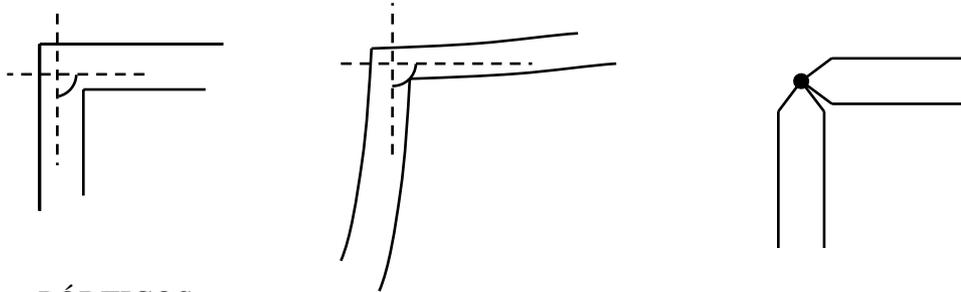


6. ESTRUCTURAS RETICULADAS PLANAS.

Se califica a una estructura plana de barras de **reticulada** cuando por estar las barras que confluyen en un mismo nodo empotradas entre sí formando un ángulo constructivo invariable, los movimientos de los nodos (desplazamientos y giros) pueden dar lugar a la aparición de **momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiales** en las barras. En aquellas barras que se articulen en un nodo, el posible giro de éste no da lugar a la aparición de momentos flectores en esas barras.

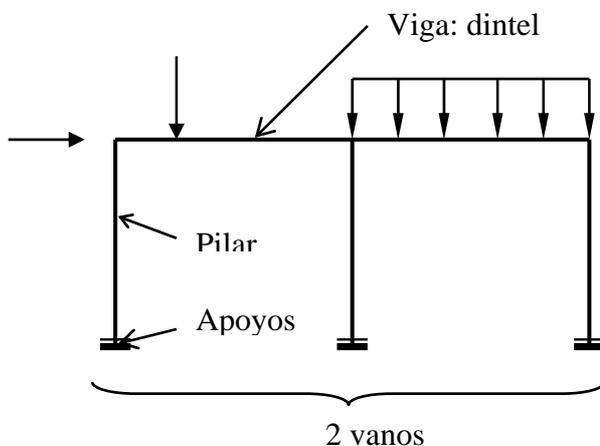


6.1 PÓRTICOS

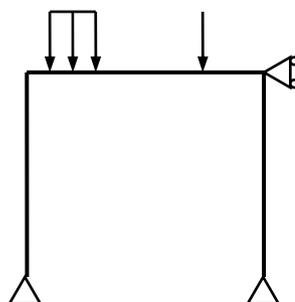
6.1.1 Introducción

Conceptos.-

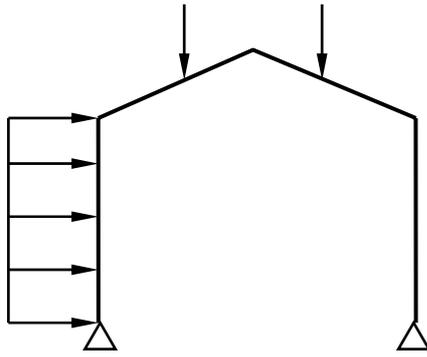
Pórtico es un sistema estructural de una sola planta con uno o varios vanos y constituido por barras rectas (vigas y pilares)



Pórtico doble empotrado
Traslacional
¡Hiperestático!



Pórtico simple Articulado
Intraslacional
¡Hiperestático!

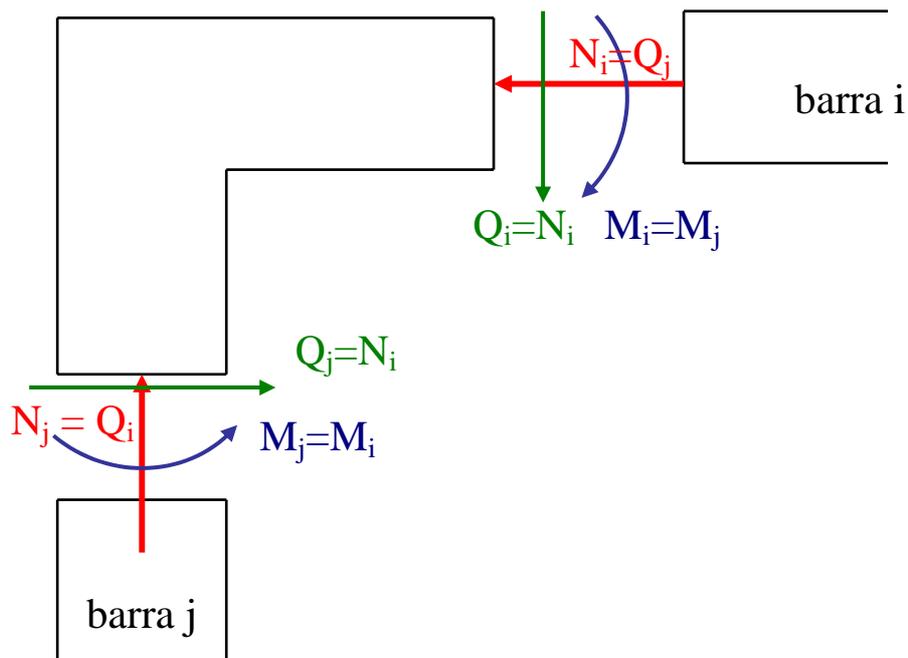


Pórtico simple
Articulado con vigas
inclinadas
Traslacional

Hipótesis de cálculo.-

- Los desplazamientos son muy pequeños respecto a las dimensiones de las barras del pórtico (la geometría no cambia).
- El acortamiento de las barras debido a las flexiones es un infinitésimo de 2º orden comparado con otras deformaciones
- Es aplicable el principio de superposición porque bajo cualquiera de las cargas el comportamiento es elástico-lineal.
- El efecto del esfuerzo cortante en los desplazamientos y giros es despreciable.
- El efecto de la deformación axial es despreciable para los pórticos que, por definición, tienen un solo nivel.

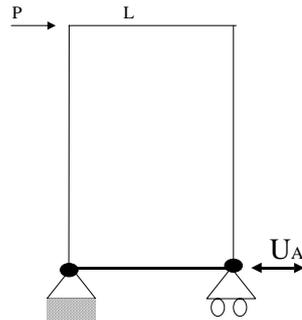
Equilibrio de nudos.-



6.1.2 Pórticos isostáticos

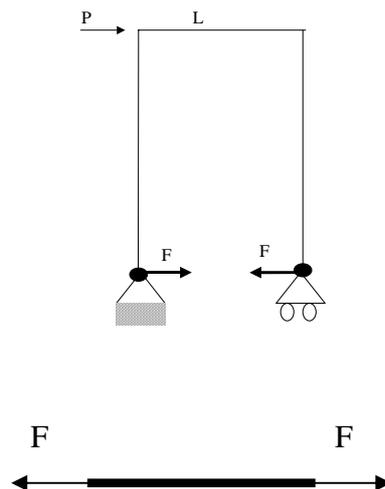
6.1.2.1 Pórticos biapoyados atirantados.-

La figura representa una estructura tipo pórtico en la cual los nodos de los apoyos están, a su vez, unidos entre sí mediante un tirante, elemento que, por definición, solo trabaja a tracción. Considérese el caso de una estructura como la mostrada en la figura:

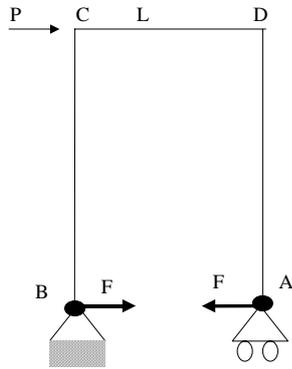


Para analizar esta estructura, se retira de ella el tirante sustituyéndolo por su efecto sobre la misma: es decir, por dos fuerzas F iguales y opuestas. La condición obvia de compatibilidad es que el movimiento relativo entre los nodos de apoyo ha de ser igual al alargamiento del tirante sometido a las fuerzas F de tracción, alargamiento U_A que está relacionado con la fuerza actuante mediante la expresión

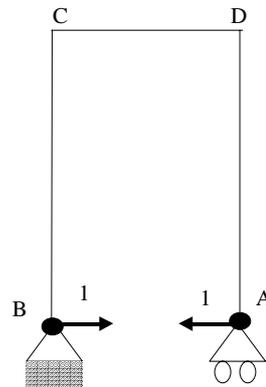
$$F = \frac{E * \Omega}{L} U_A$$



Para aplicar el Teorema de Reciprocidad se consideran dos estados: uno el estado real de cargas y otro un estado, denominado ficticio, en el que las cargas son dos fuerzas unidad, iguales y opuestas, actuando en los puntos A y B, tal como se indica en la figura.



ESTADO I (Real)



ESTADO II (Ficticio)

Por aplicación del Teorema de Reciprocidad

$$\mathbf{P} \cdot \overrightarrow{U_C}^{\text{II}} + \mathbf{F} \cdot \overleftarrow{U_A}^{\text{II}} = 1 \cdot \overleftarrow{U_A}^{\text{I}}$$

La condición de compatibilidad que antes se dijo, suponiendo que F es de tracción, resulta ser:

$$U_A^{\text{I}} = -\frac{L}{E\Omega} F$$

y por tanto:

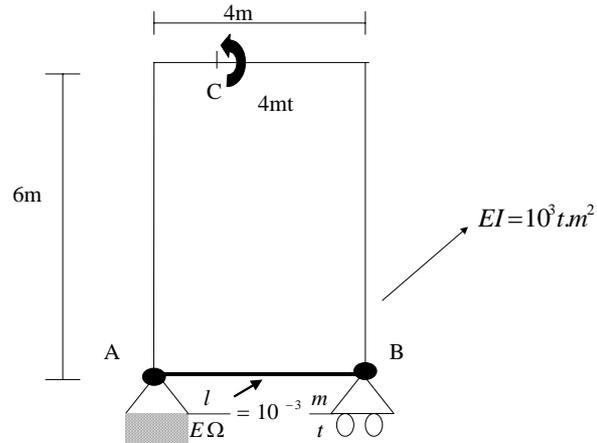
$$F \left[U_A^{\text{II}} + \frac{L}{E\Omega} F \right] = -Pu_c^{\text{II}}$$

con lo cual

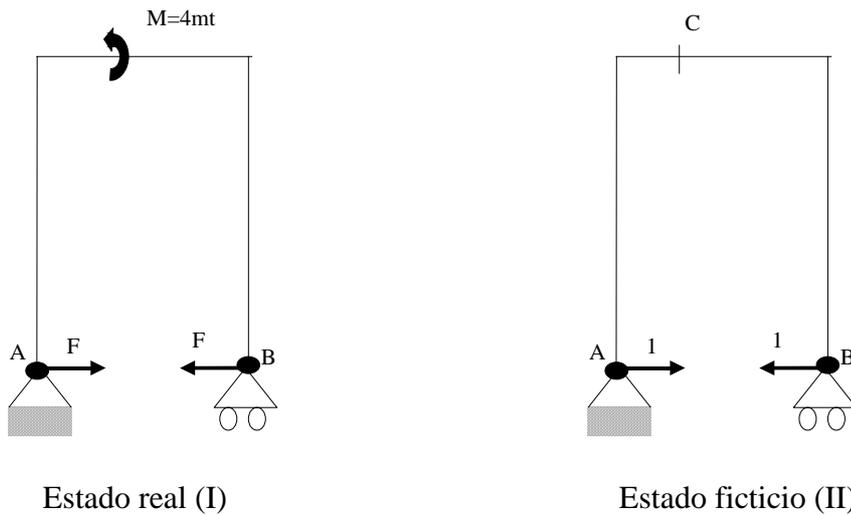
$$F = -\frac{Pu_c^{\text{II}}}{U_A^{\text{II}} + \frac{L}{E\Omega} F}$$

Nótese que esta última ecuación conduce a la conclusión de que, para resolver el problema, sólo es necesario resolver el estado II.

EJEMPLO.- En la estructura de la figura calcular el esfuerzo en el tirante AB



Si siguiendo la técnica descrita se desglosa la estructura en la superposición de dos estados



Aplicando el teorema de reciprocidad

$$M\theta_C^{II} + FU_B^{II} = U_B^I$$

y como:

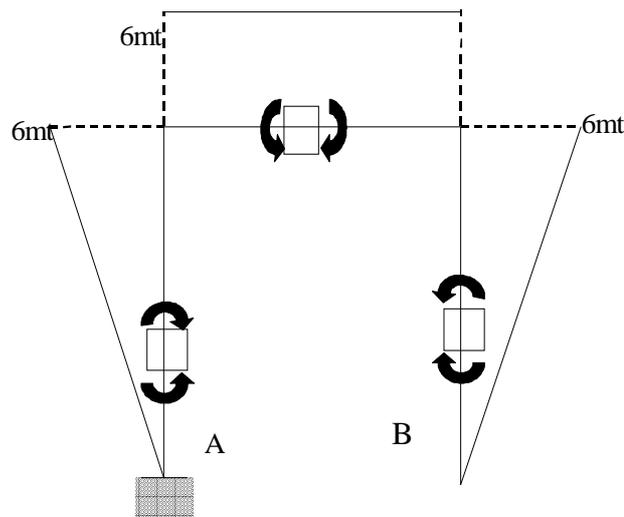
$$U_B^I = -\frac{L}{E\Omega}F$$

resulta

$$F = - \frac{M \theta_c''}{U_B'' + \frac{L}{E \Omega}}$$

Resolución del ESTADO II.-

Las reacciones en A y B son nulas y la ley de momentos flectores se muestra en la figura.



Si la estructura estuviera empotrada en A.

$$\overleftarrow{U_B''} = \frac{1}{EI} \left[2 \frac{1}{2} * 6 * 6 * \frac{2}{3} * 6 + 4 * 6 * 6 \right] = \frac{288}{10^3} m$$

$$\downarrow V_B'' = \frac{1}{EI} \left[4 * 6 * 2 + \frac{1}{2} * 6 * 6 * 4 \right] = \frac{120}{10^3} m$$

El giro en A debe ser tal que:

$$\theta_A * 4 = \frac{120}{1000} \Rightarrow \theta_A = 3 * 10^{-2}$$

Al girar alrededor de A, el desplazamiento horizontal de B no cambia:

$$U_B'' = 288 * 10^{-3} m$$

El giro en C será:

$$\theta_c'' = \frac{1}{EI} \left[-6 * 1 - \frac{1}{2} 6 * 6 \right] + \theta_A = 6 * 10^{-3} \text{ rad}$$

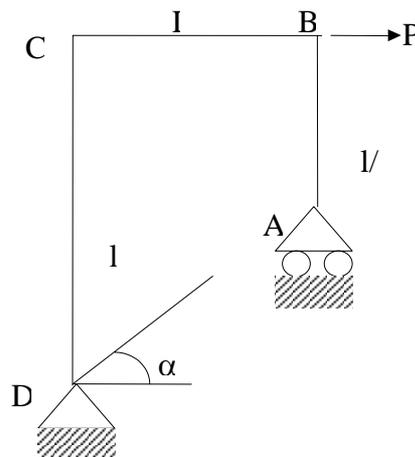
con lo cual

$$F = - \frac{M \theta_c''}{U_B'' + \frac{L}{E \Omega}} = - \frac{4 * 6 * 10^{-3}}{288 * 10^{-3} + 10^{-3}} = -0.083 \text{ t}$$

El signo negativo en esta última ecuación indicaría que el tirante trabaja a compresión, lo cual no es posible y, por tanto, no ejerce ningún tipo de influencia sobre la estructura sometida ésta al estado de cargas indicado.

6.1.2.2 Pórticos isostáticos traslacionales.-

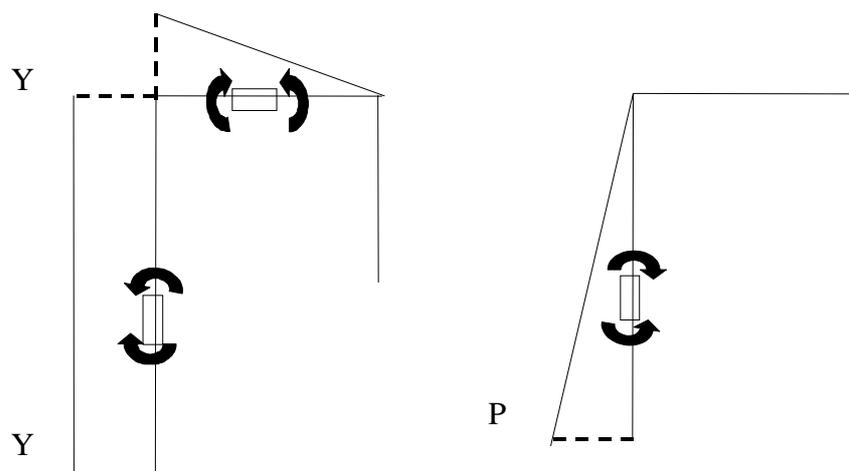
Considérese una estructura como la de la figura; dado que las coacciones externas son 3 y los grados de libertad externos son, también, 3, la estructura es isostática siendo, por ello, suficientes las ecuaciones de la Estática para obtener las reacciones. Sin embargo, dada su geometría asimétrica y las cargas que sobre ella actúan, la estructura es evidentemente traslacional.



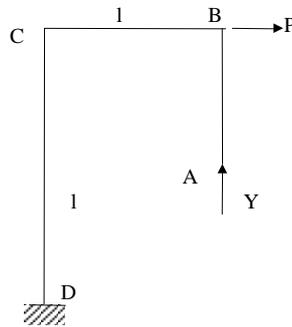
Tomando momentos en D se puede obtener la reacción vertical en A

$$0 = Y_A * L - P * L \Rightarrow Y_A = P$$

Con lo cual la ley de momentos flectores es suma algebraica de las leyes de momentos flectores debidas a P y a Y_A .



