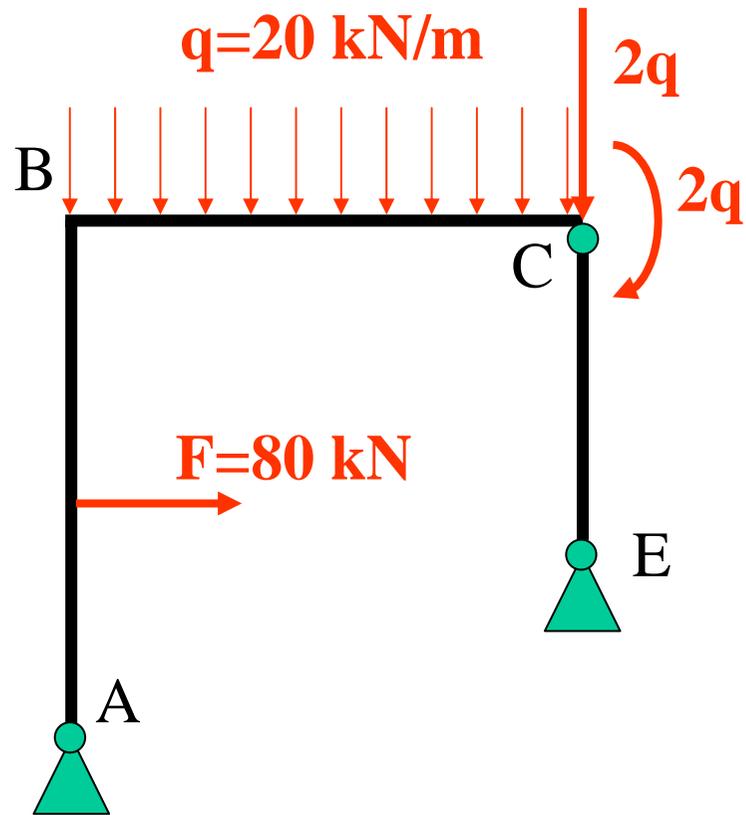
Deducir las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes y axiales y los movimientos de las secciones B y D en la estructura de la figura.

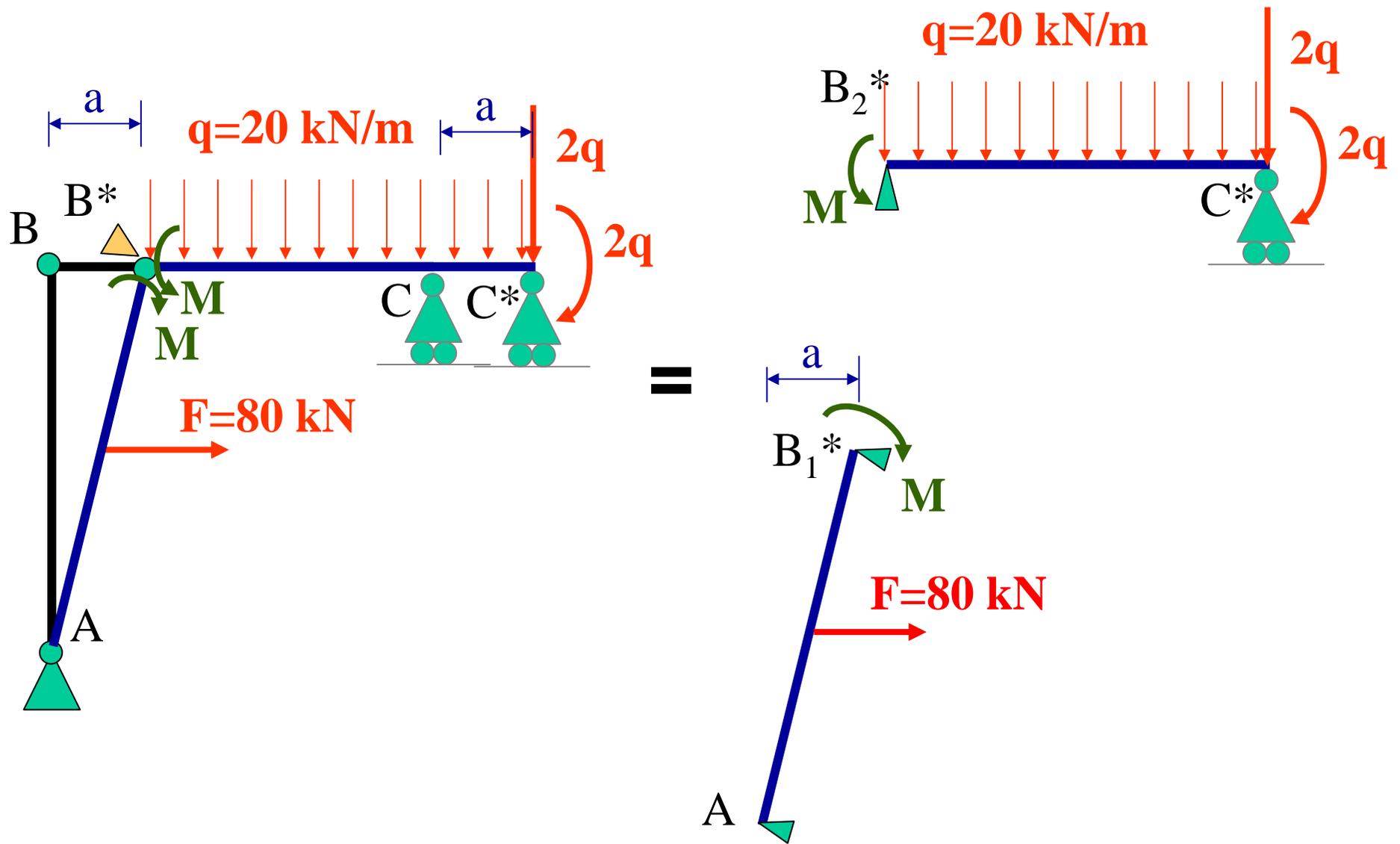
La sección de las vigas es rectangular de 30 cm de ancho y 40 cm de canto y el material (hormigón) tiene un módulo de elasticidad de 20 Gpa.



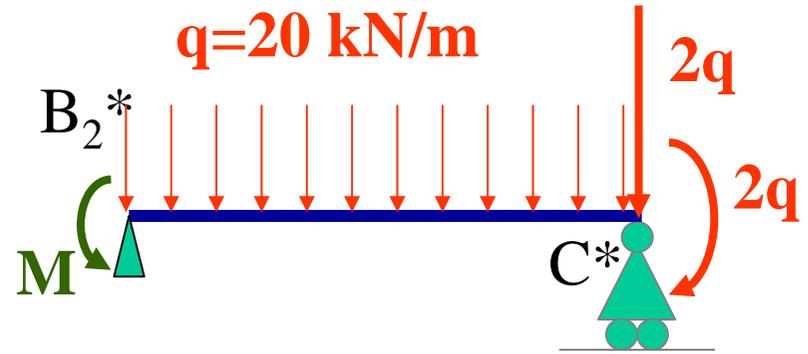


¿Podemos simplificar más aún la estructura?

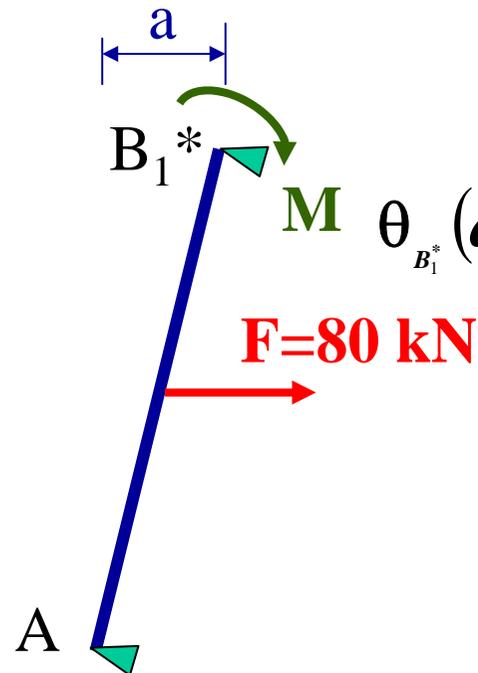




$$\theta_{B_1^*} (\text{antihorario}) = \theta_{B_2^*} (\text{antihorario})$$

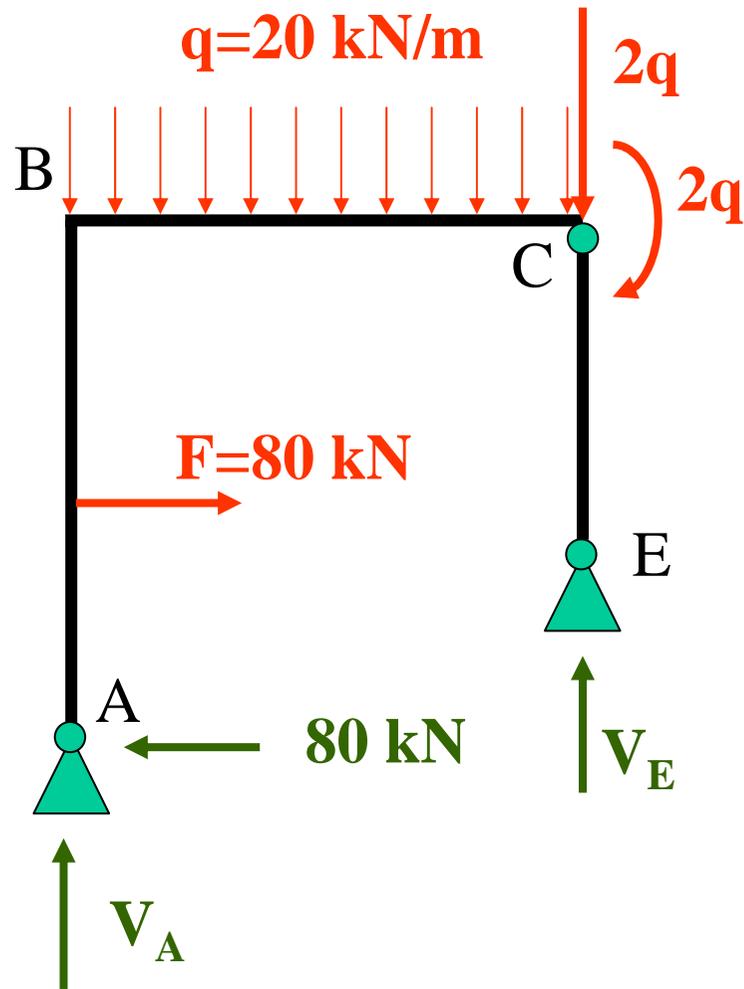


$$\theta_{B_2^*} (\text{antihorario}) = \frac{6M}{3EI} + \frac{6 \cdot 40}{6EI} - \frac{20 \cdot 6^3}{24EI}$$



$$\theta_{B_1^*} (\text{antihorario}) = -\frac{8M}{3EI} + \frac{80 \cdot 8^2}{16EI} \left(-\frac{a}{8} \right)$$

$$\frac{14}{3} M + \frac{EI}{8} a = 460$$



Tomando momentos en B de las fuerzas y momentos que actúan sobre la barra AB (sentido antihorario positivo):

$$-80 \cdot 8 - M + 80 \cdot 4 = 0$$

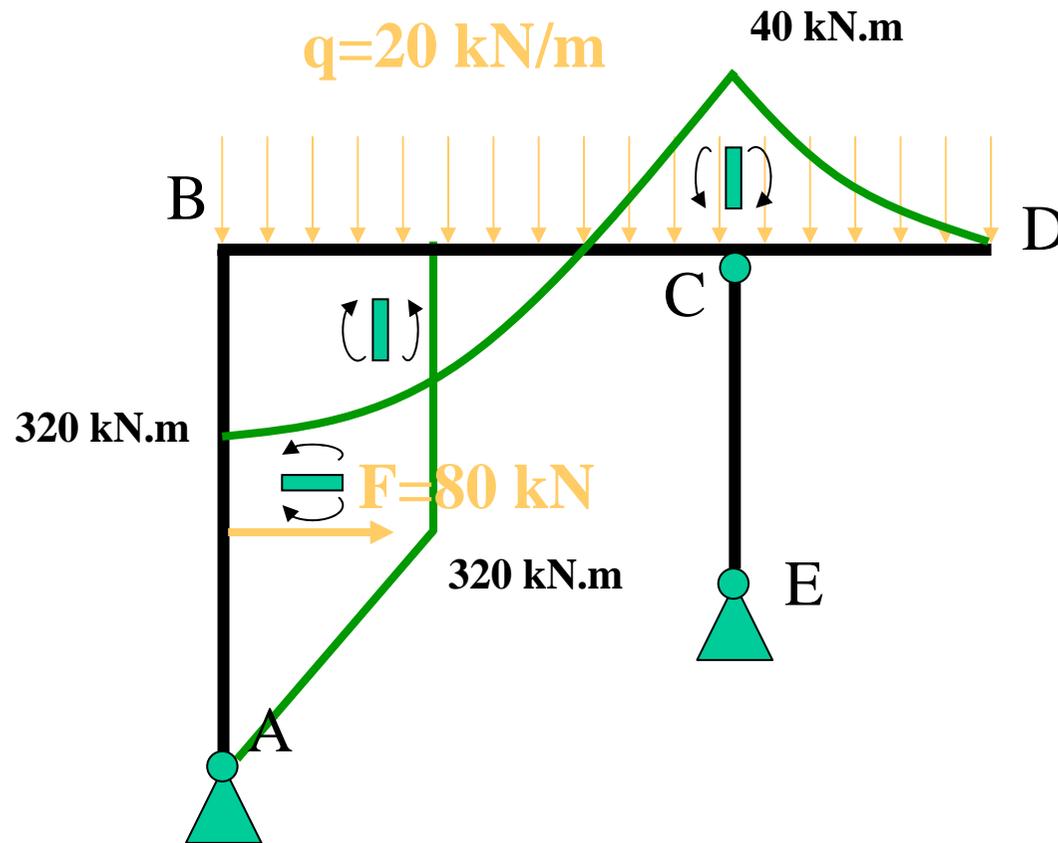
$$M = -320 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$EI = 20 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} 0,3 \cdot 0,4^3 = 32000 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

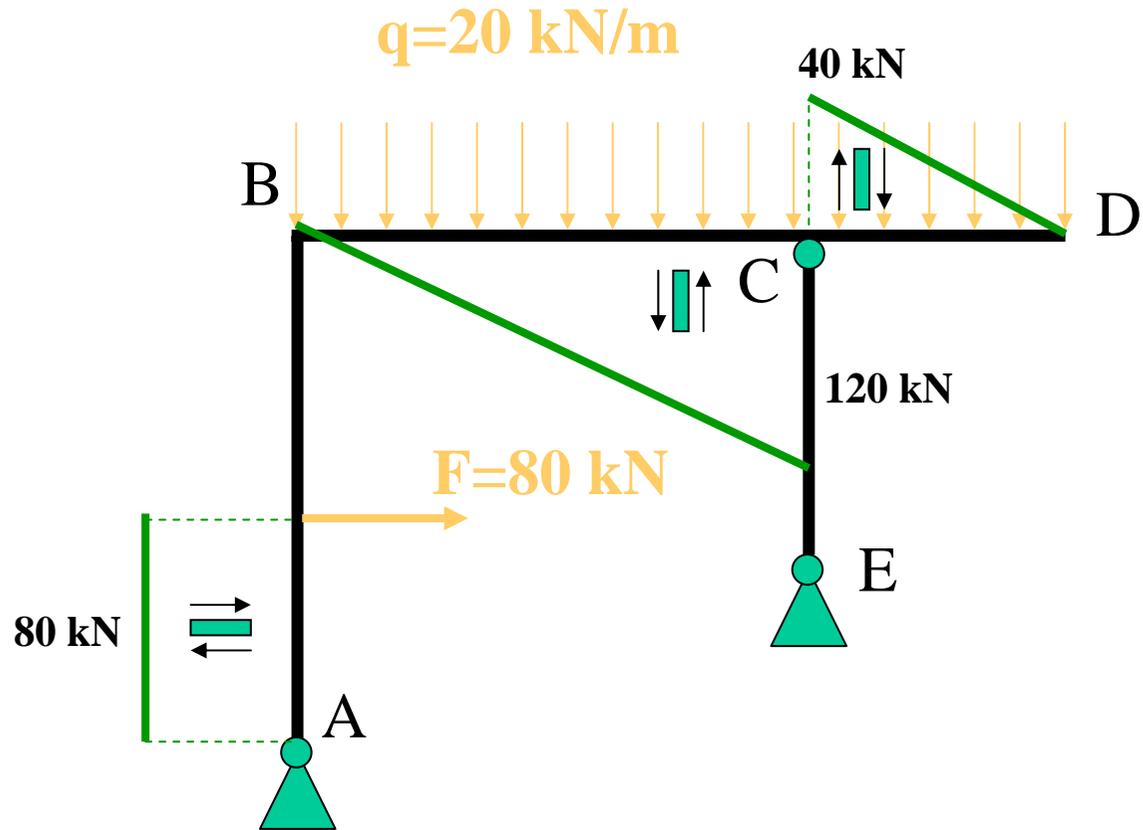
$$\frac{14}{3} M + \frac{EI}{8} a = 460$$