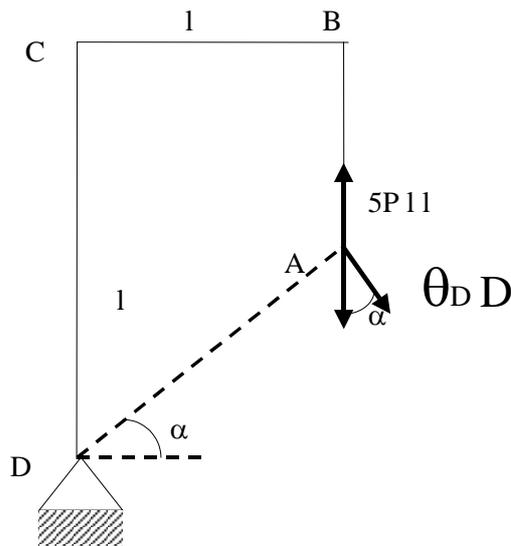
Si la estructura estuviera empotrada en D:



el movimiento vertical de A sería

$$V_A = (1/EI)[1/2PL.L.L - 1/2PL.L.2/3.L - PL.L.L] = -5P.L^3/6EI$$

¡Pero A no puede sufrir desplazamientos verticales!



$$\theta_D DA \cos\alpha = V_A$$

con lo cual

$$\theta_D = V_A / (DA \cos\alpha)$$

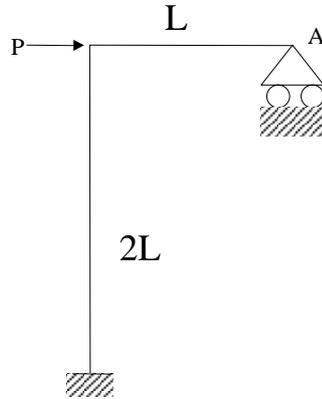
y el desplazamiento horizontal de A resulta

$$U_A = \theta_D DA \sin\alpha$$

6.1.3 Pórticos hiperestáticos

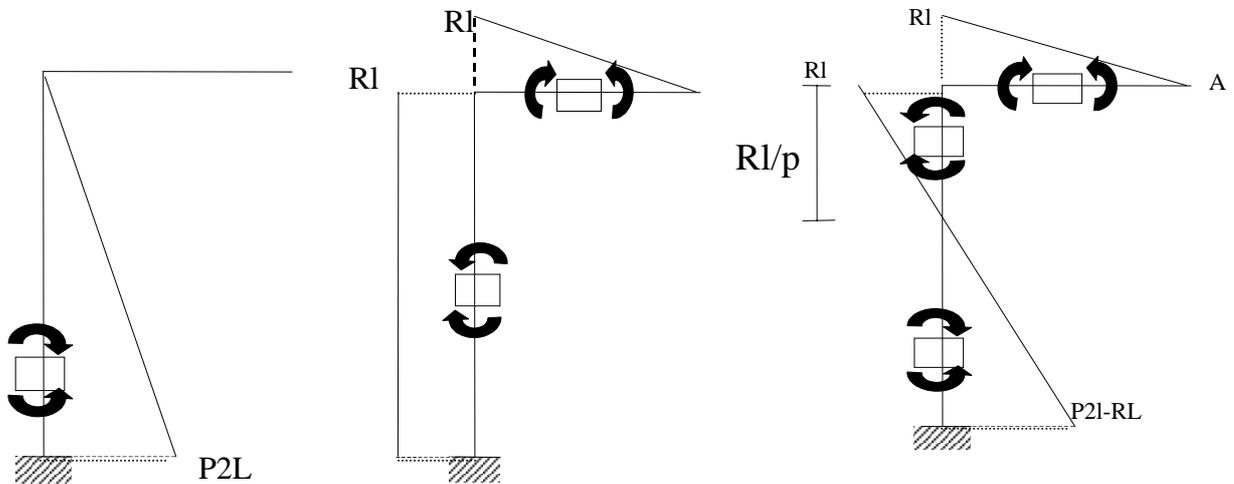
6.1.3.1 Semipórtico con extremo empotrado

Considérese la estructura de la figura que es hiperestática de grado 1 (además de realizar los cálculos apropiados para llegar a esta conclusión, puede observarse que eliminado el apoyo y, por tanto, la coacción que este impone, pasaría a ser una estructura isostática).



Precisamente esta consideración da la “pista” de la operativa a seguir. Parece oportuno sustituir el apoyo por la reacción vertical e imponer a la estructura resultante que el movimiento vertical del punto A es nulo.

Las dos cargas actuante sobre la estructura son pues la carga P inicial y la reacción R desconocida. Aplicando el principio de superposición se puede obtener la ley de momentos flectores total a partir de las leyes de momentos flectores correspondientes a estas dos cargas.



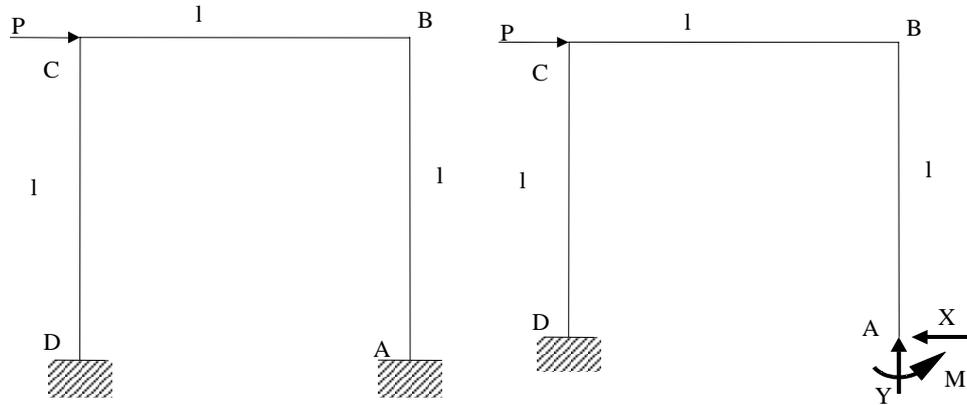
Aplicando el segundo teorema generalizado de Mohr, se obtiene el desplazamiento vertical del nudo A

$$V_A = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} RL * L * \frac{2}{3} L + RL * 2L * L - \frac{1}{2} P * 2L * 2L * L \right]$$

Imponiendo la condición $V_A=0$ se obtiene $R = 6/7 P$

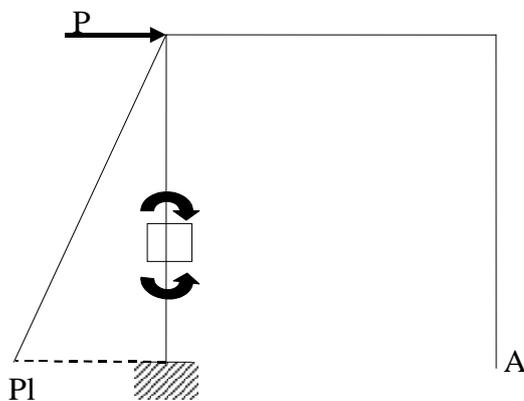
6.1.3.2 Pórtico biempotrado.-

Considérese la estructura de la figura que es hiperestática de grado 3 (además de realizar los cálculos apropiados para llegar a esta conclusión, puede observarse que eliminado el empotramiento A y, por tanto, las tres coacciones que este impone, pasaría a ser una estructura isostática).



Al igual que en el ejemplo anterior es precisamente esta consideración la que da la “pista” de la operativa a seguir. Parece oportuno sustituir el empotramiento por la acción simultánea de una reacción vertical, una horizontal y un giro e imponer a la estructura resultante que el punto A no se mueva.

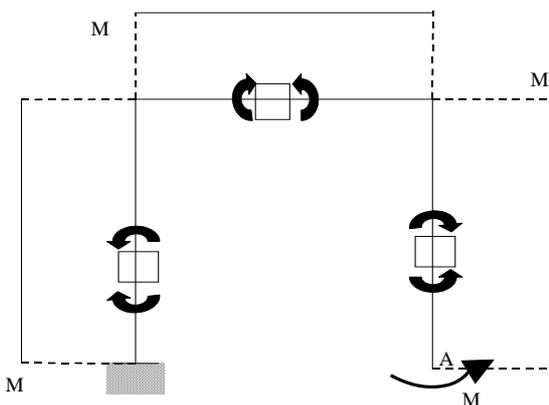
Dado que las cargas actuantes son P, X, Y y M, se va a aplicar el principio de superposición.



$$U_A = (1/EI)[-1/2(PL) \cdot L \cdot L/3] = -P \cdot L^3 / 6EI$$

$$V_A = (1/EI)[-1/2(PL) \cdot L \cdot L] = -P \cdot L^3 / 2EI$$

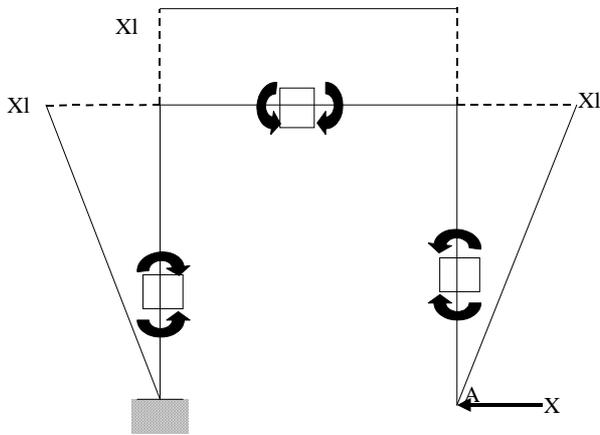
$$\theta_A = (1/EI)[1/2(PL) \cdot L] = -P \cdot L^2 / 2EI$$



$$U_A = (1/EI)[M \cdot L \cdot L/2 + M \cdot L \cdot L + M \cdot L \cdot L/2] = 2ML^2/EI$$

$$V_A = (1/EI)[M \cdot L \cdot 1/2L + M \cdot L \cdot L] = 3ML^2/2EI$$

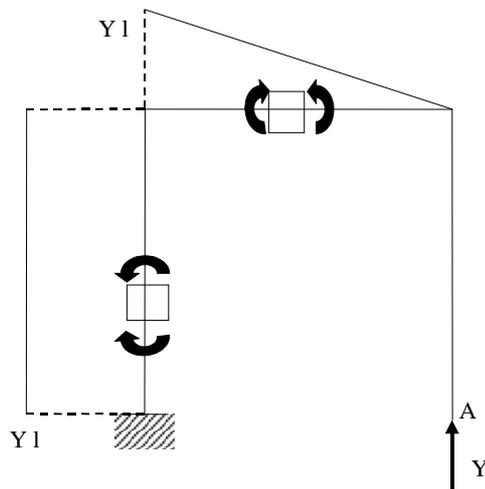
$$\theta_A = (1/EI)[-ML - ML - ML] = -3ML/EI$$



$$U_A = (1/EI)[-1/2(XL).L \cdot 2/3 L - (XL).L.L - 1/2(XL).L \cdot 2/3. L] = -5 XL^3/3EI$$

$$V_A = (1/EI)[-(XL).L \cdot L/2 - 1/2(XL).L.L] = -XL^3/EI$$

$$\theta_A = (1/EI)[-1/2XL.L - XL.L - 1/2XL.L] = -2XL^2/EI$$



$$U_A = (1/EI)[1/2(YL).L.L + (YL).L.L/2] = Y.L^3/EI$$

$$V_A = (1/EI)[1/2(YL).L \cdot 2L/3 + (YL).L.L] = 4YL^3/3EI$$

$$\theta_A = (1/EI)[1/2(YL).L - (YL).L] = -3Y.L^2/2EI$$

Sumando algebraicamente los movimientos obtenidos en los diferentes estados de carga se obtiene

$$-\frac{1}{6} \frac{pL^3}{EI} + 2 \frac{ML^2}{EI} - \frac{5}{3} \frac{XL^3}{EI} + \frac{YL^3}{EI} = 0$$

$$-\frac{1}{2} \frac{pL^3}{EI} + \frac{3}{2} \frac{ML^2}{EI} - \frac{XL^3}{EI} + \frac{4YL^3}{3EI} = 0$$

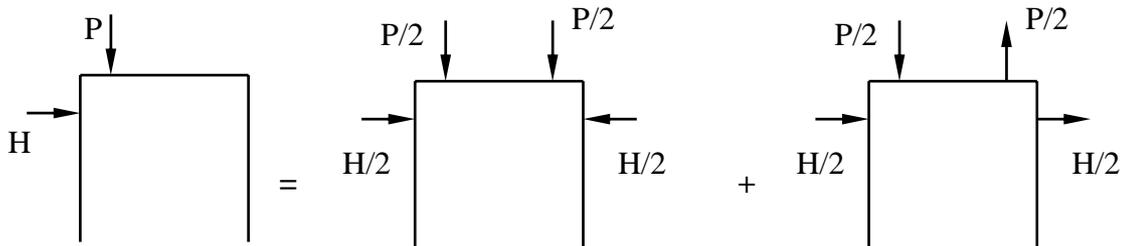
$$\frac{pL^2}{2EI} - \frac{3ML}{EI} + \frac{2XL^2}{EI} - \frac{3YL^2}{2EI} = 0$$

y resolviendo este sistema se obtienen X, Y y M.

6.1.3 Pórticos simples de geometría simétrica.

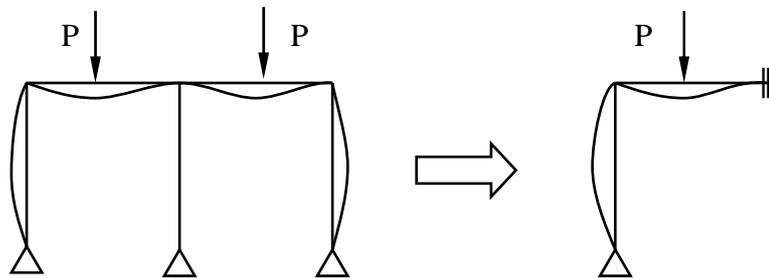
6.1.3.1 Planteamiento general

- Bajo cargas simétricas no sufren desplazamientos horizontales.
- Si está sometido a una carga no simétrica puede desglosarse en la superposición de un sistema simétrico y uno antisimétrico.



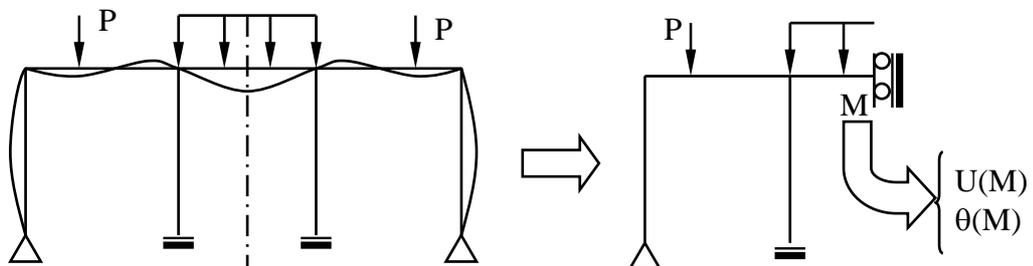
En el caso de cargas simétricas...

- Si el número de vanos es par



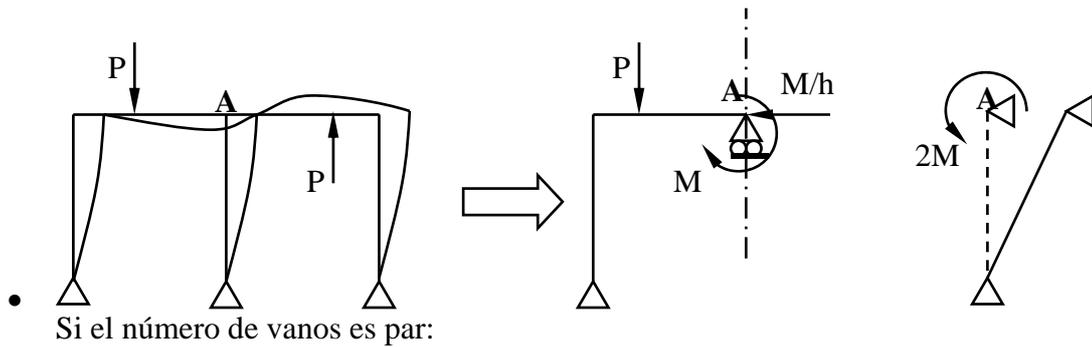
El nudo situado en el eje de simetría puede considerarse empotrado, siendo suficiente estudiar la parte de pórtico a un lado del eje de simetría.

- Si el número de vanos es impar

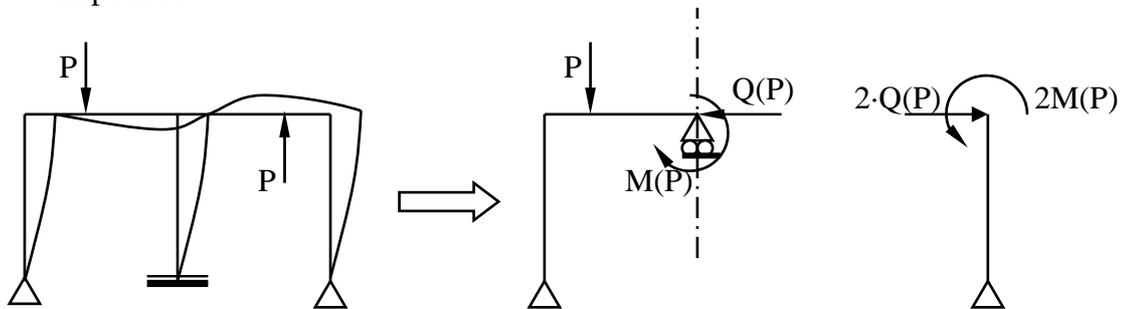


Se estudia solamente la parte de pórtico situado a un lado del eje de simetría, atribuyendo a los puntos de la estructura que están en el eje giros y desplazamientos horizontales nulos.

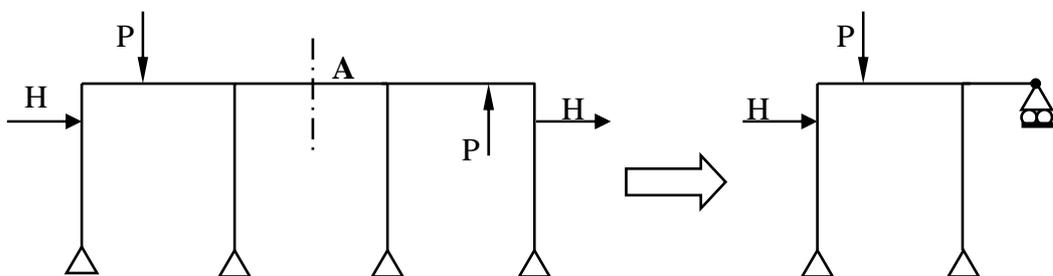
En el caso de cargas antisimétricas...



se estudia solamente una mitad del pórtico, impidiendo al punto A el desplazamiento vertical y aplicando en este punto un momento M y una fuerza M/h de modo que el movimiento de A sea igual al que tiene A como extremo superior del pilar central sometido a un momento $2M$; si el pilar central está empotrado:



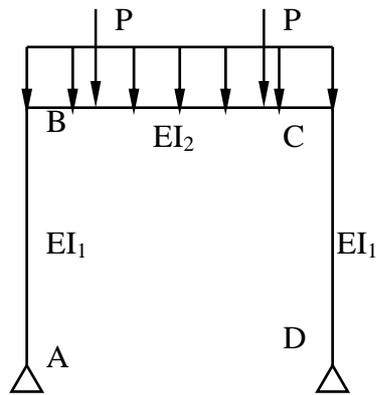
- Si el número de vanos es impar:



el momento flector en el punto A es nulo, pudiéndose suponer una articulación.