$$a = 0,488 \text{ m}$$

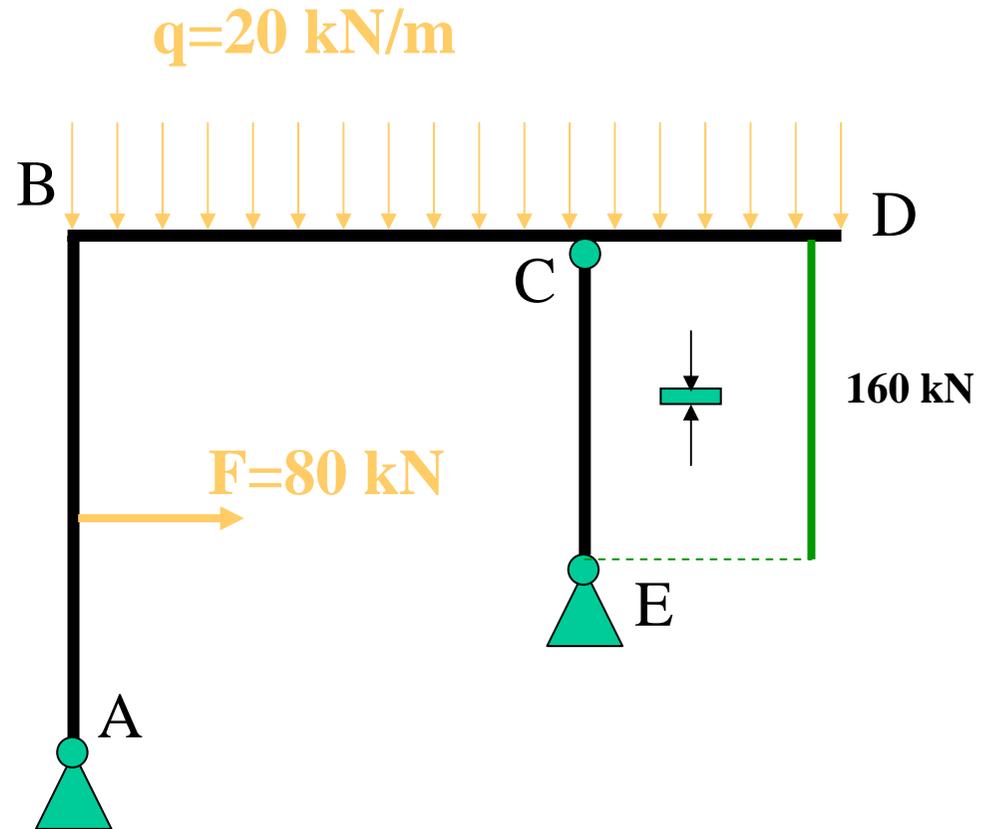
Ley de momentos flectores



Ley de esfuerzos cortantes



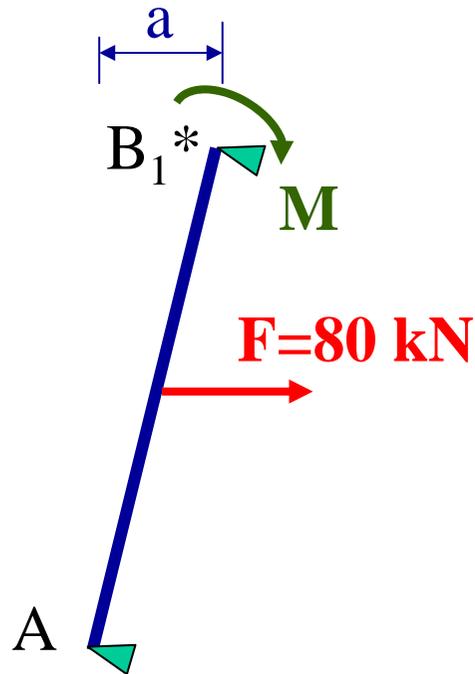
Ley de esfuerzos axiales



Movimientos de la sección B:

El desplazamiento horizontal será 0,488 m, el vertical nulo y el giro:

$$\theta_{B_1^*} (\text{antihorario}) = \frac{8 \cdot 320}{3EI} + \frac{80 \cdot 8^2}{16EI} - \frac{0,488}{8} = -0,0243 \text{ rad}$$



La sección B gira en sentido horario 0,0243 rad

Movimientos de la sección D:

El desplazamiento horizontal será 0,488 m.

El desplazamiento vertical será suma de:

a) El obtenido si la sección C del dintel no girara:

$$v_D^1 \downarrow = \frac{q \cdot L_{CD}^4}{8EI} = \frac{20 \cdot 2^4}{8 \cdot 32000} = 1,25 \text{ mm}$$

b) El de sólido rígido motivado por el giro de la sección C del dintel:

$$\theta_C (\text{horario}) = \frac{40 \cdot 6}{3EI} - \frac{20 \cdot 6^3}{24EI} - \frac{320 \cdot 6}{6EI} = -0,0131 \text{ rad}$$

$$v_D^2 \uparrow = 0,0131 \cdot 2 = 0,02625 \text{ m}$$

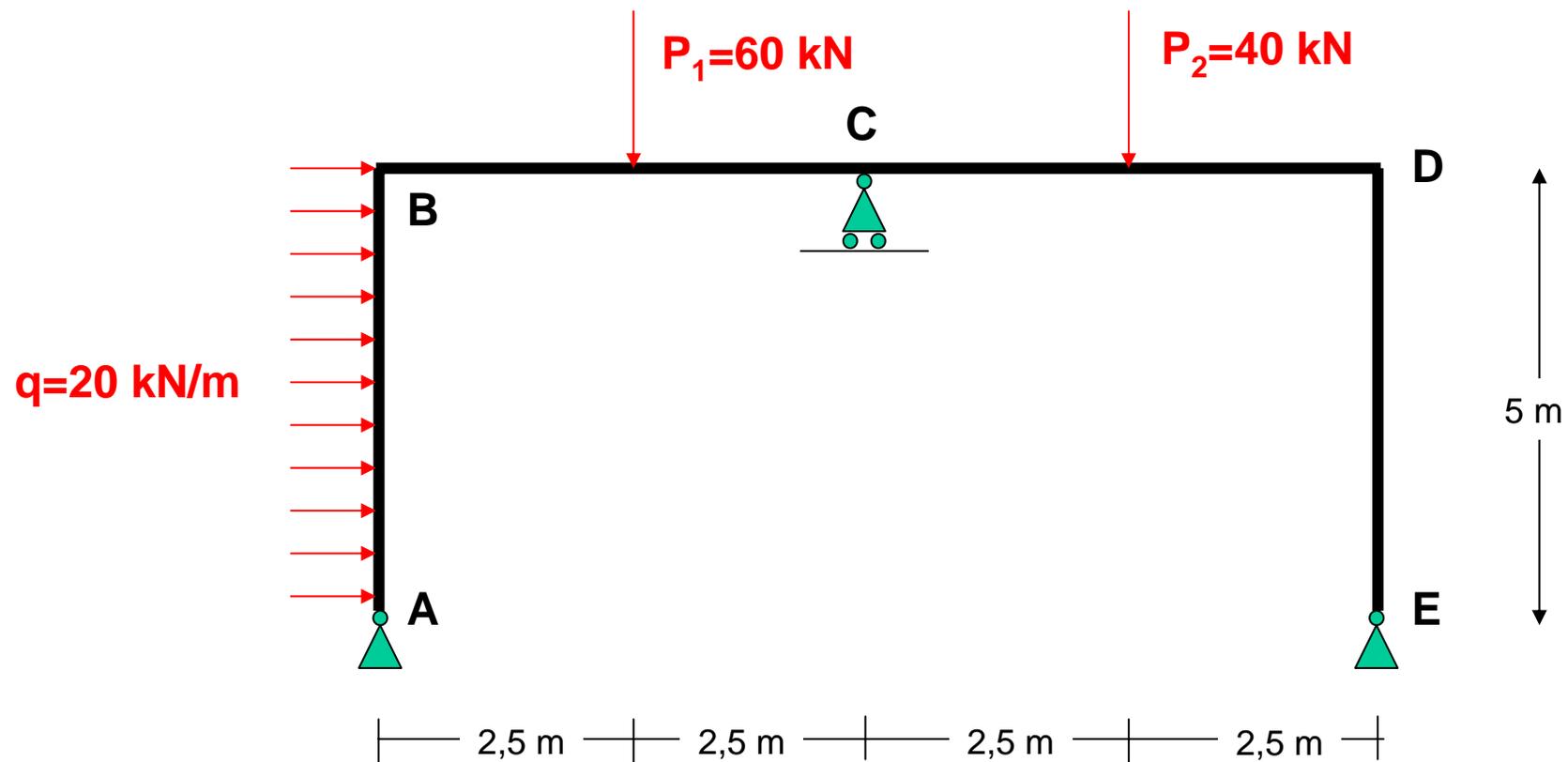
$$v_D \uparrow = 0,02625 - 0,00125 = 0,025 \text{ m}$$

El giro de D será (suma del de la sección C más el causado por la sobrecarga que actúa sobre la ménsula:

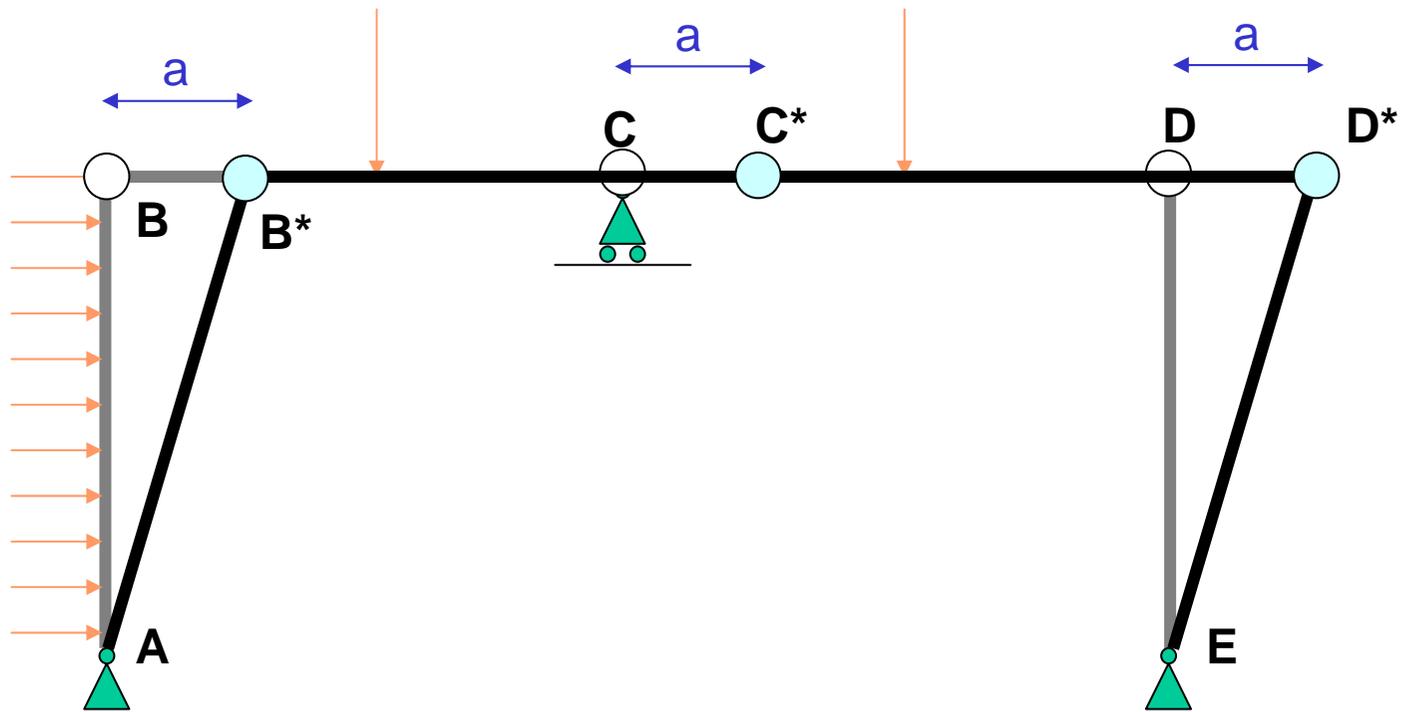
$$\theta_D (\text{antihorario}) = 0,013 - \frac{20 \cdot 2^3}{6EI} = 0,0122 \text{ rad}$$

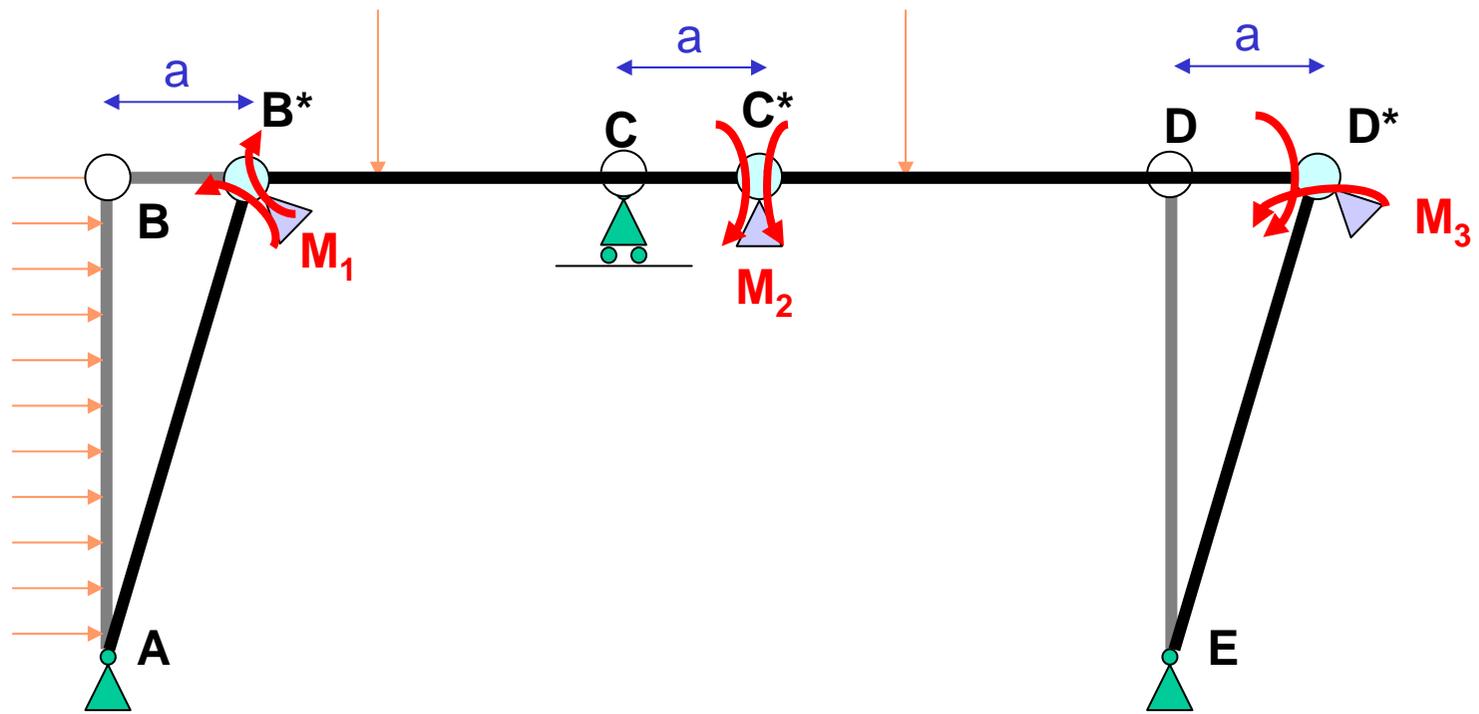
En el pórtico de la figura, todas las barras tienen la misma rigidez $EI=40000$ kN.m.
Cuando actúan las cargas indicadas, determinar:

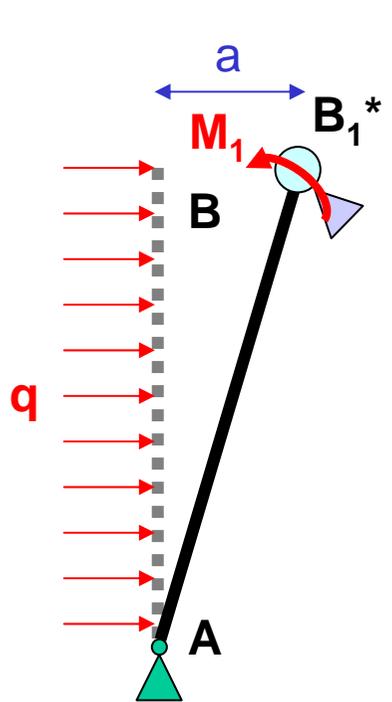
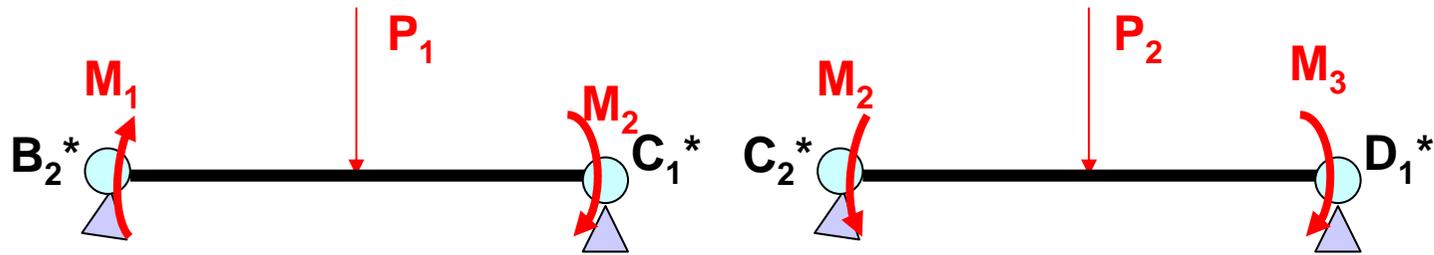
- Leyes de esfuerzos en la estructura
- Desplazamiento horizontal en C



Estructura con un grado de traslacionalidad







$$\theta_{B_1} (\text{antihorario}) = \frac{M_1 L}{3EI} + \frac{qL^3}{24EI} \left(-\frac{a}{L} \right) \quad \text{Ec.1}$$