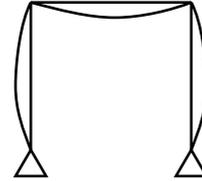
6.1.3.2 Métodos de cálculo de pórticos simples con pilares articulados

Caso de carga simétrica.-

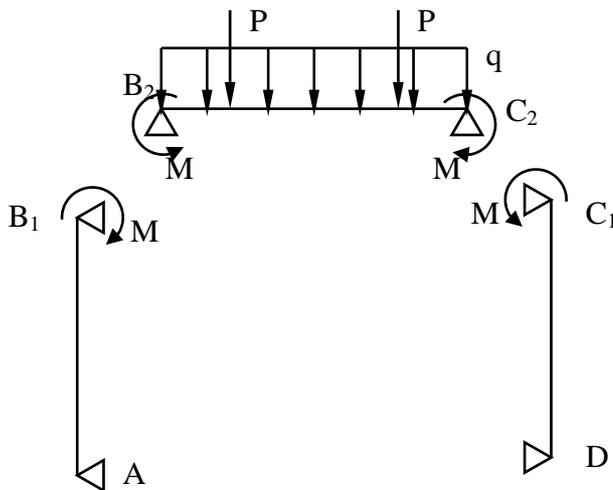


- Pórtico intraslacional, simétrico e hiperestático.

Deformada a estima:



- Un método sencillo de cálculo consiste en descomponer el pórtico en elementos y compatibilizar los giros de los nudos:

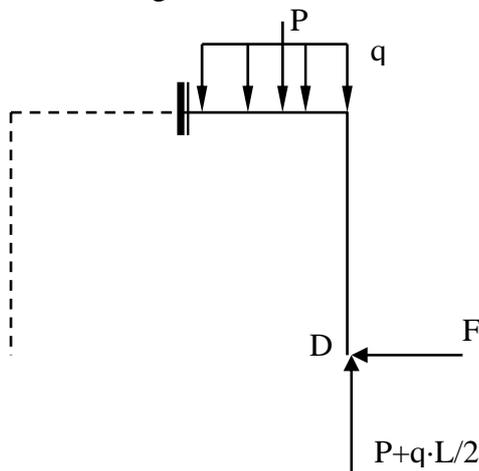


$$\theta_{B1}(M) = \theta_{B2}(M, P, q)$$

(Teorema de Mohr)

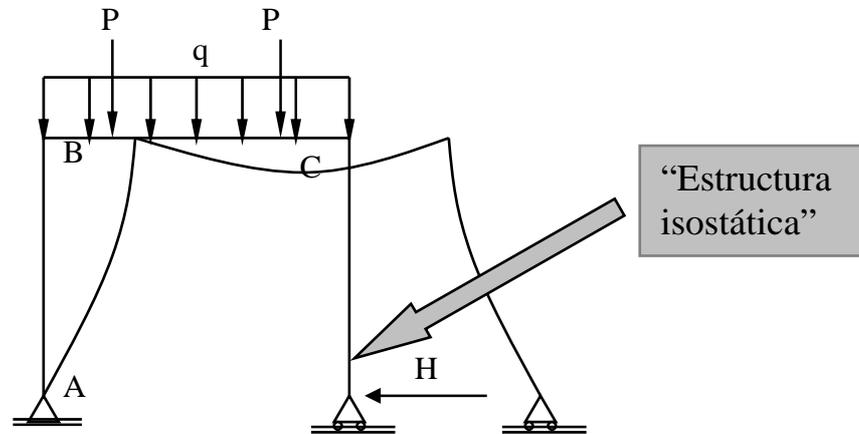
$$\rightarrow M \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{esfuerzos} \\ \text{giros} \\ \dots \end{array} \right.$$

- Un método alternativo de cálculo se basa en considerar que el punto medio del dintel BC no gira:

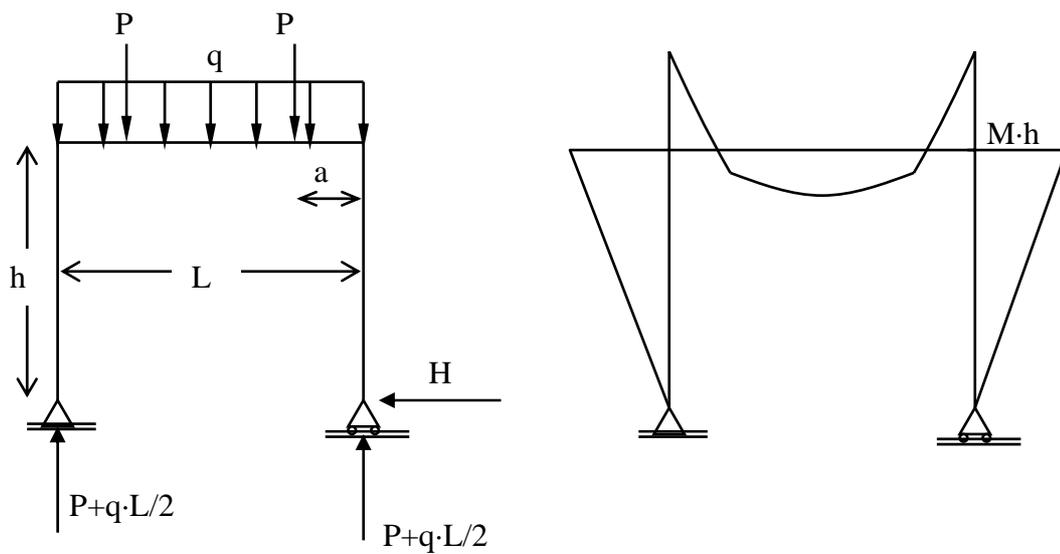


Condición = desplazamiento horizontal de D es nulo.
(Teorema de Mohr, teorema de Castigliano)

- Otra alternativa de cálculo consiste en liberar las suficientes coacciones para que la estructura sea isostática y hacer nulos los correspondientes movimientos.



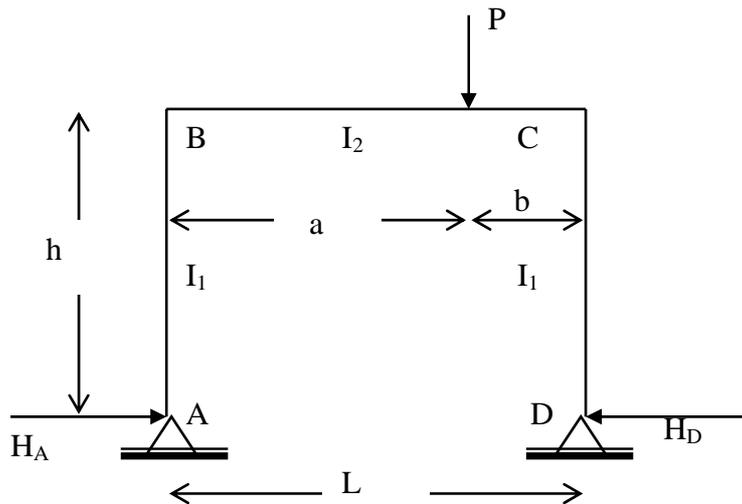
El carácter de isostática de la estructura posibilita el inmediato cálculo de las reacciones y, por tanto, de las leyes de esfuerzos.



A partir de las leyes de esfuerzos se obtiene (utilizando, por ejemplo, los teoremas de Castigliano o de Mohr generalizado) el movimiento en C.

Caso de carga no simétrica.-

Considérese un pórtico de geometría simétrica y cargas no simétricas, como el que se muestra en la figura.



¿Porqué este pórtico es traslacional?

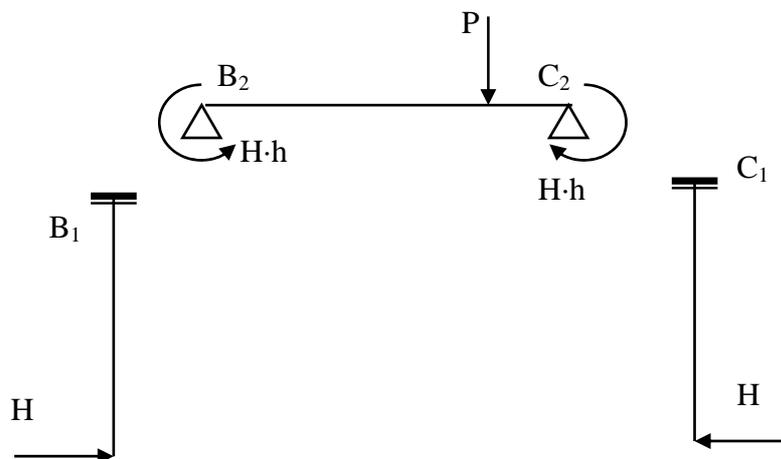
Desglosado el estado de cargas en la superposición de un estado simétrico y de uno antisimétrico, en el estado antisimétrico se van a producir movimientos horizontales del punto medio del dintel y, por lo tanto, del pórtico.



¿Hacia dónde se traslada este pórtico?

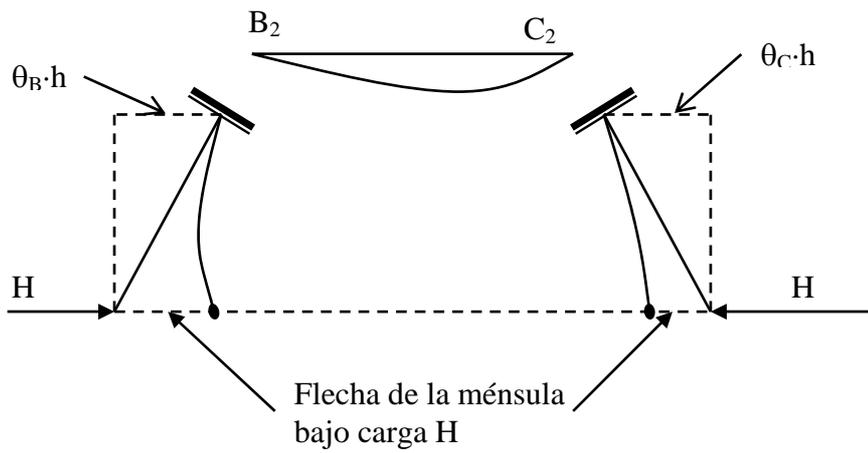
- Como no hay cargas horizontales → $H_A = H_D = H$
- Por lo tanto el momento en B es igual al momento en C y ambos iguales a $H \cdot h$

¿Cuál es la situación de las barras del pórtico?

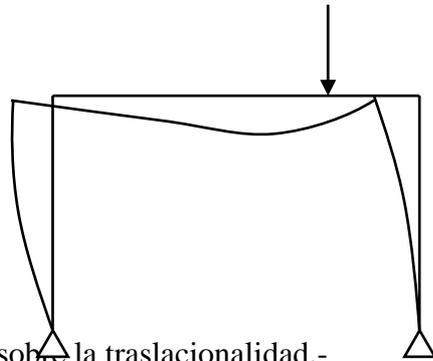


Como P no está en el centro del dintel → $\theta_{B2} \neq \theta_{C2}$

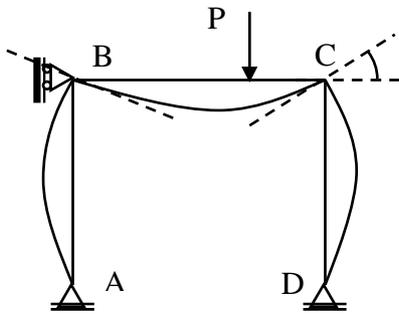
La deformación de las diferentes barras es:



Dado que la separación entre los nodos A y D ha de seguir siendo igual a L, el dintel necesariamente tiene que haberse desplazado hacia la izquierda.



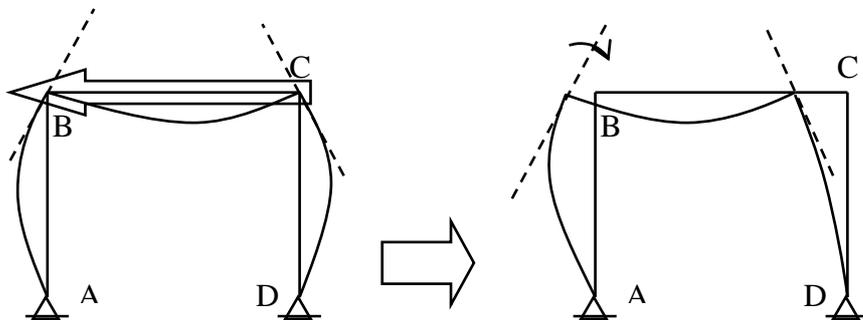
- Otros argumentos sobre la traslacionalidad.-



Por estar la carga P más cerca del nudo C, el giro de esta nudo (y por tanto, el momento) es mayor que el giro (y por tanto el momento) en el nudo B

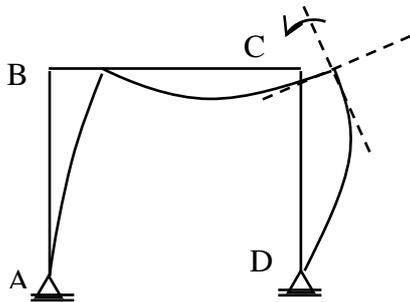
$$(M_f)_B < (M_f)_C$$

Un movimiento hacia la izquierda aumenta el giro (y por tanto el momento) en B y lo disminuye en C



$$(M_f)_B \uparrow \quad (M_f)_C \downarrow$$

Un movimiento a la derecha aumenta el giro en C y lo disminuye en B

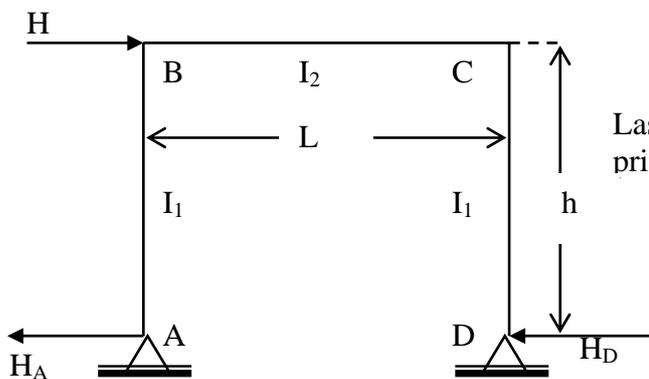


$$(M_f)_C \uparrow \quad (M_f)_B \downarrow$$

Como las reacciones horizontales en A y B son iguales, y por tanto son iguales los momentos en B y en C, debe producirse un movimiento hacia la izquierda en este caso.

Ejemplo 1.-

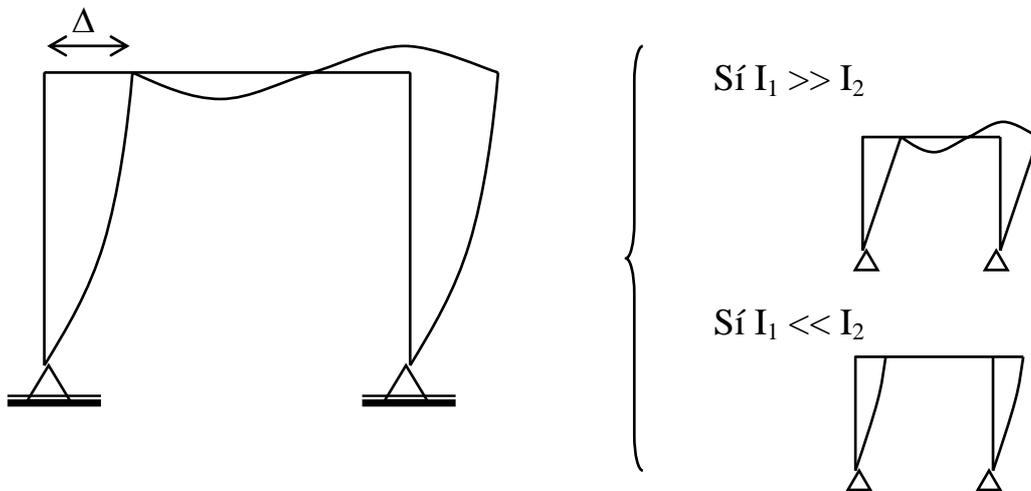
Considérese el pórtico de la figura.



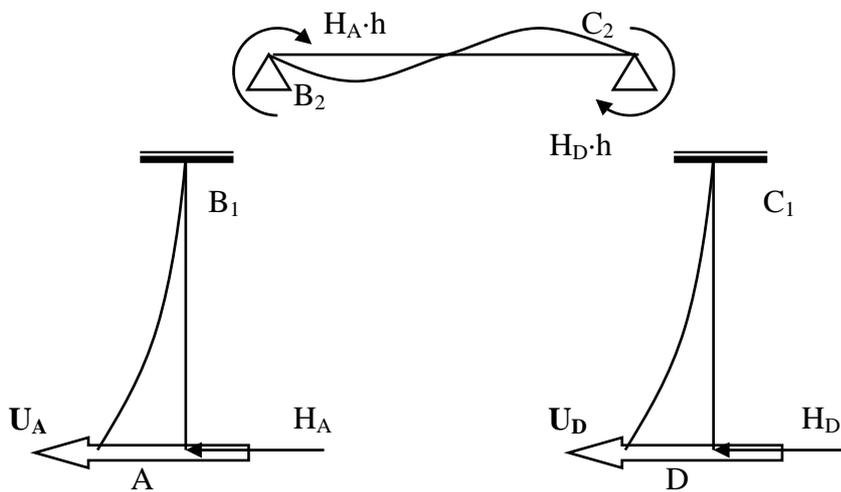
Las reacciones en los apoyos son, en principio, no nulas y diferentes

$$H_A + H_D = H$$

¿Cómo es la deformada?



Un método sencillo de cálculo en este caso es el de descomposición en elementos.