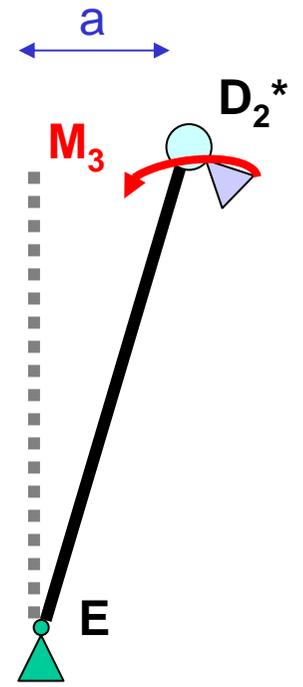
$$\theta_{B_2} (\text{antihorario}) = -\frac{M_1 L}{3EI} - \frac{P_1 L^2}{16EI} + \frac{M_2 L}{6EI}$$

$$\theta_{C_1} (\text{antihorario}) = \frac{P_1 L^2}{16EI} - \frac{M_2 L}{3EI} + \frac{M_1 L}{6EI} \quad \text{Ec.2}$$

$$\theta_{C_2} (\text{antihorario}) = \frac{M_2 L}{3EI} - \frac{P_2 L^2}{16EI} + \frac{M_3 L}{6EI}$$

$$\theta_{D_1} (\text{antihorario}) = -\frac{M_3 L}{3EI} + \frac{P_2 L^2}{16EI} - \frac{M_2 L}{6EI} \quad \text{Ec.3}$$

$$\theta_{D_2} (\text{antihorario}) = \frac{M_3 L}{3EI} \left(-\frac{a}{L} \right)$$



$$\theta_{B_1} (\text{antihorario}) = \frac{M_1 L}{3EI} + \frac{qL^3}{24EI} - \frac{a}{L} \quad \text{Ec.1}$$

$$\theta_{B_2} (\text{antihorario}) = -\frac{M_1 L}{3EI} - \frac{P_1 L^2}{16EI} + \frac{M_2 L}{6EI}$$

$$\theta_{C_1} (\text{antihorario}) = \frac{P_1 L^2}{16EI} - \frac{M_2 L}{3EI} + \frac{M_1 L}{6EI} \quad \text{Ec.2}$$

$$\theta_{C_2} (\text{antihorario}) = \frac{M_2 L}{3EI} - \frac{P_2 L^2}{16EI} + \frac{M_3 L}{6EI}$$

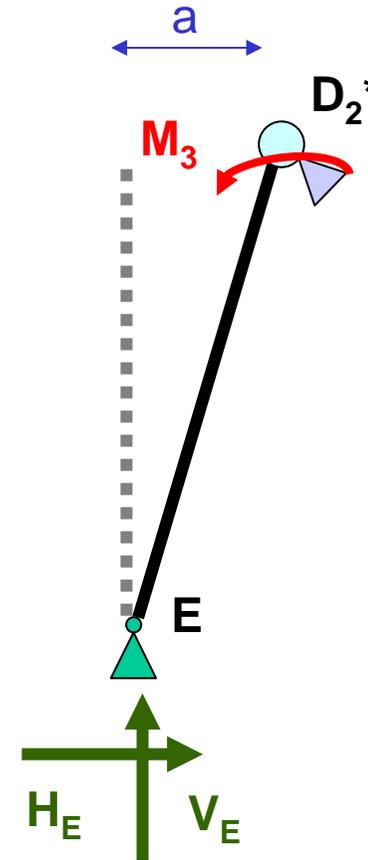
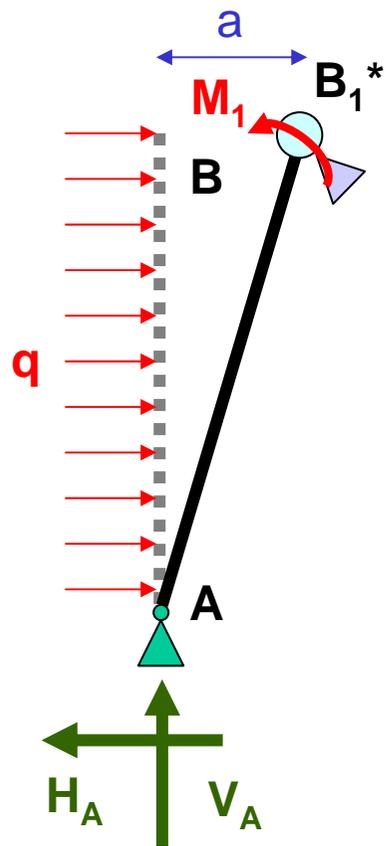
$$\theta_{D_1} (\text{antihorario}) = -\frac{M_3 L}{3EI} + \frac{P_2 L^2}{16EI} - \frac{M_2 L}{6EI} \quad \text{Ec.3}$$

$$\theta_{D_2} (\text{antihorario}) = \frac{M_3 L}{3EI} - \frac{a}{L}$$

¡3 ecuaciones con cuatro incógnitas!

M_1 M_2 M_3 a

¡La ecuación que falta la obtenemos aplicando las ecuaciones de la estática!



Suma de momentos en B_1^* igual a cero:

$$M_1 + \frac{qL^2}{2} - H_A L = 0$$

Suma de momentos en D_2^* igual a cero:

$$M_3 + H_E L = 0$$

Junto con:

$$H_E - H_A = -qL$$



$$M_1 + \frac{qL^2}{2} - qL^2 + M_3 = 0$$

Ec. 4

Resolviendo el sistema de las cuatro ecuaciones con las 4 incógnitas:

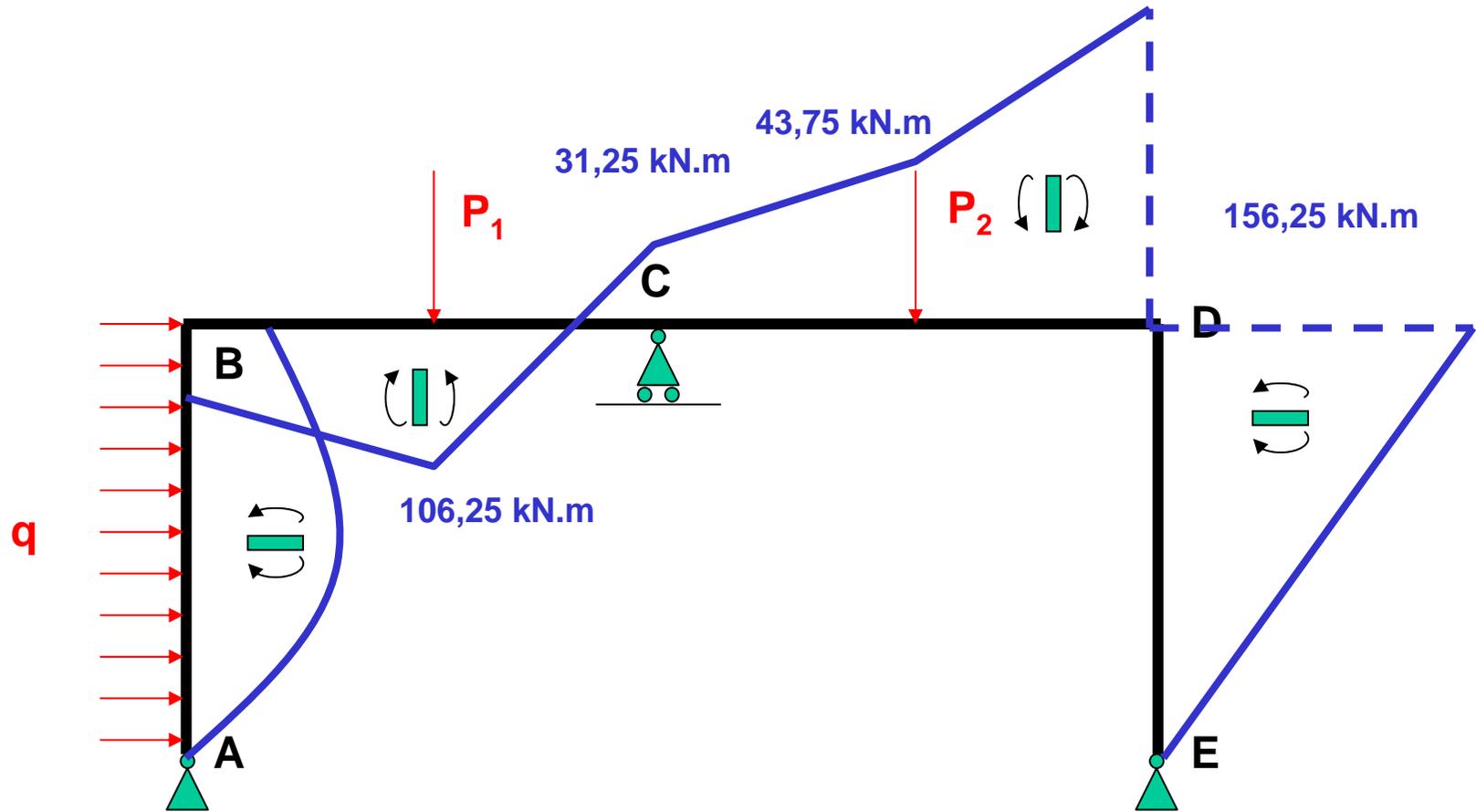
$$M_1 = 93,75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = 31,25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