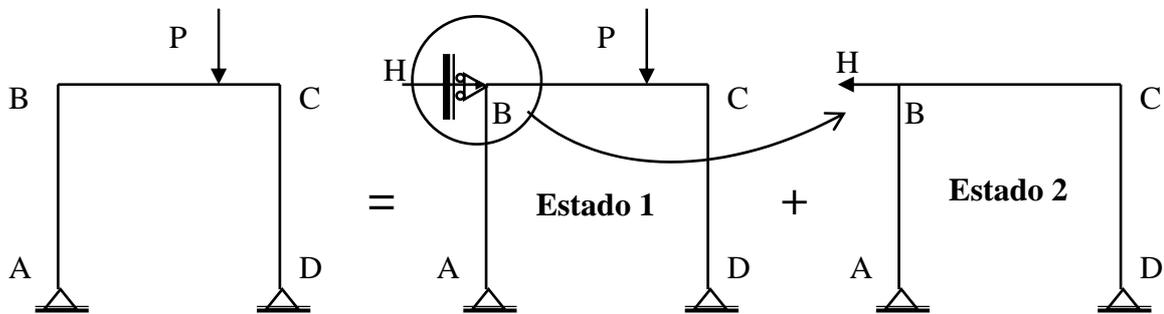


$$U_A = \frac{H_A \cdot h^3}{3EI_1} + \overbrace{\left[\frac{H_A hL}{3EI_2} - \frac{H_D hL}{6EI_2} \right]}^{\text{Giro de } B_2} h$$

$$U_D = \frac{H_D \cdot h^3}{3EI_1} + \left[\frac{H_D hL}{3EI_2} - \frac{H_A hL}{6EI_2} \right] h$$

como $U_A = U_D (= \Delta)$ (para que se mantenga la separación entre A y B), se verifica
 $H_A = H_D (= H/2)$

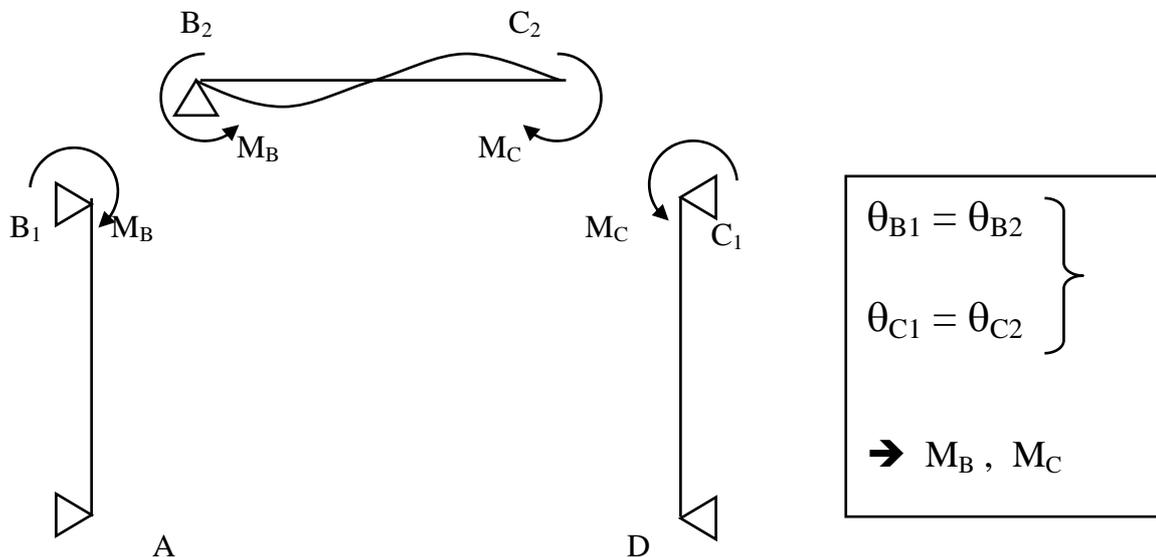
Ejemplo 2.-



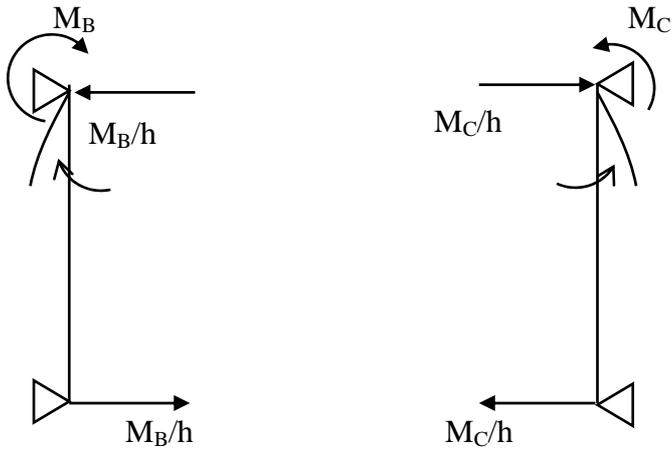
- Se comienza por calcular los esfuerzos en el pórtico suponiéndolo intraslacional, es decir, admitiendo un apoyo horizontal en el dintel.
- Se aplica al pórtico una carga horizontal igual a la reacción en el apoyo ficticio horizontal, cambiada de signo.
- Se superponen los esfuerzos de los dos estados.

¿ Porqué existe una reacción en B en el estado 1?.- Porque el pórtico es traslacional, y para impedir su movimiento se requiere ejercer una fuerza horizontal.

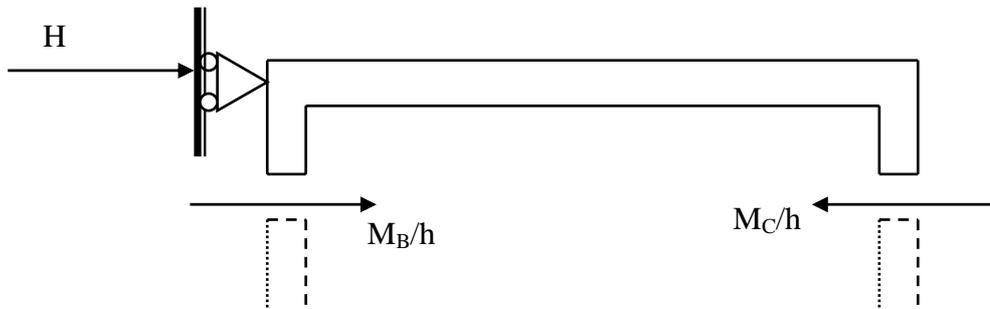
Estado 1.- Descomponiendo el pórtico en barras.



Una vez obtenidos los momentos M_B y M_C se obtienen los cortantes horizontales en los nudos B y C.



y se plantea el equilibrio del dintel



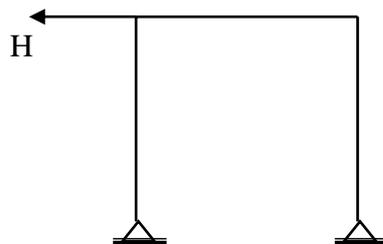
Por equilibrio de fuerzas horizontales

$$H + \frac{M_B}{h} - \frac{M_C}{h} = 0$$

Obsérvese que si P estuviera aplicada en el centro del dintel:

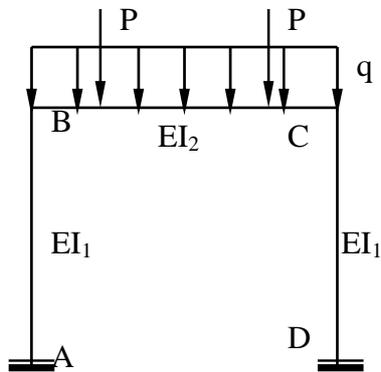
$$M_B = M_C \rightarrow H = 0$$

Estado 2.- ¡Es la situación analizada en el ejemplo anterior!



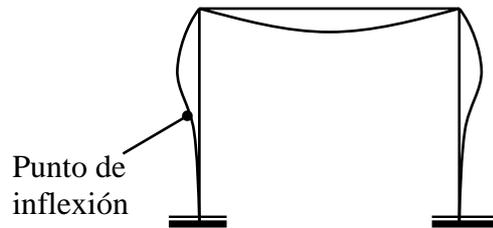
6.1.3.3 Métodos de cálculo de pórticos simples con pilares empotrados.-

Caso de carga simétrica.-



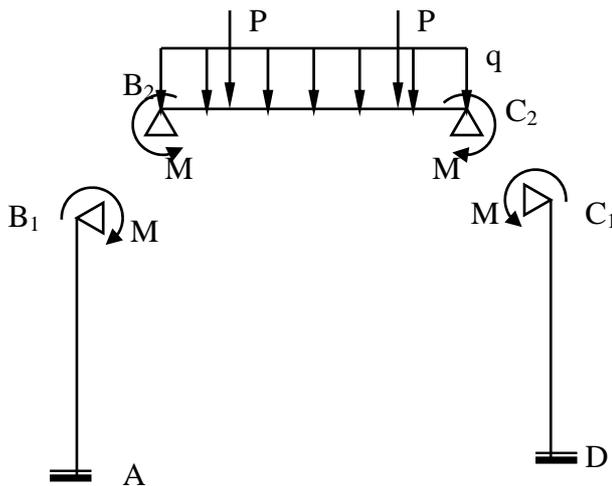
Pórtico intraslacional, simétrico, hiperestático.

Deformada a estima



Opciones para la determinación de los esfuerzos.-

- Descomposición

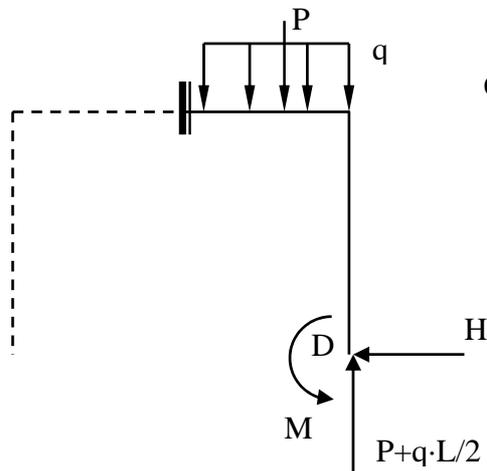


$$\theta_{B1}(M) = \theta_{B2}(M, P, q)$$

$$\theta_{C1}(M) = \theta_{C2}(M, P, q)$$

Repetida

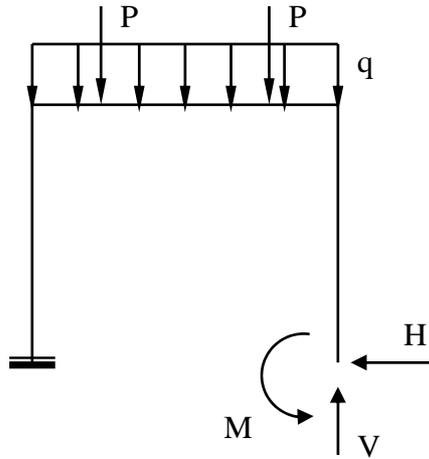
- Consideraciones de simetría



Condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_D = 0 \\ u_D = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Th. Mohr} \\ \text{Th. Castigliano} \end{array}$$

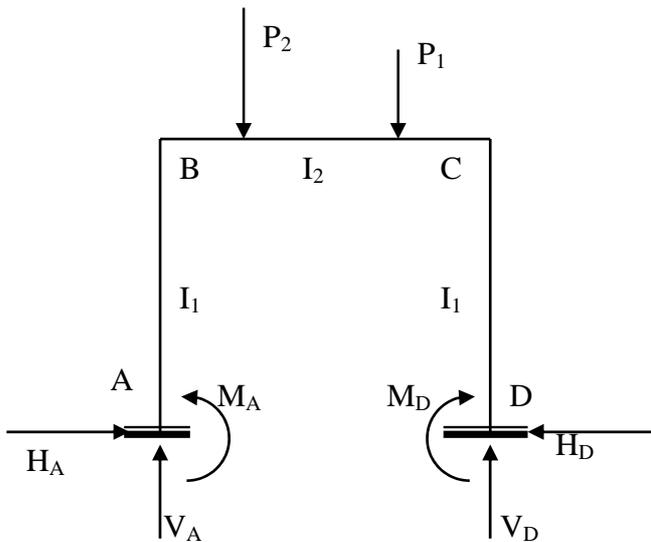
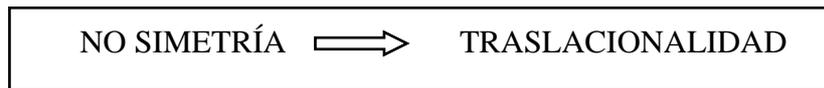
- Eliminación de coacciones



Condiciones

$$\left. \begin{array}{l} \theta_C = 0 \\ u_C = 0 \\ v_C = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{T. Mohr} \\ \text{T. Castigliano} \end{array}$$

Caso de carga no simétrica

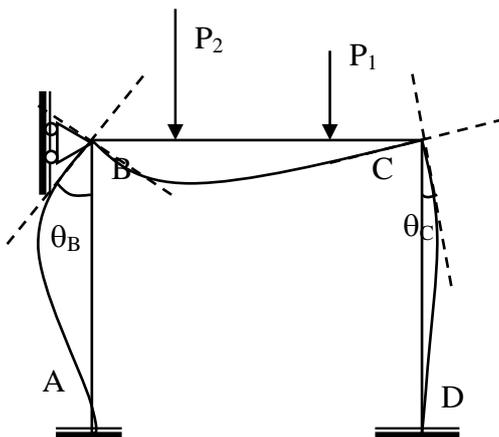


Las reacciones en los apoyos son:

Apoyo A (H_A, V_A, M_A)

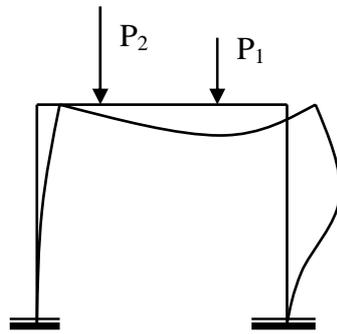
Apoyo D (H_D, V_D, M_D)

¿Cómo es la deformada?

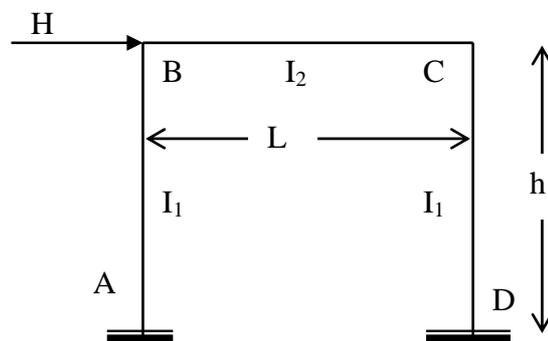


Con el apoyo en B y dado que $P_1 > P_2$ puede aceptarse que $\theta_B > \theta_C$ y, por tanto, $(M_f)_B > (M_f)_D$

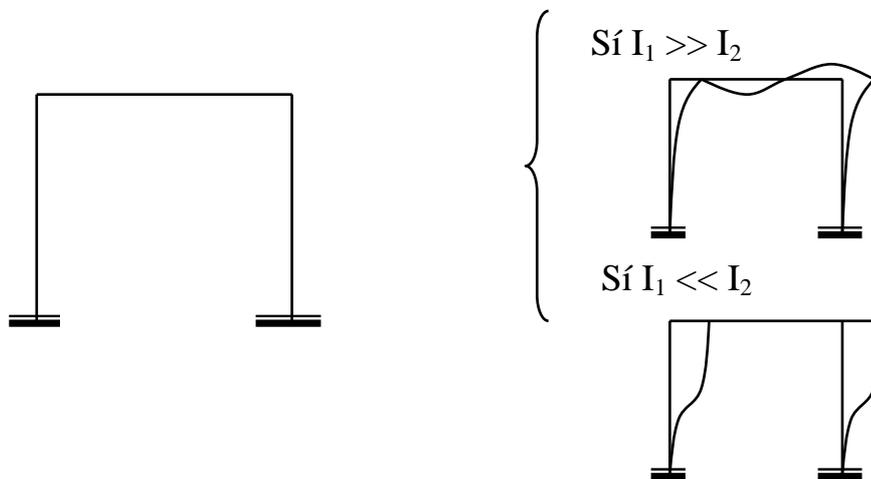
Eliminando el apoyo ficticio del nudo B, el pórtico se desplazara hacia la derecha para disminuir con ello el momento en B, aumentando el momento en C.



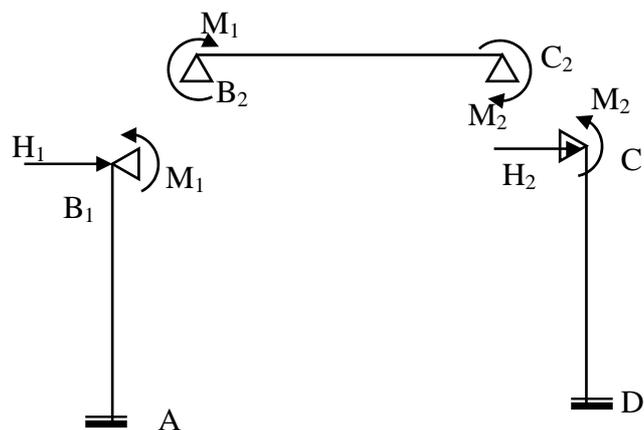
Ejemplo 1.- Considérese el pórtico de la figura



¿Cómo es la deformada?



Un modo sencillo de cálculo es el consistente en descomponer la estructura en elementos.



Las incógnitas del problemas son

$$H_1, H_2, M_1 \text{ y } M_2$$

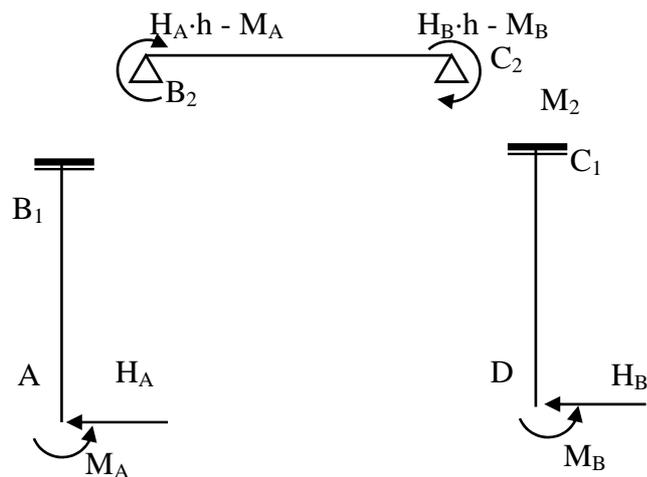
Las condiciones de compatibilidad son

$$\begin{aligned} u_{B1} &= u_{C1} \\ \theta_{B1} &= \theta_{B2} \\ \theta_{C1} &= \theta_{C2} \end{aligned}$$

Una cuarta condición (de equilibrio) es $H = H_1 + H_2$

- $u_{B1} = \frac{H_1 h^3}{3EI_1} - \frac{M_1 h^2}{2EI_1} = \frac{H_2 h^3}{3EI_1} - \frac{M_2 h^3}{2EI_1} = u_{C1}$
- $\theta_{B1} = \frac{H_1 h^2}{2EI_1} - \frac{M_1 h}{EI_1} = \frac{M_1 L}{3EI_2} - \frac{M_2 L}{6EI_2} = \theta_{B2}$
- $\theta_{C1} = \frac{H_2 h^2}{2EI_1} - \frac{M_2 h}{EI_1} = \frac{M_2 L}{3EI_2} - \frac{M_1 L}{6EI_2} = \theta_{C2}$
- $H_1 + H_2 = H$

Otra opción alternativa de descomposición en elementos sería:

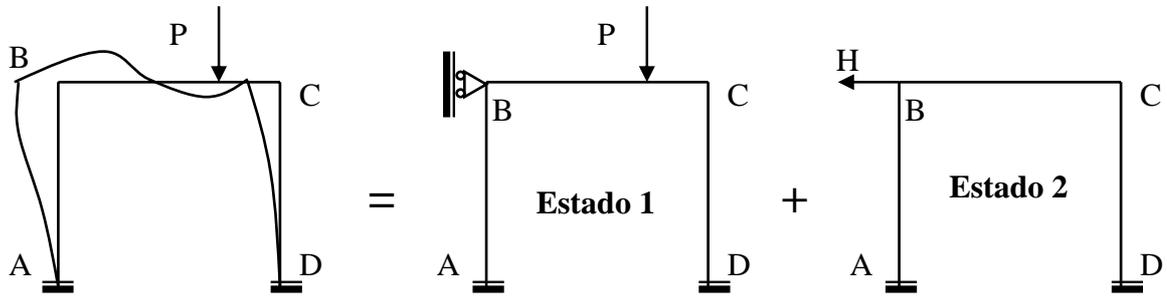


En este caso las condiciones de compatibilidad son:

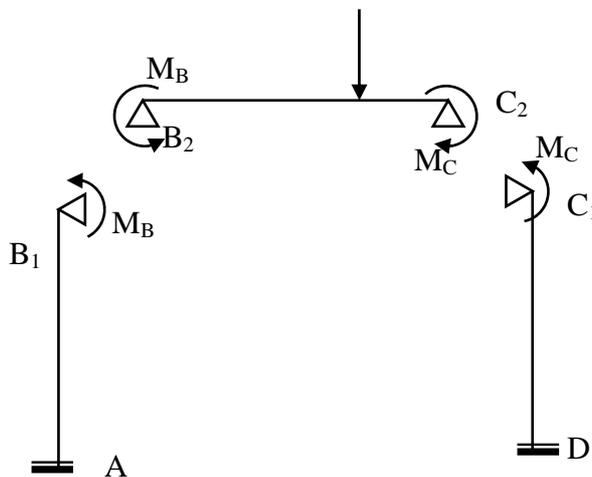
$$\begin{aligned} u_{B1} &= u_{C1} \\ \theta_A &= 0 \\ \theta_D &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.-

Sea una estructura con un estado de cargas como se muestra en la figura y que se descompone en la superposición de dos estados.



Estado 1.- Descomponiendo en barras



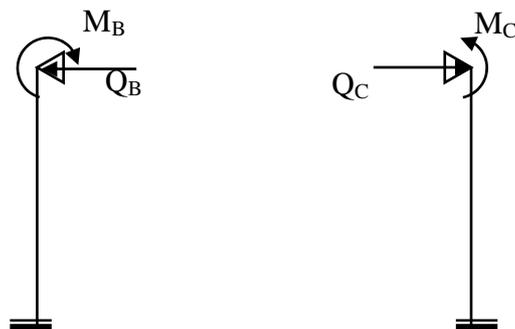
Las condiciones de compatibilidad son:

$$\theta_{B1} = \theta_{B2}$$

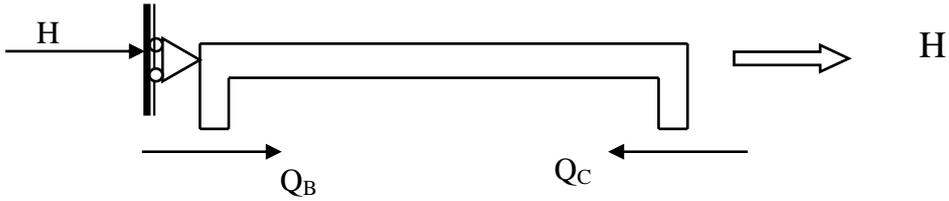
$$\theta_{C1} = \theta_{C2}$$

y las incógnitas, son M_B y M_C .

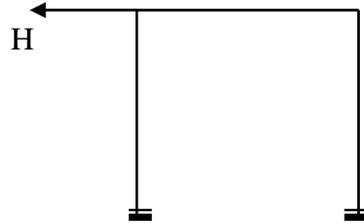
Una vez obtenidos los momentos se obtienen los cortantes



y se plantea el equilibrio del dintel

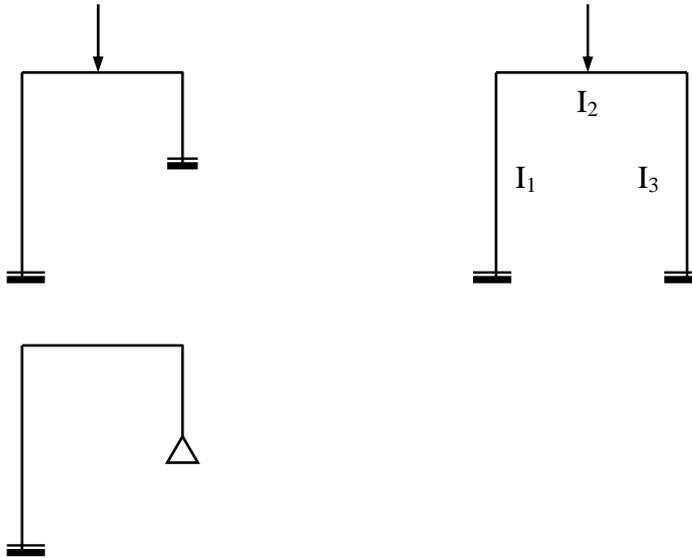


Estado 2.- ¡Es la situación analizada en el ejemplo anterior!



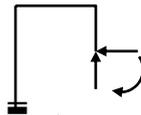
6.1.4 Pórticos simples no simétricos

Un pórtico simple se califica de no simétrico cuando no son simétricos su geometría, sus condiciones de apoyo, el área o momento de inercia de la sección de sus elementos o los parámetros elásticos del material.

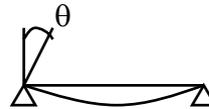


Las técnicas de análisis de estos pórticos son muy diversas

- Compatibilidad de movimientos (teoremas generalizados de Mohr)

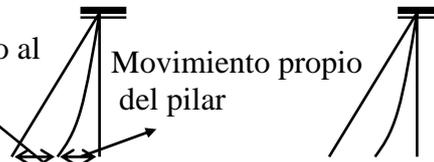


- Descomposición en elementos



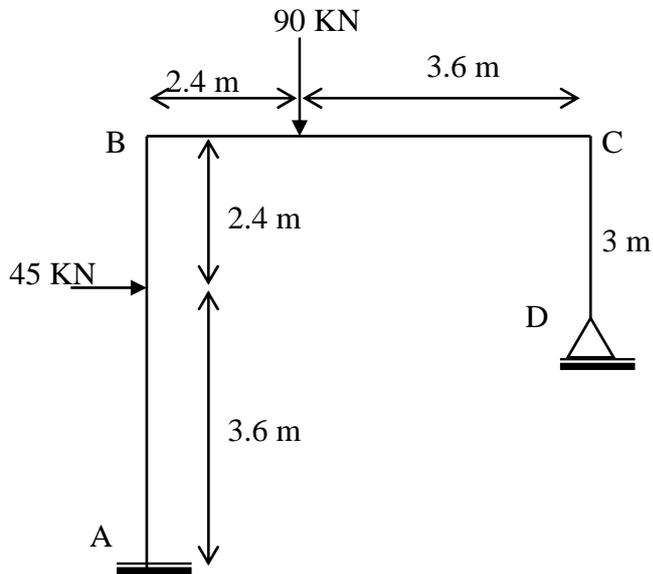
$\theta \cdot h$ Movimiento debido al giro del nudo superior

Movimiento propio del pilar

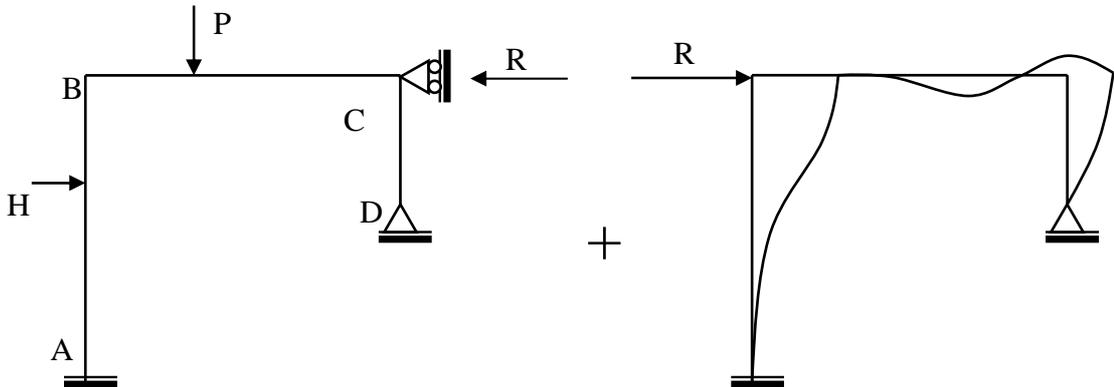


- Superposición de estados

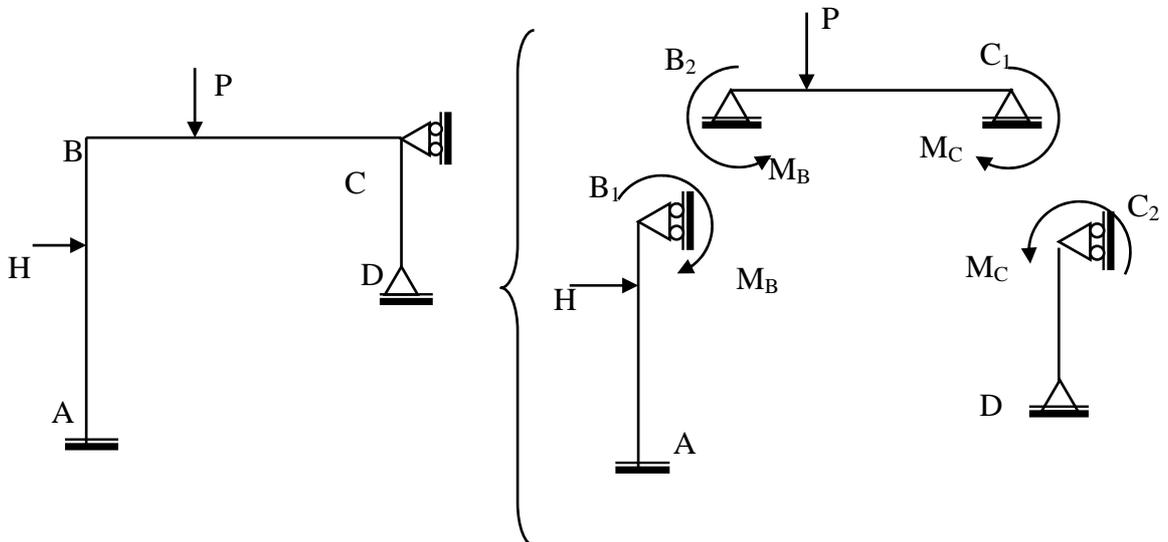
Sea, como ejemplo, el caso de la estructura cuya geometría y cargas se muestran en la figura.



Se descompone el estado de cargas propuesto en dos estados superpuestos E_1 y E_2 .



- Primer paso.- Análisis del primer estado (intraslacional).



Las condiciones de compatibilidad a imponer son

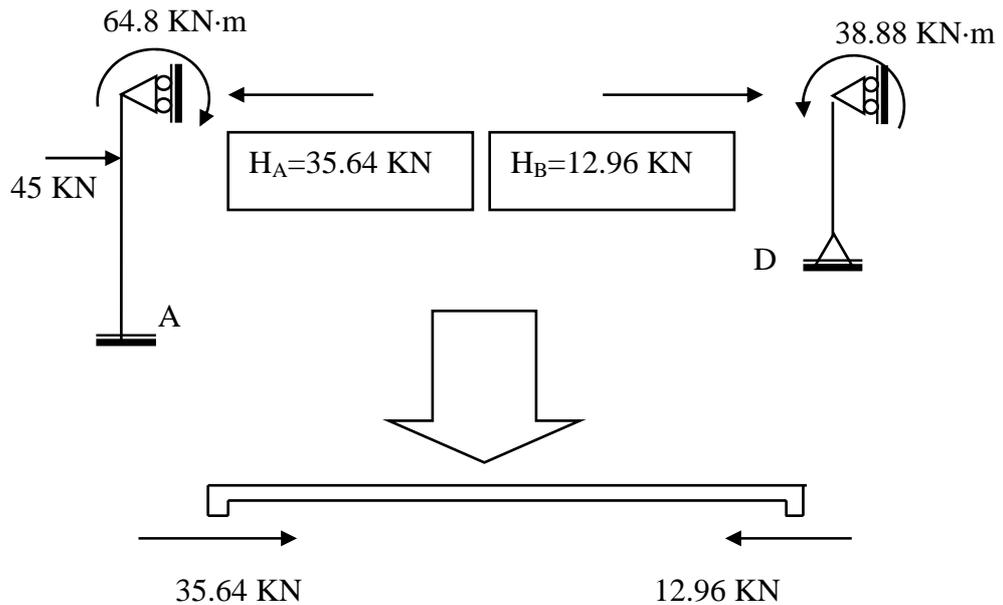
$$\theta_{B1} = \theta_{B2}$$

$$\theta_{C1} = \theta_{C2}$$

de donde se obtienen los valores de los momentos, que son

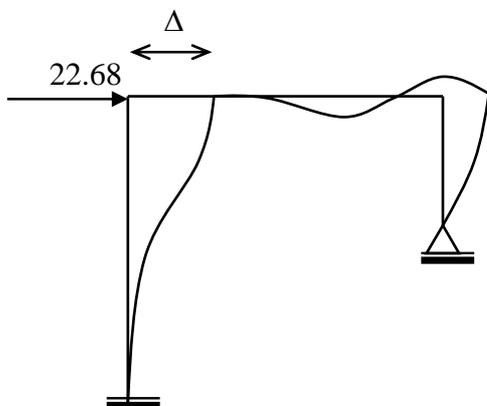
$$M_B = 64.8 \text{ KN}\cdot\text{m} \text{ y } M_C = 38.88 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

y, en consecuencia,:

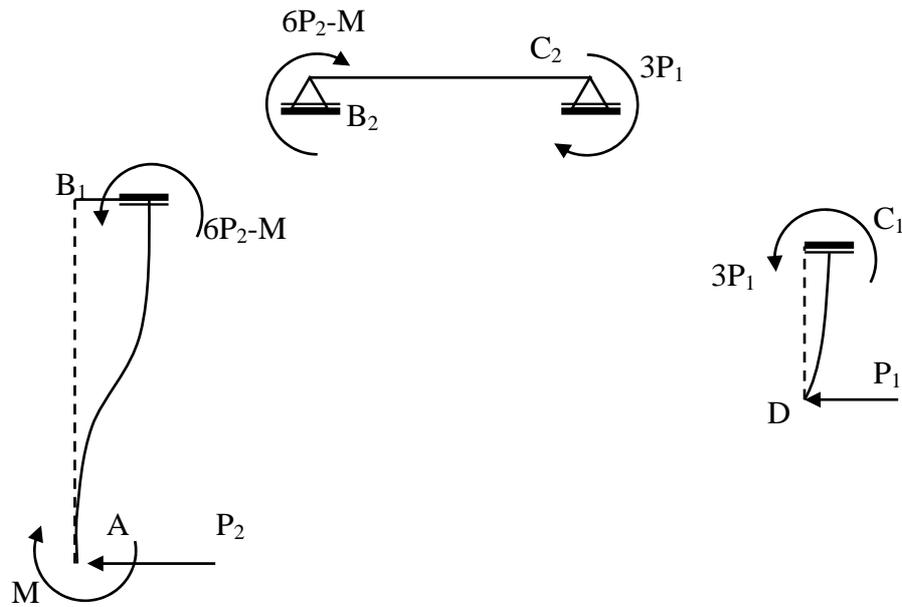


Las fuerzas horizontales no están en equilibrio. Si el pórtico no estuviese apoyado en C, se desplazaría hacia la derecha, lo que implica que en el apoyo aparece una reacción que ha de equilibrar al sistema de fuerzas horizontales y cuyo valor es, por tanto, $35.64 - 12.96 = 22.68 \text{ kN}$.

- Segundo paso.- Análisis del estado E_2 (traslacional).



Una buena opción es suponer un desplazamiento (p.e. $\Delta=1$) y por equilibrio del dintel del pórtico deducir la carga horizontal que lo produce.



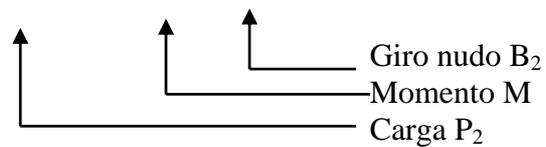
Los giros en el dintel son

$$\theta_{B_2} = \frac{1}{EI} \left[\frac{(6P_2 - M) \cdot 6}{3} - \frac{3P_1 \cdot 6}{6} \right] \curvearrowright$$

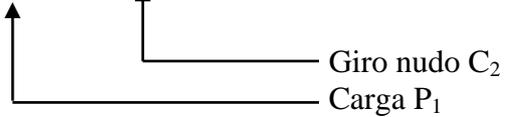
$$\theta_{C_2} = \frac{1}{EI} \left[\frac{3P_1 \cdot 6}{3} - \frac{(6P_2 - M) \cdot 6}{6} \right] \curvearrowright$$

Y el desplazamiento horizontal de los apoyos

$$\Delta_A = \frac{P_2 \cdot 6^3}{3EI} - \frac{M \cdot 6^2}{2EI} + \theta_{B_2} \cdot 6$$



$$\Delta_D = \frac{P_1 \cdot 3^3}{3EI} + \theta_{C_2} \cdot 3$$



El giro del nudo A es

$$\theta_A = \frac{P_1 \cdot 3^2}{2EI} - \frac{3M}{EI} + \theta_{B2}$$

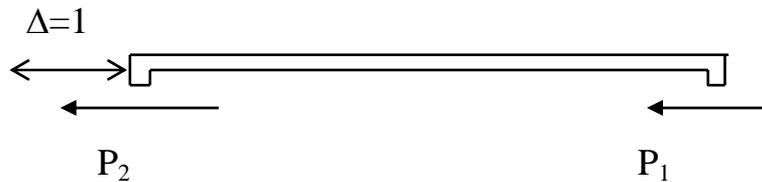
Las condiciones de compatibilidad son:

$$\Delta_A = \Delta (=1)$$

$$\Delta_D = \Delta (=1)$$

$$\theta_A = 0$$

de las que se pueden obtener (incógnitas) P_1 , P_2 y M . Las fuerzas P_1 y P_2 actúan sobre el dintel:



con lo cual, para que esté en equilibrio se requiere la actuación de una fuerza de valor P_1+P_2 .