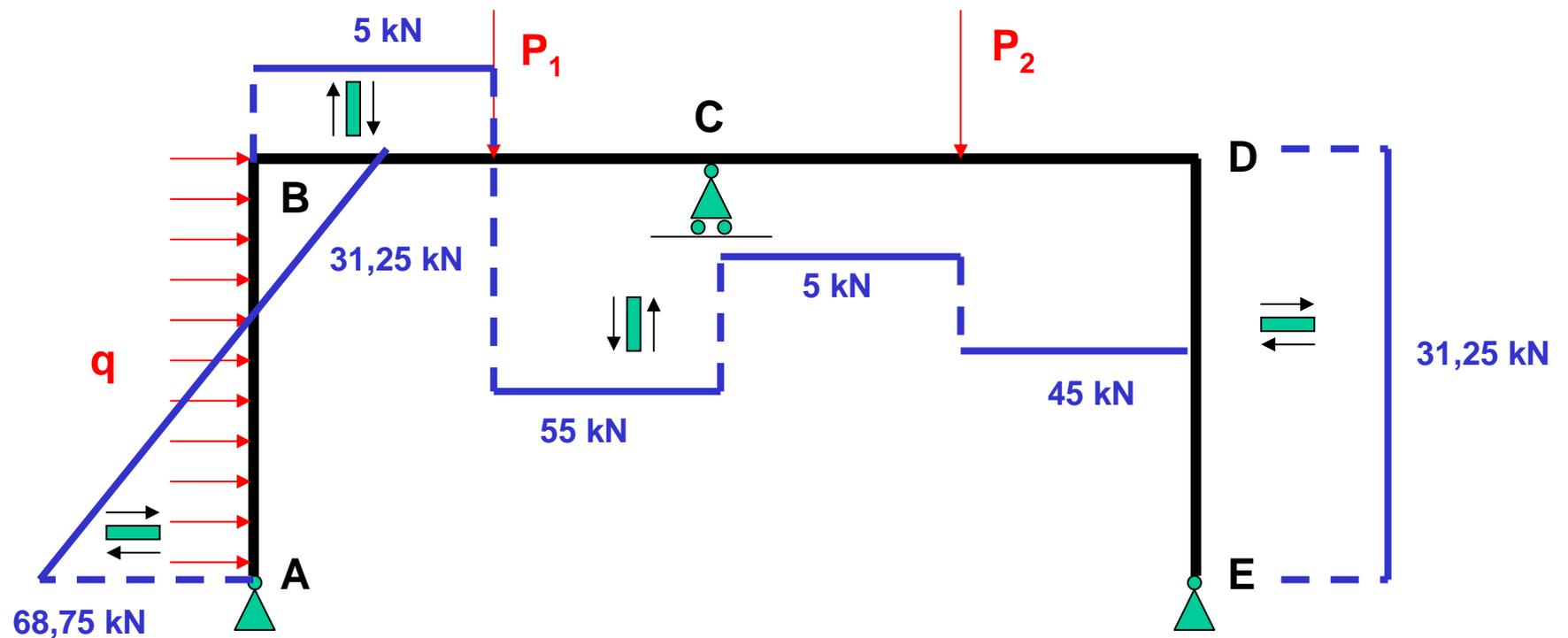
$$M_3 = 156,25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$a = 0,061 \text{ m}$$