El desplazamiento $\Delta=1$ se produce cuando la carga actuante sobre el pórtico es P_1+P_2 ; como la carga aplicada es 22.68 el desplazamiento real es:

$$\frac{22.68}{P_1 + P_2} \times \Delta (=1)$$

y los valores reales de P_1 y P_2 son

$$P_1^* = \frac{22.68}{P_1 + P_2} \cdot P_1$$

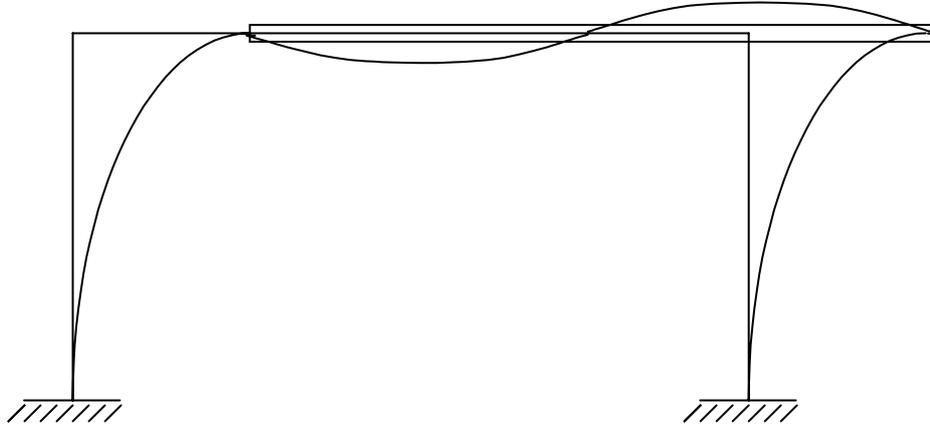
$$P_2^* = \frac{22.68}{P_1 + P_2} \cdot P_2$$

- Tercer paso.- Se superponen los esfuerzos del estado E_1 correspondiente al pórtico con movimiento impedido y el estado E_2 correspondiente a un

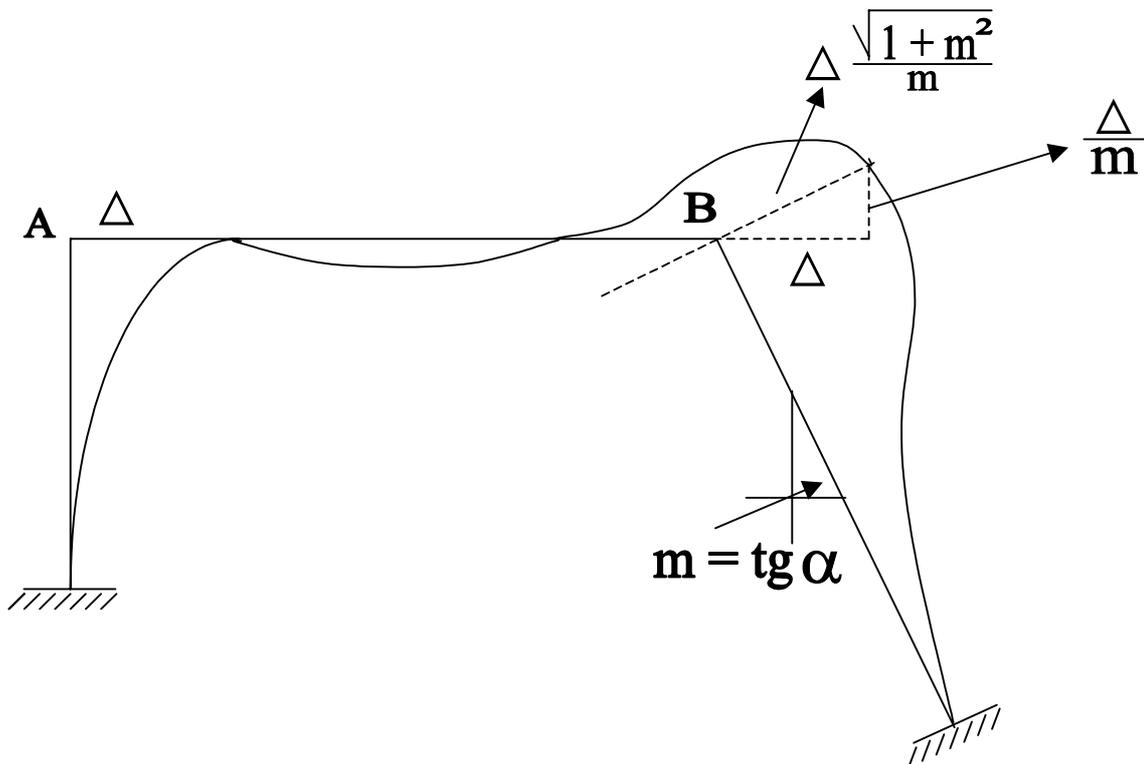
desplazamiento : $\frac{22.68}{P_1 + P_2}$

Un caso particular es el de los pórticos simples con *pilares inclinados*.

- En los pórticos de pilares verticales, el desplazamiento lateral del pórtico no da lugar a desplazamientos relativos de los extremos del dintel.



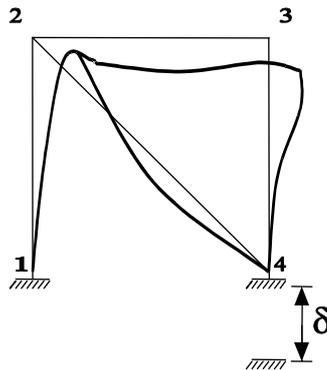
- El desplazamiento lateral Δ de un pórtico con pilares inclinados implica, sin embargo, un desplazamiento relativo de los extremos del dintel, desplazamiento que es función de Δ y que ha de tenerse en cuenta en el cálculo.



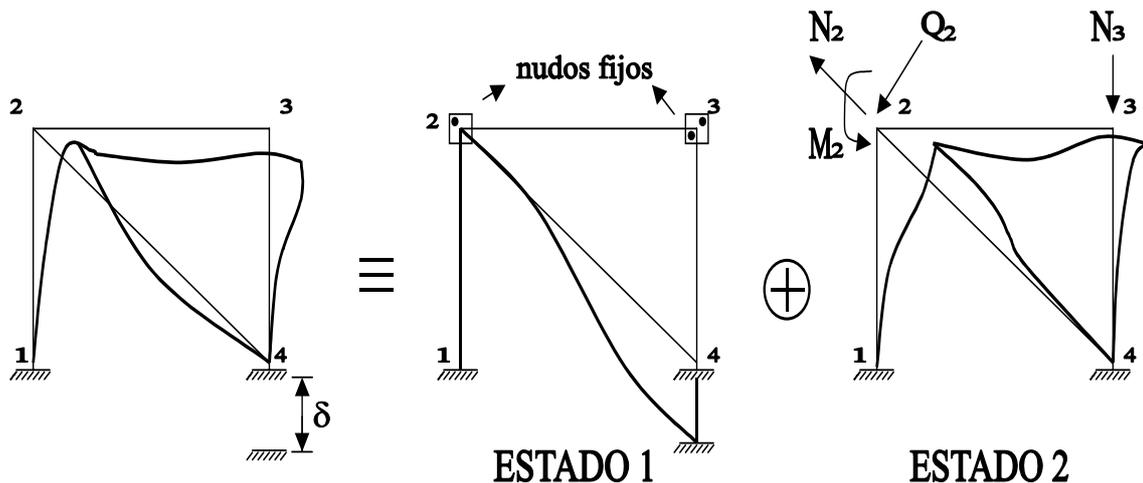
6.1.5 Movimiento de apoyos

Un tipo de acciones externas muy frecuentes en las estructuras es el movimiento de sus apoyos

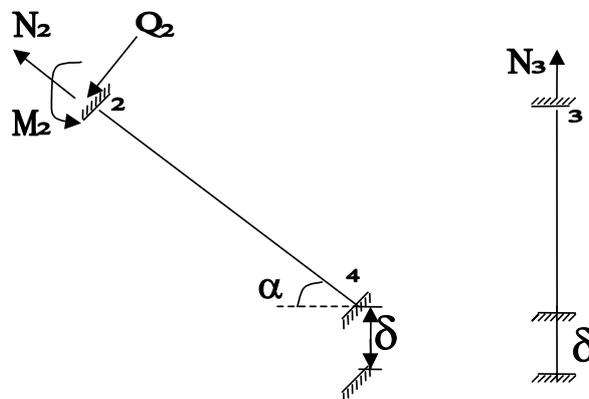
Considérese una estructura como la de la figura en la cual el nodo 4 sufre un descenso vertical de valor δ .



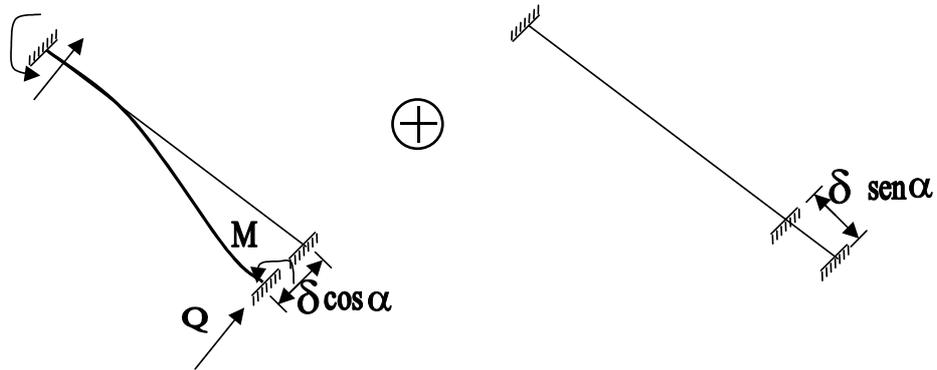
El estado de cargas planteado puede considerarse como la superposición de dos estados E_1 y E_2 como se indica en la figura. En el estado E_1 , lo que se define como “fijar los nudos 2 y 3” consiste en aplicar en estos nudos las reacciones que aparecerían en los extremos de las barras 24 y 34 supuestas empotradas en sus extremos, cuando el extremo 4 sufre el movimiento vertical citado. El estado 2 consiste en aplicar en los nudos 2 y 3 las reacciones anteriores cambiadas de signo.



El descenso vertical que el nodo 4 sufre en el estado E_1 da a lugar a diferentes situaciones deformacionales en las barras 24 y 34 como se muestra en la figura siguiente.

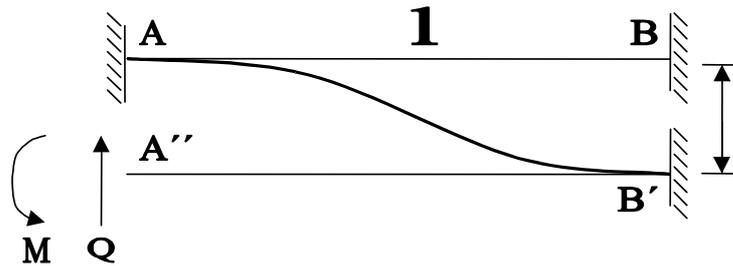


Para la barra 24, el movimiento vertical del nodo 4 puede desglosarse en un movimiento en la dirección de la barra y en un movimiento en dirección ortogonal.



Un alargamiento (o acortamiento) de una barra da lugar a la aparición de un esfuerzo axial. Un movimiento de un extremo de una biempotrada, en dirección ortogonal a la barra da lugar a la aparición de reacciones (fuerzas y momentos) en los extremos de la barra. Estos esfuerzos pueden calcularse de diversos modos.

Primer método.- Si se libera uno de los empotramientos de la barra, la fuerza y el momento necesarios para producir un desplazamiento δ y un giro nulo son las reacciones



$$V_{A''} = Ql^3/(3EI) - Ml^2/(2EI) = \delta$$

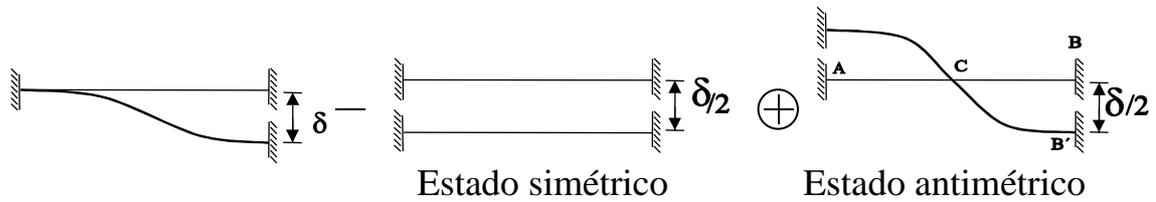
$$\theta_{A''} = -Ql^2/(2EI) + Ml/(EI) = 0$$

de donde se obtiene

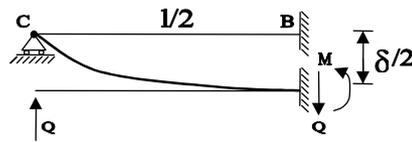
$$Q = 12EI/\delta^3$$

$$M = 6EI/\delta^2$$

Segundo método.- La barra sometida al movimiento de uno de sus extremos puede considerarse como la superposición de dos estados uno simétrico y otro antisimétrico.



En el estado simétrico no aparecen reacciones. Dado que en el estado antisimétrico el punto medio de la barra no puede tener movimiento vertical, puede analizarse solamente la mitad de la estructura imponiendo el movimiento nulo de este punto.



Es decir:

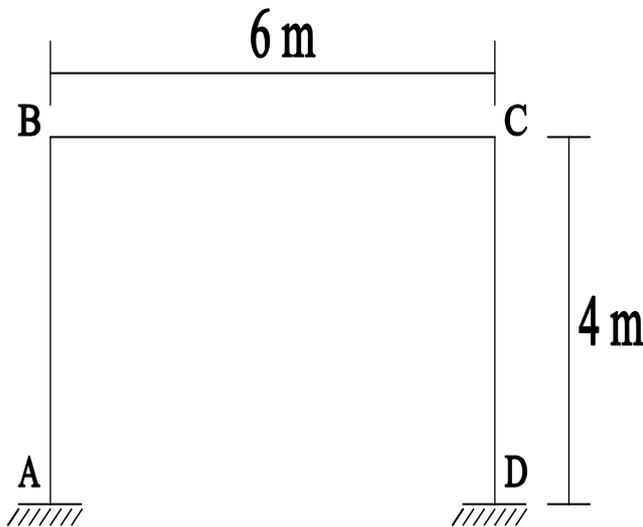
$$Q(l/2)^3 / (3EI) = \delta/2$$

de donde se obtiene

$$Q = 12EI/l^3$$

$$M = 6EI/l^2 \delta$$

Ejemplo: Calcular las reacciones si por un fallo en la cimentación el apoyo D descendiera 4 cm. Calcular el desplazamiento vertical en C.

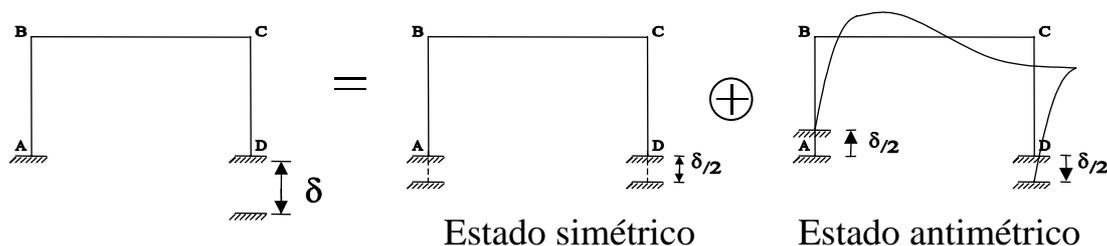


Datos:

$$(EI)_{BC} = 10^4 \text{ t}\cdot\text{m}^2;$$

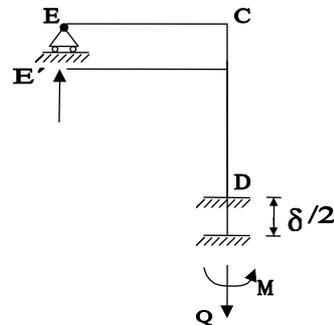
$$(EI)_{AB} = (EI)_{CD} = 2 \cdot 10^4 \text{ T}\cdot\text{m}^2$$

Dada la simetría geométrica del pórtico, parece oportuno desglosar el estado de cargas en la superposición de dos estados uno simétrico y otro antisimétrico.



En el estado simétrico no se producen esfuerzos aunque si un movimiento global vertical de valor $\delta/2$.

En el estado antimétrico, el punto medio del dintel no puede tener movimientos verticales con lo cual la estructura puede reducirse, a efectos de su análisis, a la mitad imponiendo en el punto medio del dintel la condición de movimiento vertical nulo.



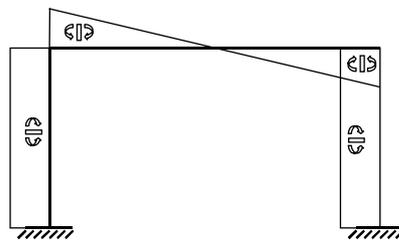
La reacción que aparece en el apoyo del nodo E se obtiene como valor de la fuerza vertical que hace falta aplicar en el punto E' para conseguir un movimiento vertical de valor $\delta/2$.