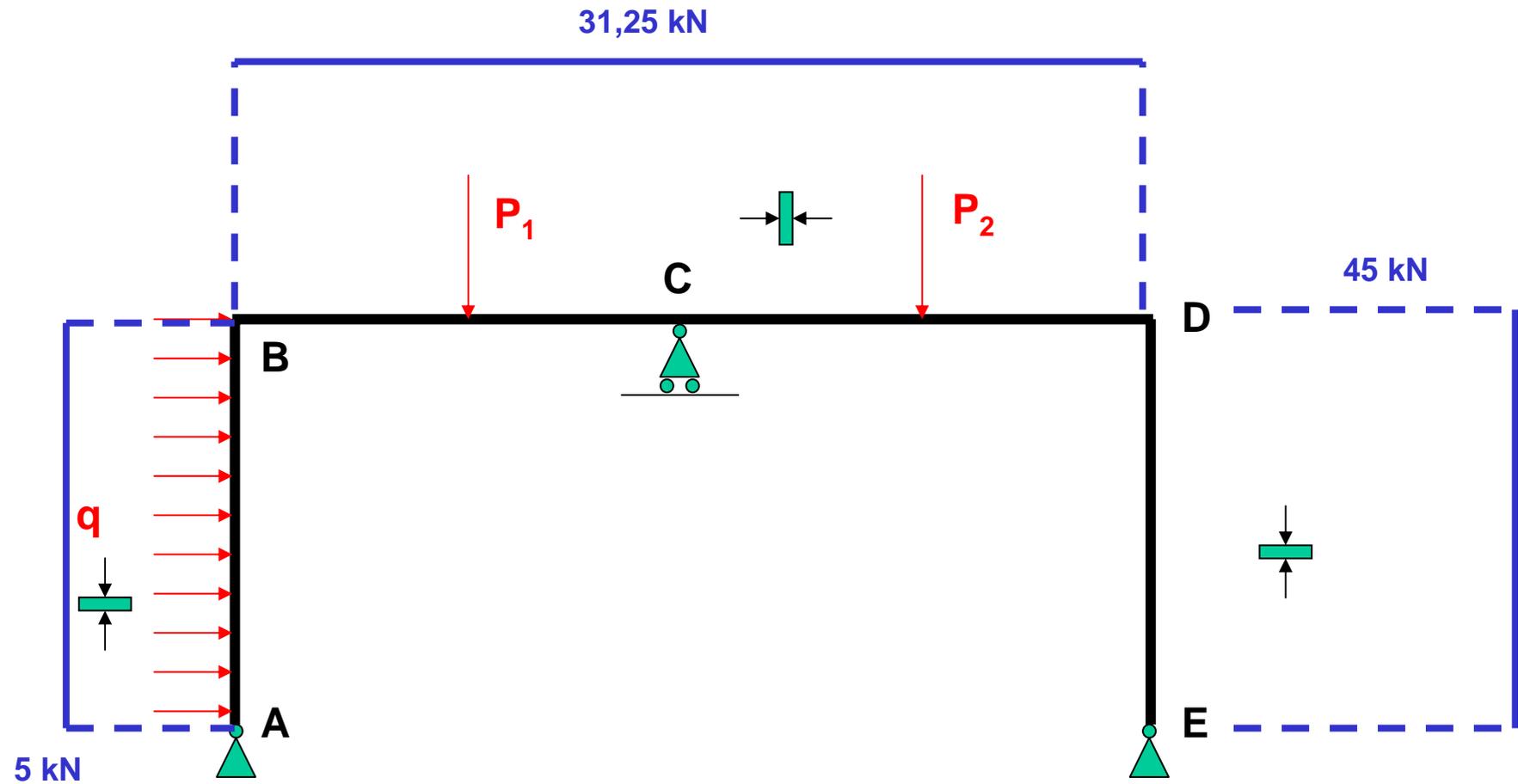
Ley de momentos flectores



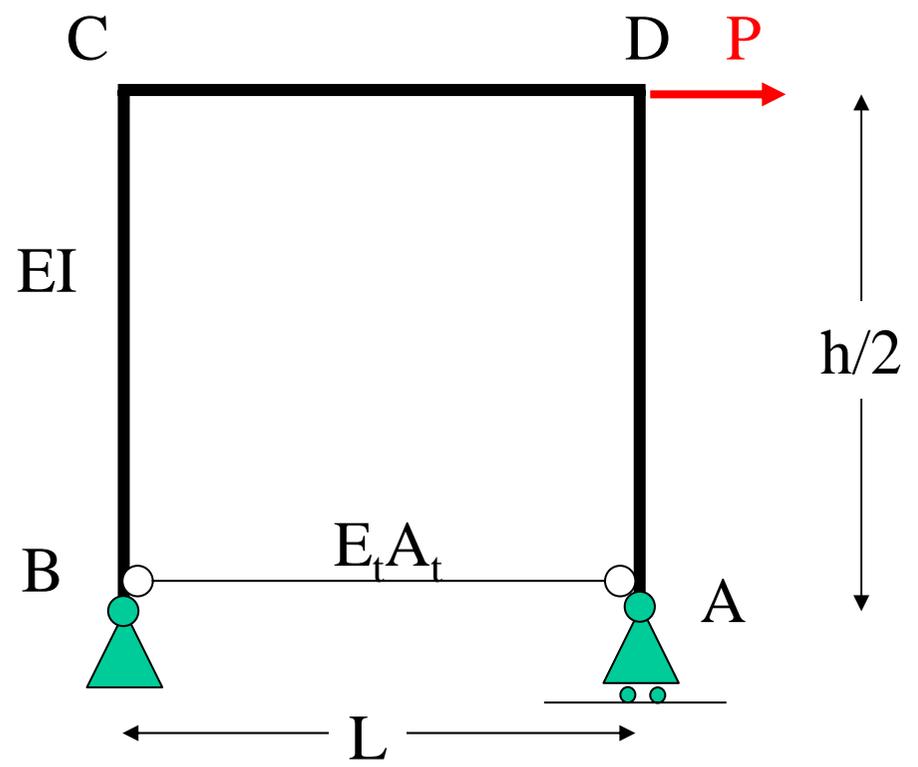
Ley de esfuerzos cortantes

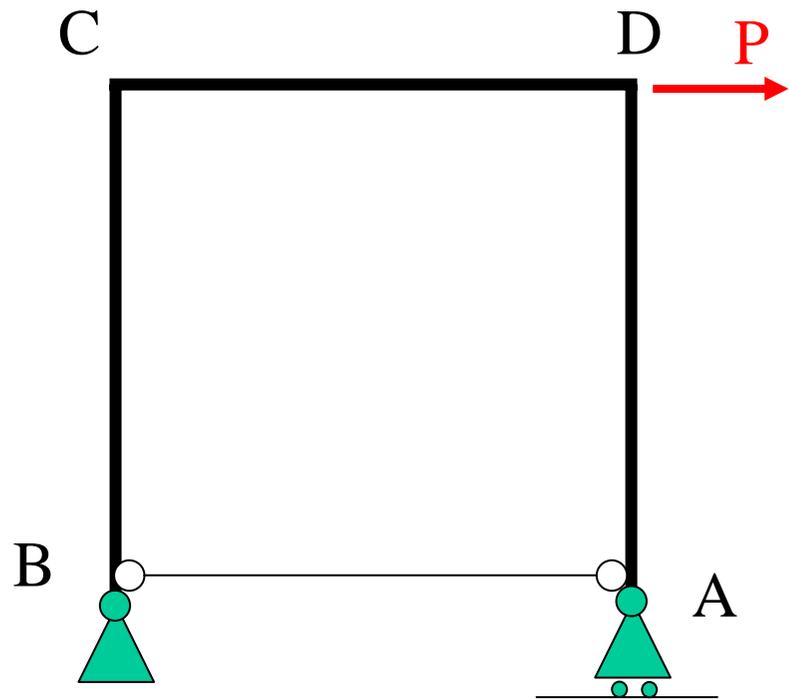


Ley de esfuerzos axiales

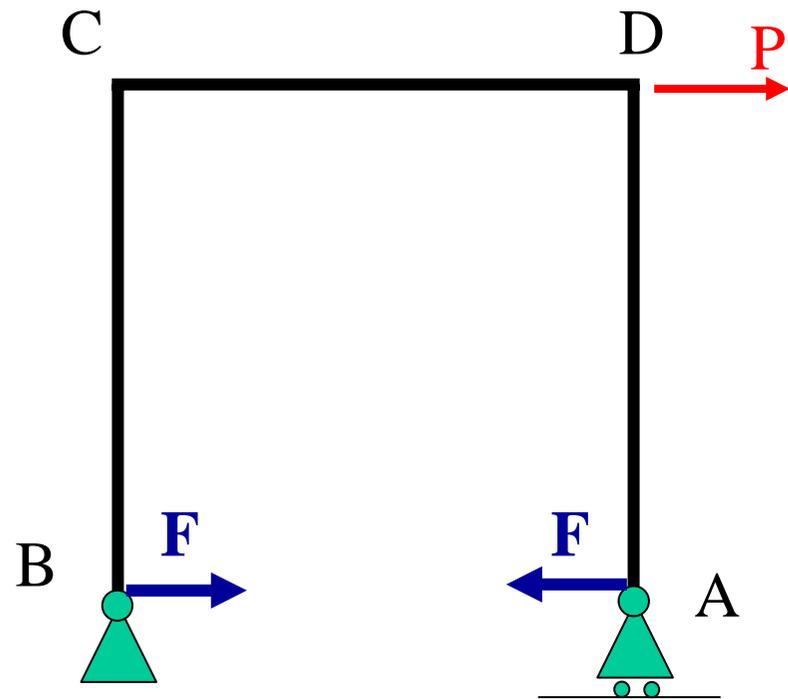


ESTRUCTURAS RETICULADAS ATIRANTADAS

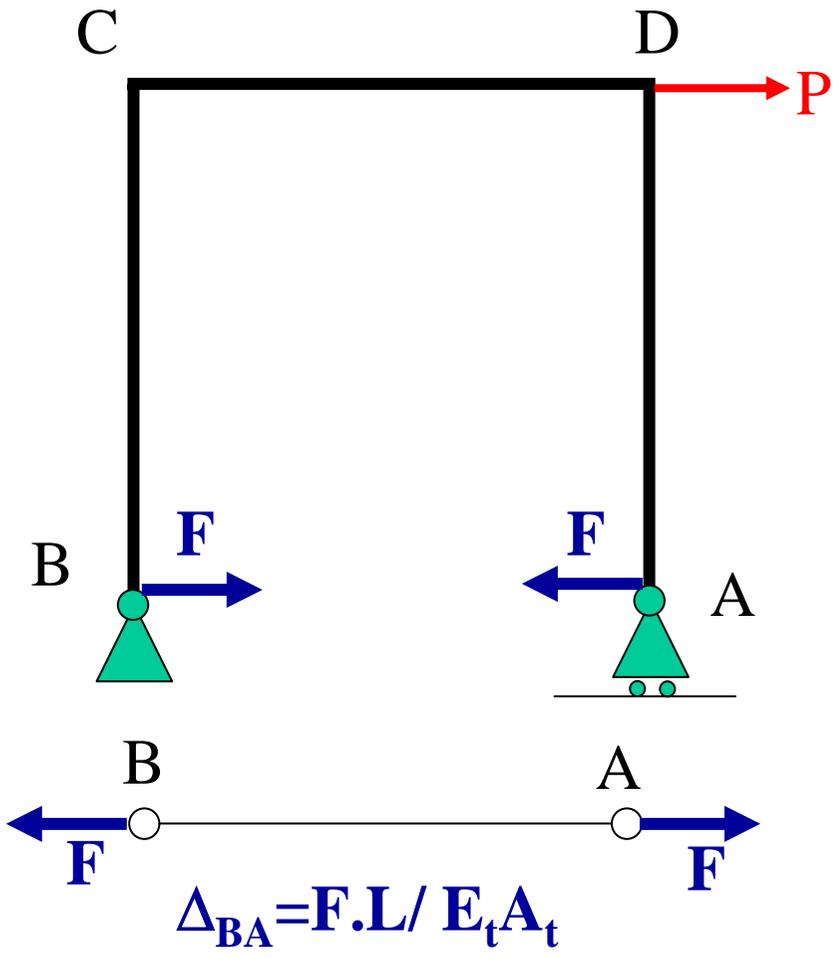




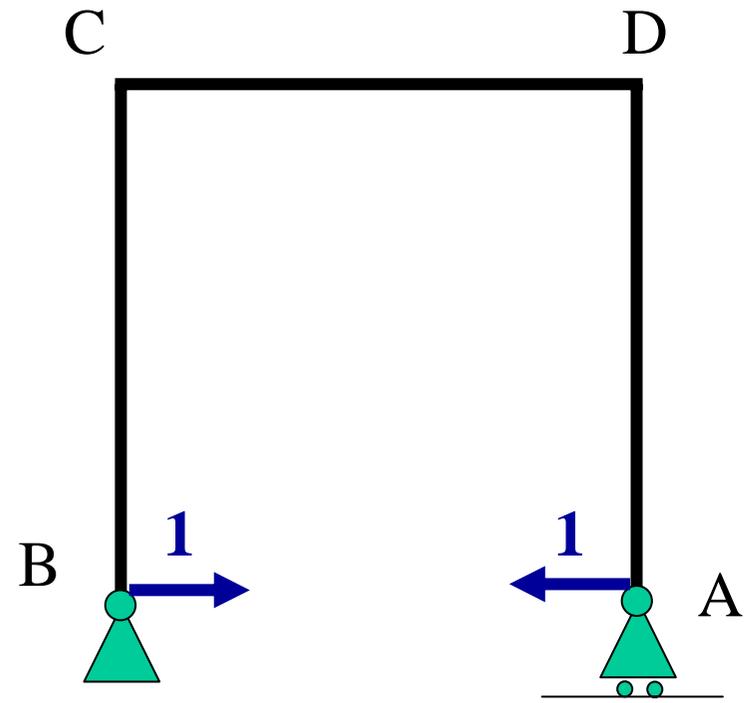
=



$$\Delta_{BA} = F \cdot L / E_t A_t$$



ESTADO REAL



ESTADO FICTICIO

Teorema de reciprocidad:

$$-F \cdot \vec{u}_A^{ficticio} + P \cdot \vec{u}_D^{ficticio} = -1 \cdot \vec{u}_A^{real}$$

$$-F \cdot \vec{u}_A^{\text{ficticio}} + P \cdot \vec{u}_D^{\text{ficticio}} = -1 \cdot \vec{u}_A^{\text{real}}$$

$$\Delta_{BA} = \vec{u}_A^{\text{real}} - \vec{u}_B^{\text{real}} = \vec{u}_A^{\text{real}} = F \cdot L / E_t A_t$$