Aplicando el teorema generalizado de Mohr, se obtiene

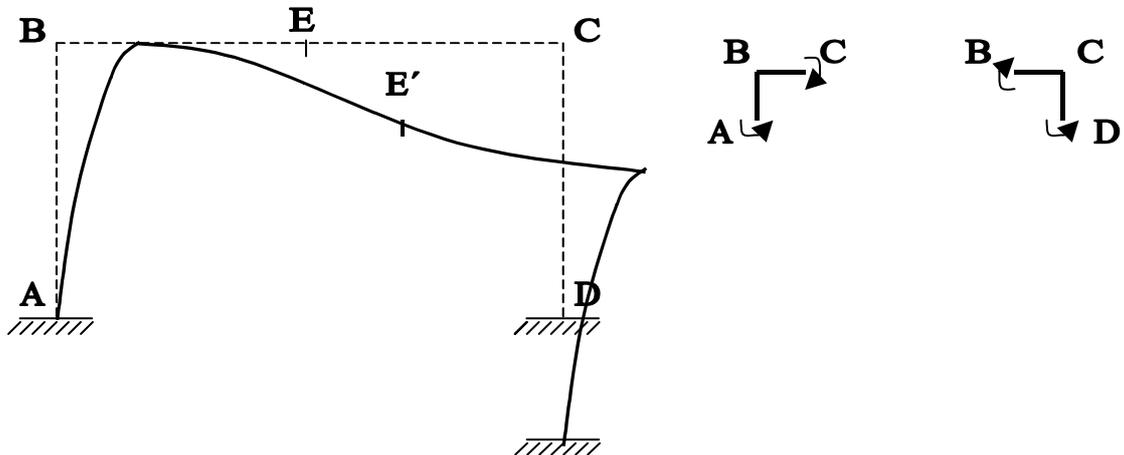
$$V_{E'} = 1/10^4 [1/2 \cdot (3Q) \cdot 3.2/3.3] + 1/(2 \cdot 10^4) [(3Q) \cdot 4.3] = 27 \times 10^{-4} Q = \delta/2 = 0.02$$

de donde $Q = 7.407$ t, y, por tanto, el momento en el empotramiento es $M = Q \cdot 3 = 22.22$ mt

La ley de momentos flectores se representa en la figura siguiente



La deformada a estima de la estructura es

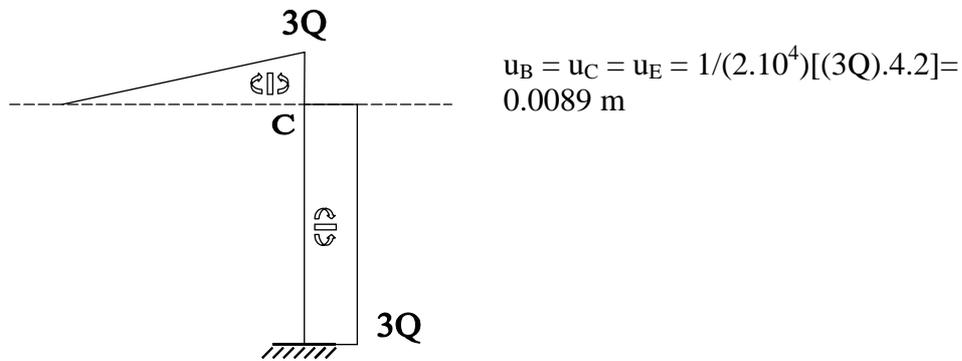


Otros valores son:

Desplazamiento vertical de C = $\delta = 0.04$ m

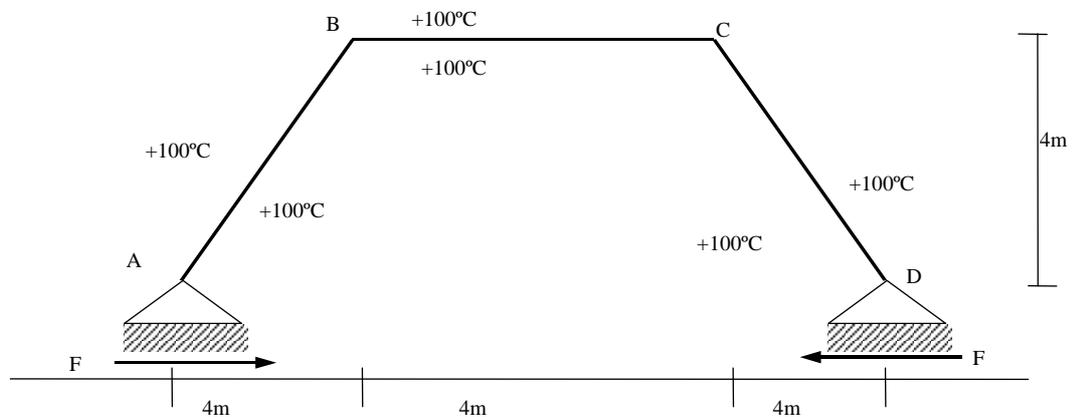
Desplazamiento vertical de E = $\delta/2 = 0.02$ m

Desplazamiento horizontal de B, E y C:



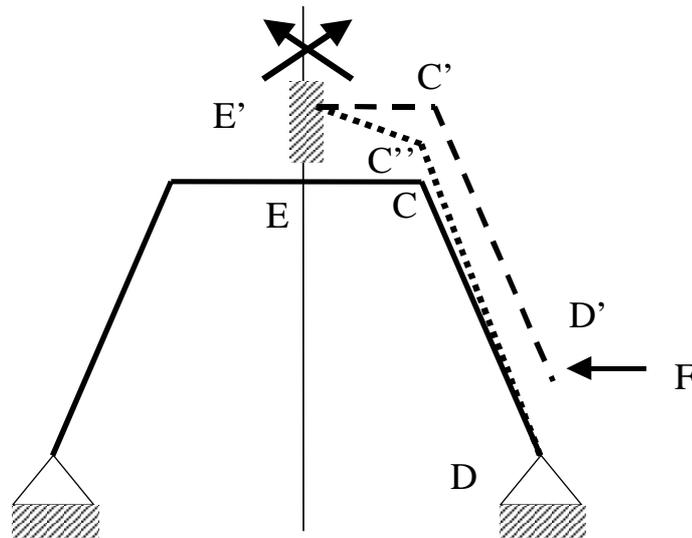
Giro en C = $\theta_C = 1/(2 \cdot 10^4) [(3Q) \cdot 4] = 0.0044$ rad

EJEMPLO.- En la estructura de la figura cuyas barras están sometidas a un incremento térmico uniforme, calcular las reacciones en los apoyos.



SOLUCIÓN.-

Una primera conclusión es que, por simetría, no hay reacciones verticales y, dado que no hay fuerzas actuantes sobre la estructura, las reacciones horizontales han de ser iguales y opuestas. Analicemos, ahora, cómo se deforma la estructura bajo el efecto de la carga térmica.



En la figura anterior

- ECD (en trazo continuo) es la estructura antes de deformar
- E'C'D (en trazo de puntos) es la deformada
- E'C''D'' (en trazo de tramos) es la configuración resultante si la sección E' permanece empotrada y se retirasen las cargas (acciones térmicas y reacciones)

Sobre esta última configuración, la actuación del incremento térmico deberá dar lugar a un movimiento horizontal del punto D' que sea anulado por el movimiento horizontal producido por la actuación de la reacción.

$$\vec{U}_{D'} = 0 = 10^{-4} * 6 * 100 - \frac{1}{10^3} \left[\frac{1}{2} (4\sqrt{2}) 4F \frac{2}{3} 4 + 4F * 2 * 4 \right]$$

de donde se obtiene $F = 0.965 \text{ t}$

¿Cuánto se ha elevado el punto E' como resultado de aplicar el incremento térmico a la estructura inicial?. Si al someter a la estructura al incremento térmico y aplicar simultáneamente la carga F a la configuración E'C'D' el punto D' pasa a ocupar la posición D, el movimiento vertical del nudo D' coincide en valor absoluto con el movimiento vertical de E hasta E'.

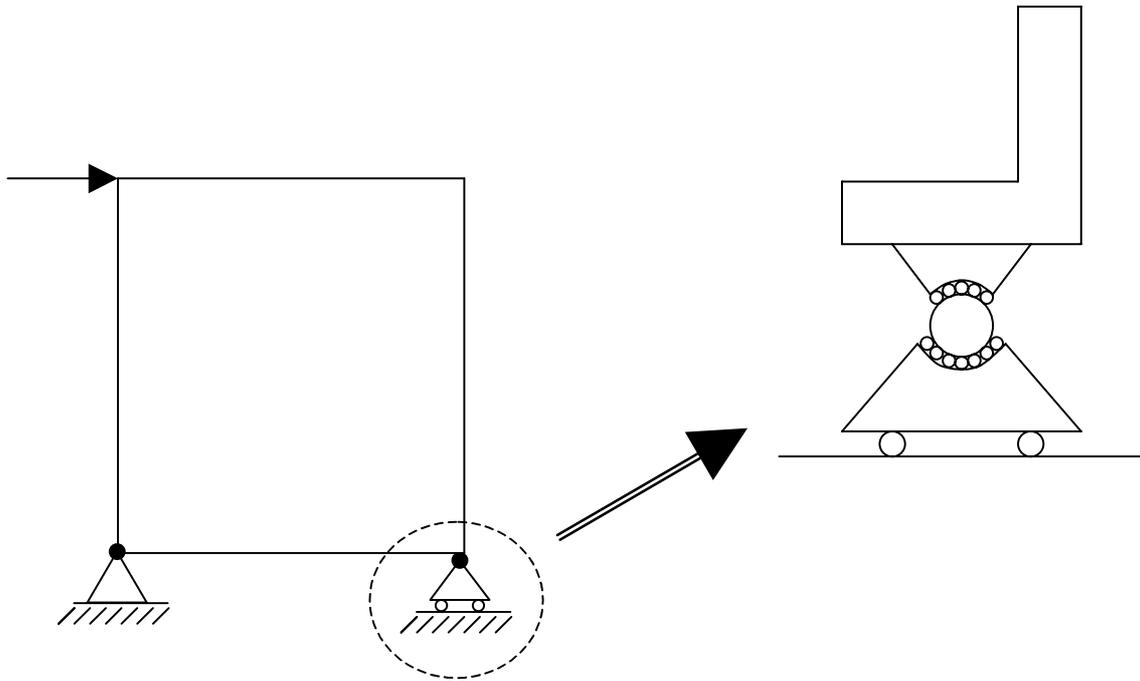
$$\vec{V}_{D'} = 10^{-4} * 4 * 100 + \frac{1}{10^3} \left[\frac{1}{2} (4\sqrt{2}) 4F \frac{2}{3} 4 + 4F * 2 * 5 \right] = 0.108 \text{ m}$$

6.2 MARCOS

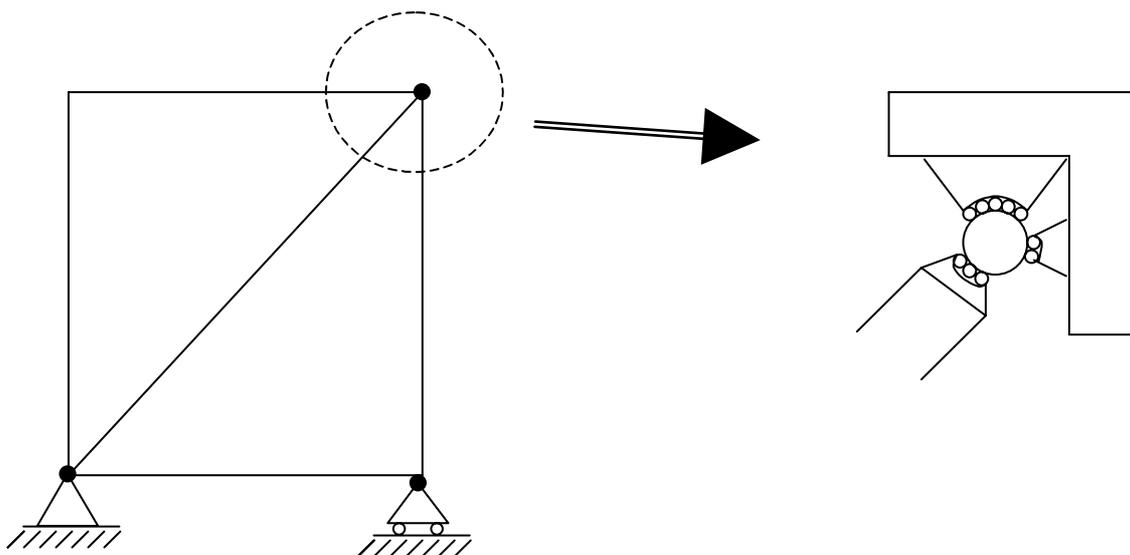
6.2.1 Definiciones

Se denomina “marco” a una estructura de barras reticulada plana en la que las barras están dispuestas de forma tal que constituyen un polígono cerrado normalmente de cuatro lados.

- Marco simple

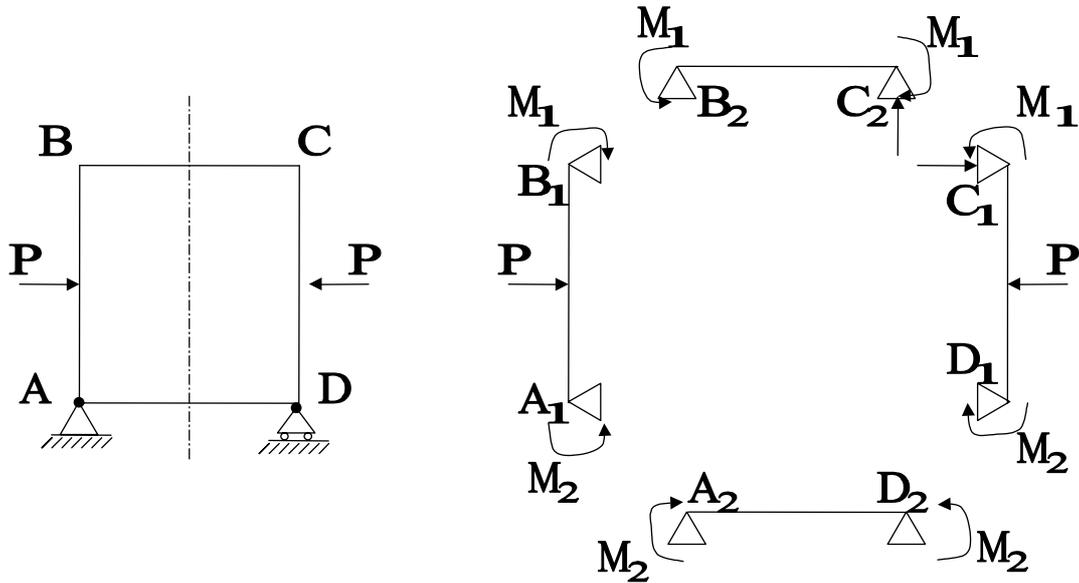


- Marco atirantado



6.2.2 Cálculo de marcos intraslacionales.

El procedimiento más aconsejable para el análisis de este tipo de marcos es la descomposición de la estructura en elementos.



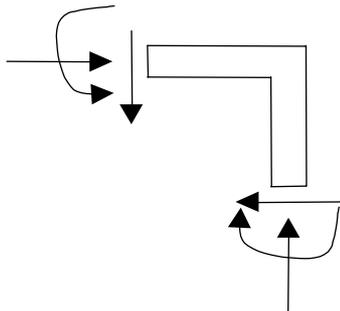
Las evidentes condiciones de compatibilidad son:

$$\theta_{B1} = \theta_{B2}$$

$$\theta_{A1} = \theta_{A2}$$

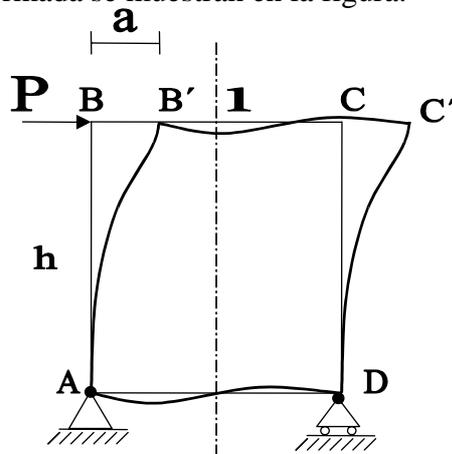
de las que se obtienen las incógnitas del problema que, en este caso, son M_1 y M_2 .

A partir de las leyes de momentos flectores en las barras se obtienen las reacciones en los apoyos y a partir de estas se obtienen las leyes de esfuerzos cortantes y, por equilibrio de nudos, las leyes de esfuerzos axiales.

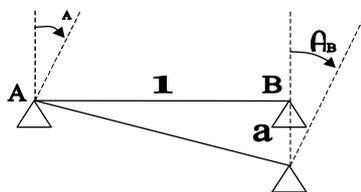
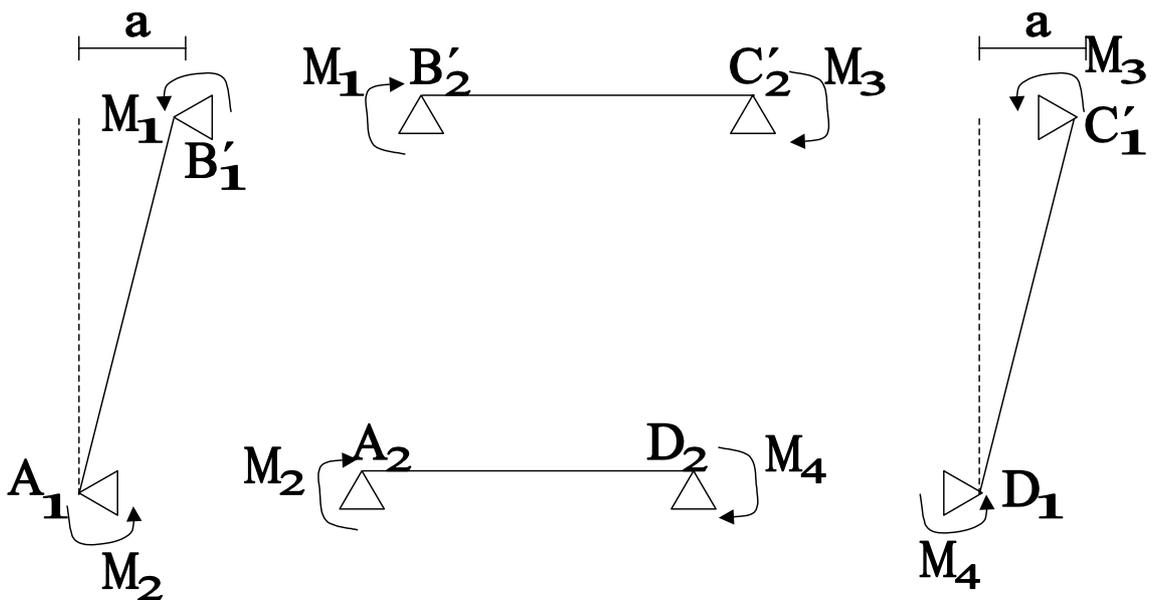


6.2.3 Cálculo de marcos traslacionales.

Sea, como ejemplo, un marco sometido a una carga horizontal P y cuyas geometrías inicial y deformada se muestran en la figura.



A efectos de análisis y una vez deformado, el pórtico se descompone en elementos (barras) añadiendo en los nodos los correspondientes momentos de empotramiento.



Debido al desplazamiento horizontal del pórtico, las secciones extremas de las barras verticales han sufrido un giro de valor $\theta_A = \theta_B = a/l$ (además del que puedan haber sufrido por efecto de los momentos aplicados).

Las condiciones de compatibilidad son:

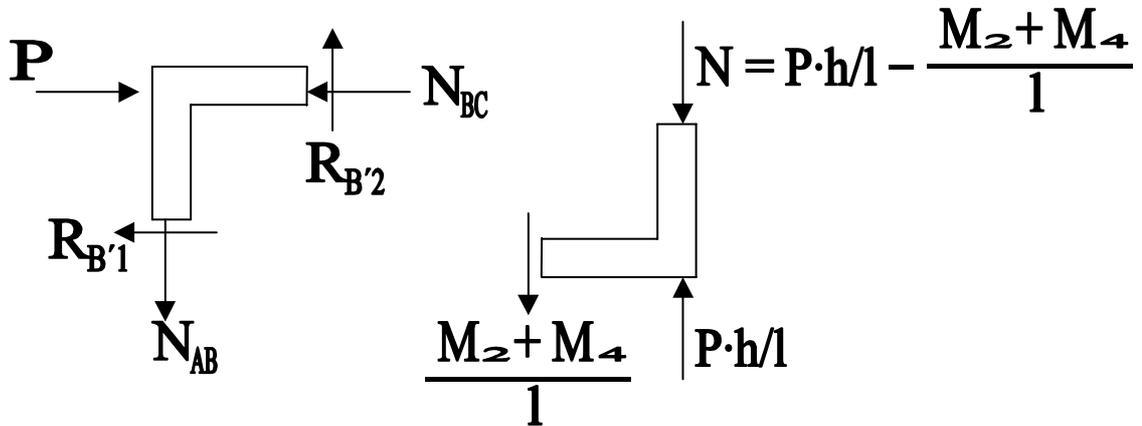
$$\theta_{B'1} = \theta_{B'2} \quad \frac{M_1 h}{3EI} - \frac{M_2 h}{6EI} - \frac{a}{h} = -\frac{M_1 l}{3EI} + \frac{M_3 l}{6EI}$$

$$\theta_{C'1} = \theta_{C'2} \quad \frac{M_3 h}{3EI} - \frac{M_4 h}{6EI} - \frac{a}{h} = -\frac{M_3 l}{3EI} + \frac{M_1 l}{6EI}$$

$$\theta_{D1} = \theta_{D2} \quad \frac{M_4 l}{3EI} - \frac{M_3 l}{6EI} - \frac{a}{h} = -\frac{M_4 h}{3EI} + \frac{M_2 h}{6EI}$$

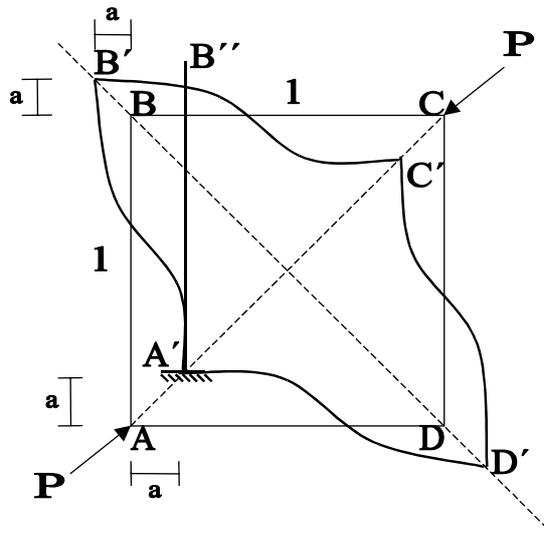
$$\theta_{A1} = \theta_{A2} \quad \frac{M_2 h}{3EI} - \frac{M_1 h}{6EI} - \frac{a}{h} = -\frac{M_2 l}{3EI} + \frac{M_4 l}{6EI}$$

Por equilibrio de nudo se obtienen los axiles y cortantes en las barras.

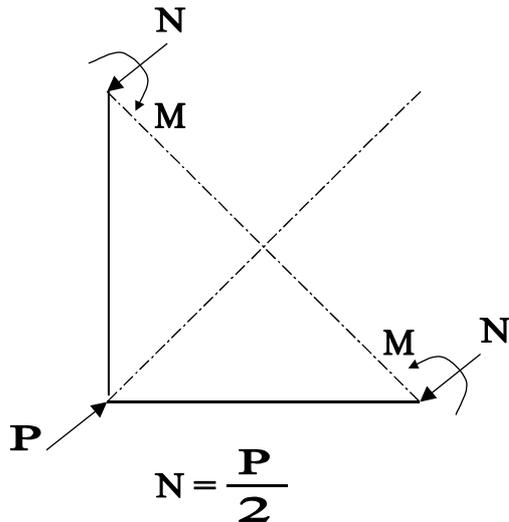


Ejemplos.-

- a) En el marco representado en la figura obtener la ley de momentos flectores producidas por dos cargas iguales y opuestas de valor P aplicadas en los nodos A y C .

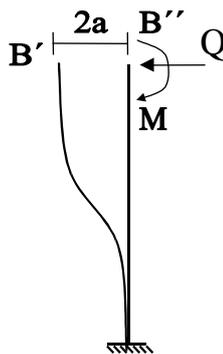


Dadas las características de simetría de la estructura puede plantearse el análisis de la mitad constituida por las barras AD y AB imponiendo el giro nulo de los nudos B y D .



Las dos mitades de la estructura DAB y DCB ejercen una interacción mutua y recíproca consistente en un reacción N (evidentemente igual a $P/2$) y un momento M aplicados ambos en B y en D de forma tal que ambos nudos no giran.

Obsérvese la deformada $A'B'$ de la barra AB. Si el movimiento horizontal \underline{a} del punto A es hacia la derecha, el movimiento horizontal \underline{a} del punto B es hacia la izquierda y, en consecuencia, el movimiento horizontal relativo entre A y B es $2a$. Supuesto empotrado el punto A' y cortada la estructura en B', la barra AB tiene ahora la posición $A'B''$. Para volver la barra $A'B''$ a la posición $A'B'$ es necesario, aplicar las reacciones N y M . Estas reacciones han de conseguir conjuntamente en B'' un movimiento horizontal hasta B' de valor $2a$ y un giro nulo. La reacción N se descompone en un axil y un cortante Q en el extremo B'' de la barra, ambos de valor $N \cos 45 = P/2 \cos 45$.



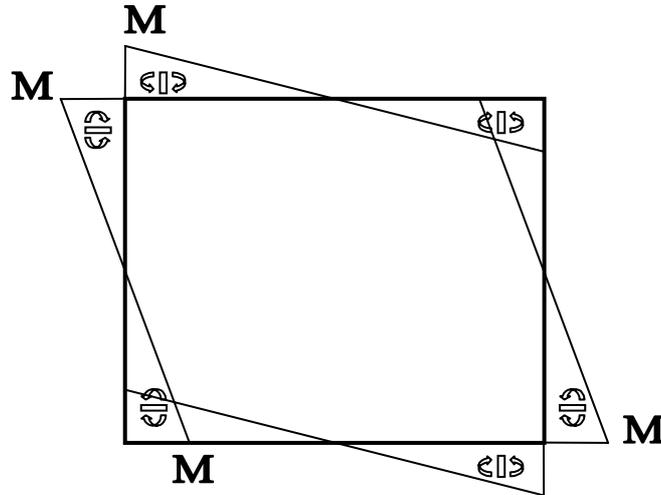
Planteando las condiciones expuestas:

$$\theta_{B''} = Ql^2/(2EI) - Ml/(EI) = 0$$

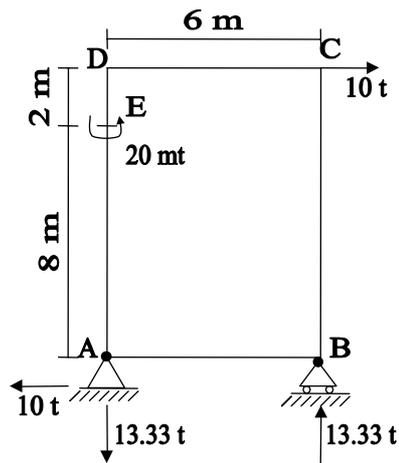
de donde

$$M = P/4 l \cos 45$$

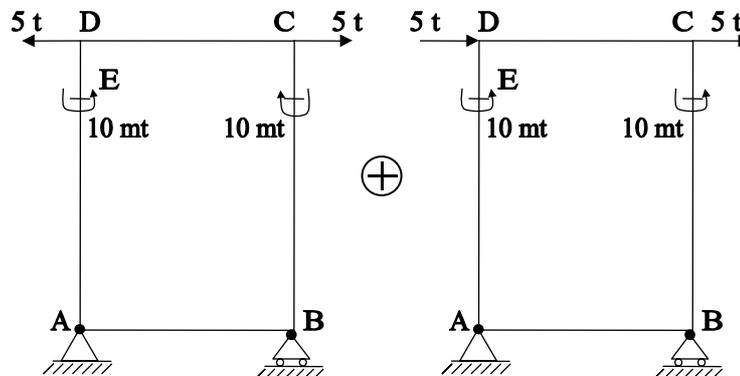
El momento en el extremo empotrado A' es $M_{A'} = Ql - M = Ql/2 = M$ y, por tanto, la ley de momentos flectores es la que se muestra en la figura.



- b) Calcular el marco de la figura siguiente mediante descomposición en un estado simétrico y otro antisimétrico sabiendo que para todas las barras $EI = 10^3 \text{ t}\cdot\text{m}$

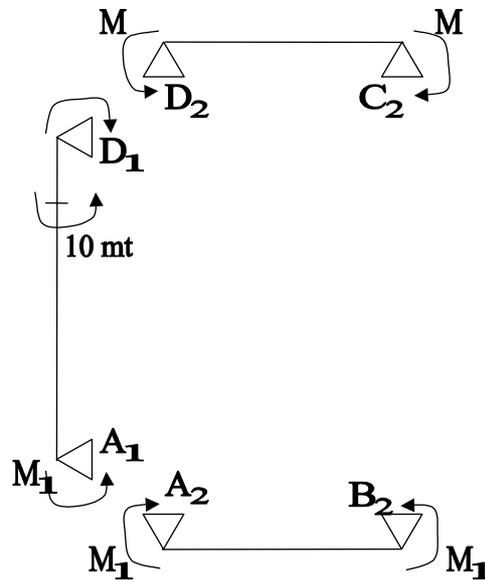


Los estados simétrico y antisimétrico se muestran en la figura siguiente:



Resolución del estado simétrico.-

Descomponiendo en barras y aplicando compatibilidad de giros:

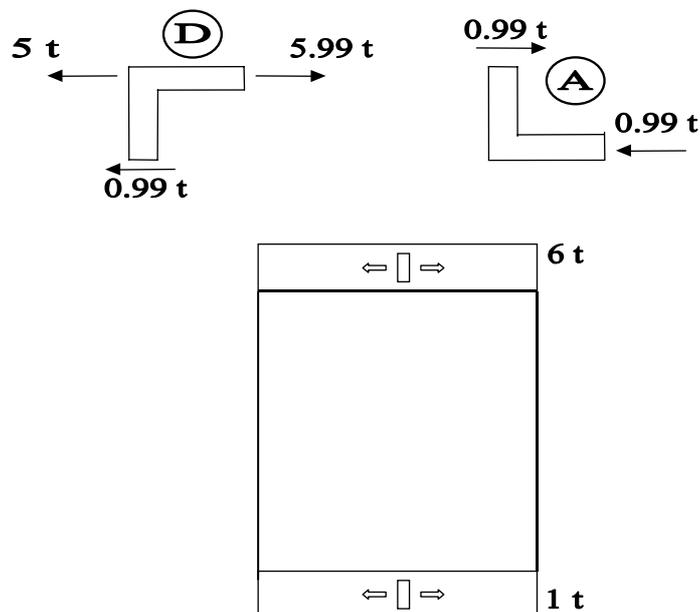


$$\theta_{D_1} = + \left| \frac{10}{6EI \cdot 10} (10^2 - 3.8^2) \right| - \frac{M \cdot 10}{3EI} - \frac{M_1 \cdot 10}{6EI} = \frac{M \cdot 6}{3EI} + \frac{M \cdot 6}{6EI} = \theta_{D_2}$$

$$\theta_{A_1} = - \left| \frac{10}{6EI \cdot 10} (10^2 - 3.2^2) \right| + \frac{M \cdot 10}{6EI} + \frac{M_1 \cdot 10}{3EI} = - \frac{M_1 \cdot 6}{3EI} - \frac{M_1 \cdot 6}{6EI} = \theta_{A_2}$$

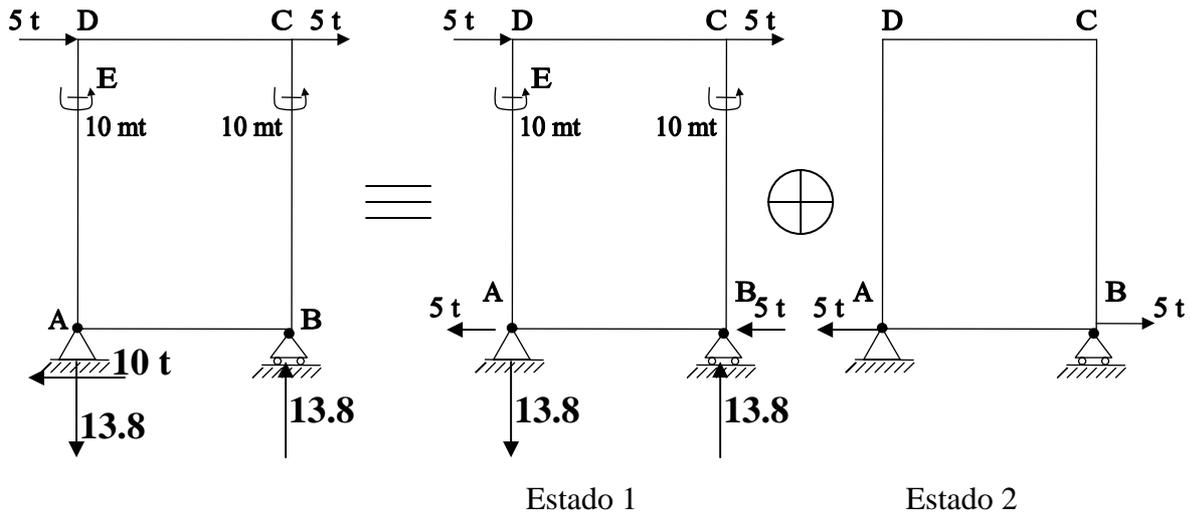
de donde se obtiene $M = 1.94 \text{ mt}$ y $M_1 = 1.8 \text{ mt}$.

Por equilibrio de nudos se obtienen los esfuerzos axiales:

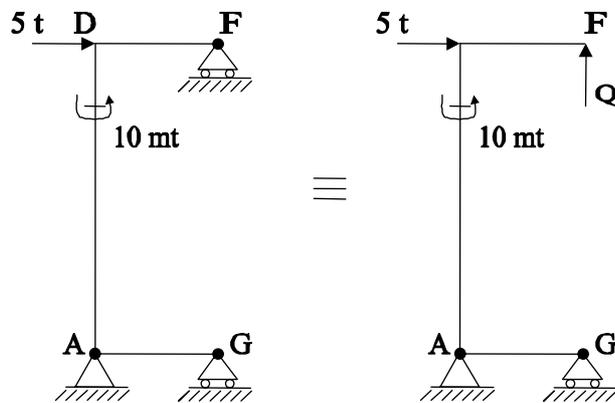


Resolución del estado antimétrico.-

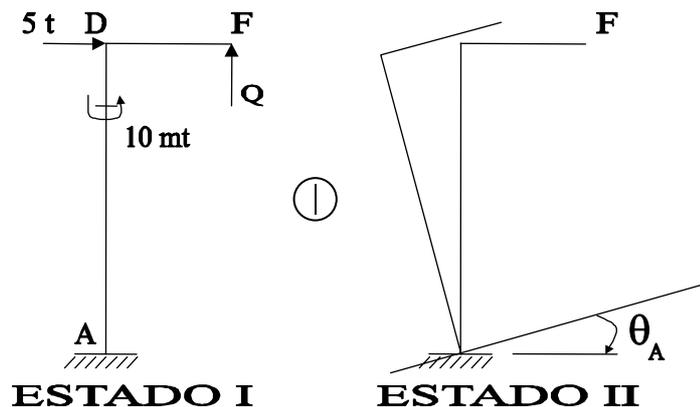
Una vez obtenidas las reacciones en este estado antimétrico, se observa que no hay antimetría de cargas lo cual obliga a desglosar a su vez este estado en la superposición de dos estados. Los movimientos de la estructura se producen en el estado 1; el estado 2 aporta solamente un axil en la barra AB.



A efectos de análisis, en el estado 1 puede considerarse solamente media estructura imponiendo movimientos verticales nulos a los puntos del eje de antimetría.

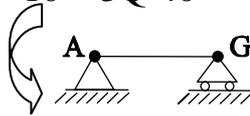


La estructura mitad del pórtico sometida a las cargas iniciales y a la carga Q puede desglosarse en la superposición de dos estados:



siendo el giro θ_A el que se produce en la barra AG sometida en el nodo A al momento que le transmiten las cargas que actúan sobre la estructura.

$$10 + 3Q - 5 \cdot 10 = 3Q - 40$$



Este giro es, (viga biapoyada), $\theta_A = (3Q - 40) \cdot 3 / (3EI)$ y el movimiento vertical del punto F al que este giro da lugar es $(V_F)_{II} = \theta_A \cdot 3$.

En el estado I, el movimiento vertical del punto F se obtienen aplicando el teorema de Mohr generalizado:

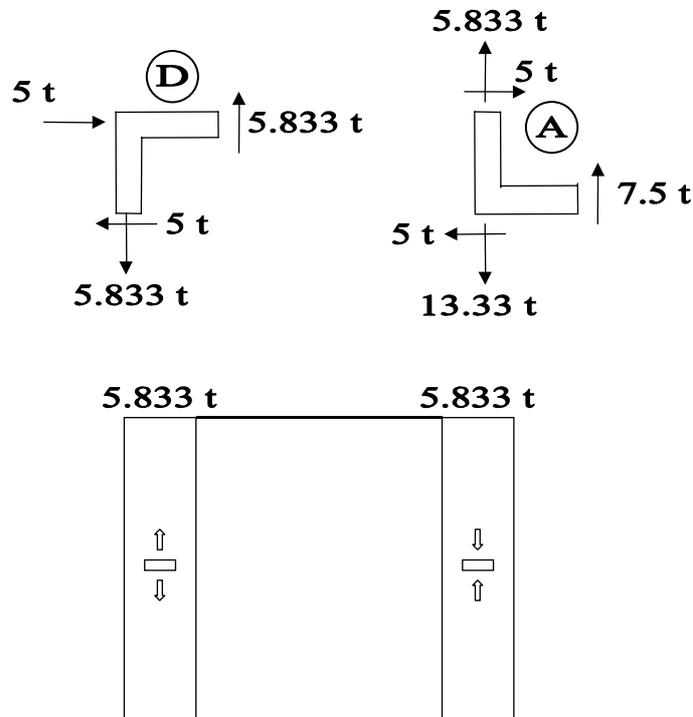
$$(V_F)_I = 1/(EI) [1/2(3Q) \cdot 3.2/3.3 + (3Q) \cdot 10.3 - 1/2(50) \cdot 10.3 + 10.8.3]$$

El movimiento total del punto F es, por tanto, $V_F = (V_F)_I + (V_F)_{II} = 0$, es decir,

$$1/(EI) [1/2(3Q) \cdot 3.2/3.3 + (3Q) \cdot 10.3 - 1/2(50) \cdot 10.3 + 10.8.3] + (3Q - 40) \cdot 3 / (3EI) = 0$$

de donde se obtiene $Q = 5.833 \text{ t}$.

Por equilibrio de nudos se obtienen los esfuerzos axiales:



El esfuerzo axial total en la barra AB es la suma de un axil de 1 t de compresión (estado simétrico) y de un axil de 5 t de tracción (estado asimétrico), es decir es igual a 4t de tracción.