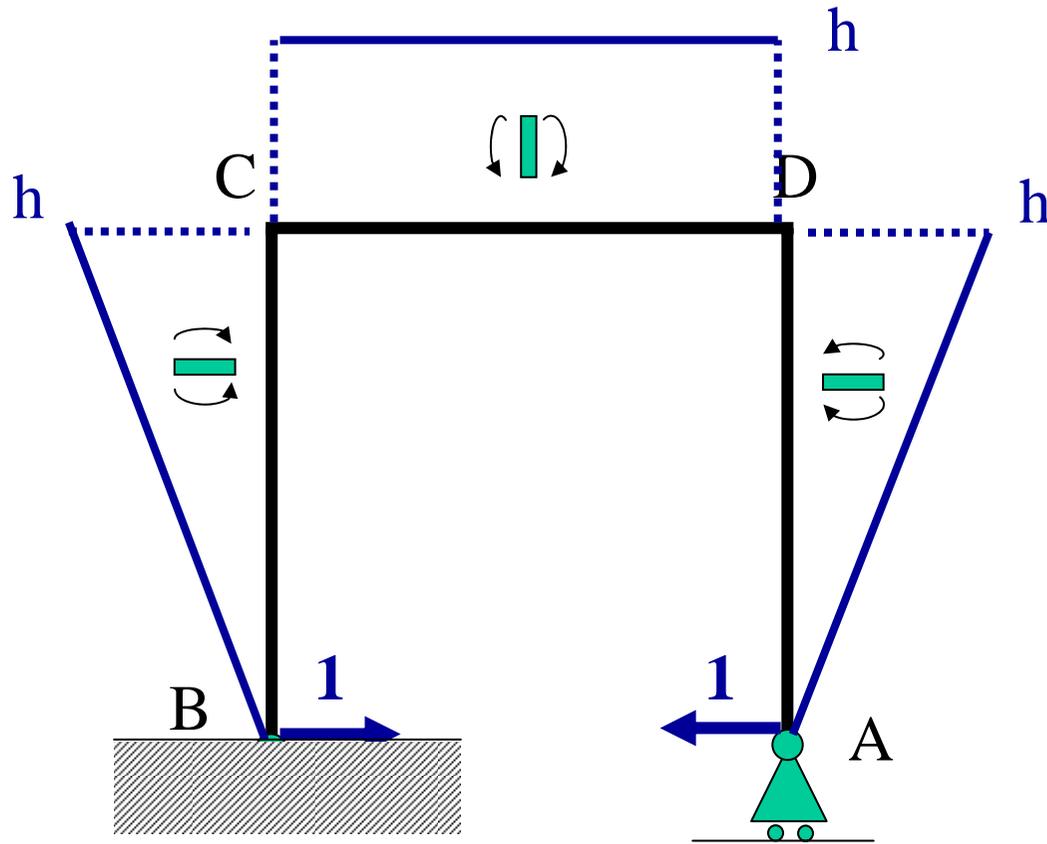


$$\vec{u}_A^{\text{real}} = F \cdot L / E_t A_t$$

$$-F \cdot \vec{u}_A^{\text{ficticio}} + P \cdot \vec{u}_D^{\text{ficticio}} = -\frac{F \cdot L}{E_t A_t}$$

$$F = \frac{P \cdot \vec{u}_D^{\text{ficticio}}}{\vec{u}_A^{\text{ficticio}} - \frac{L}{E_t A_t}}$$

¡Sólo es preciso resolver el estado ficticio para obtener la fuerza en el tirante!

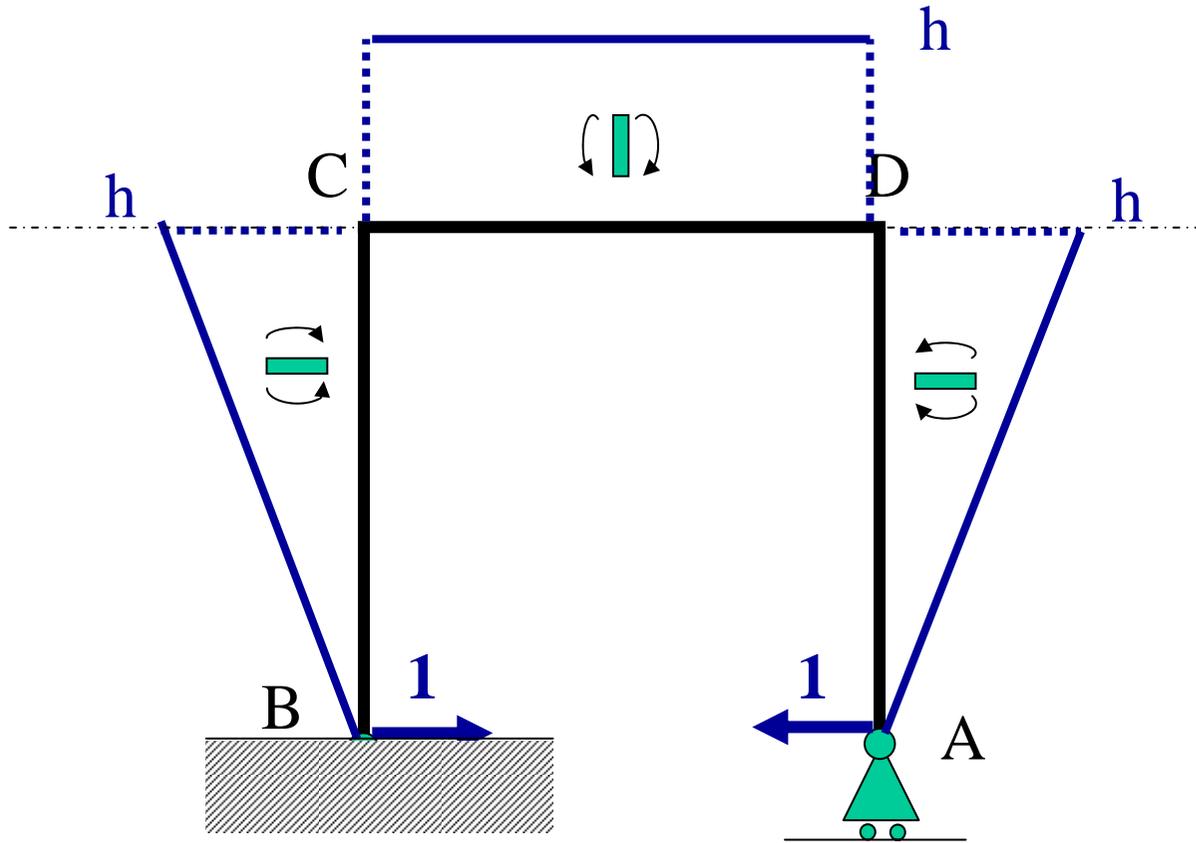


ESTADO FICTICIO

$$\vec{u}_A^{ficticio} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} h \cdot h \cdot \frac{2}{3} h + L \cdot h \cdot h + \frac{1}{2} h \cdot h \cdot \frac{2}{3} h \right] = -\frac{h^2}{EI} \left[\frac{2h}{3} + L \right]$$

$$v_A^{ficticio} \downarrow = \frac{1}{EI} \left[L \cdot h \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{2} h \cdot h \cdot L \right] = \frac{Lh}{2EI} (L + h)$$

$$\theta_B^{ficticio} \cdot L = \frac{Lh}{2EI} (L + h) \Rightarrow \theta_B^{ficticio} = \frac{h}{2EI} (L + h)$$



ESTADO FICTICIO

$$\vec{u}_D^{ficticio} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} h \cdot h \cdot \frac{1}{3} h \right] = \frac{h^3}{6EI}$$

Pero como B gira:

$$\theta_B^{ficticio} = \frac{h}{2EI} (L + h)$$

$$\vec{u}_D^{ficticio} = \frac{h^3}{6EI} - \frac{h^2}{2EI} (L + h) = -\frac{h^2}{EI} \left(\frac{h}{3} + \frac{L}{2} \right)$$

$$F = \frac{P \cdot \vec{u}_D^{\text{ficticio}}}{\vec{u}_A^{\text{ficticio}} - \frac{L}{E_t A_t}}$$

$$\vec{u}_A^{\text{ficticio}} = -\frac{h^2}{EI} \left[\frac{2h}{3} + L \right]$$

$$\vec{u}_D^{\text{ficticio}} = -\frac{h^2}{EI} \left(\frac{h}{3} + \frac{L}{2} \right)$$

$$F = \frac{-P \cdot \frac{h^2}{EI} \left(\frac{h}{3} + \frac{L}{2} \right)}{-\frac{h^2}{EI} \left[\frac{2h}{3} + L \right] - \frac{L}{E_t A_t}}$$

$F > 0$, luego el tirante trabaja a tracción, como habíamos supuesto