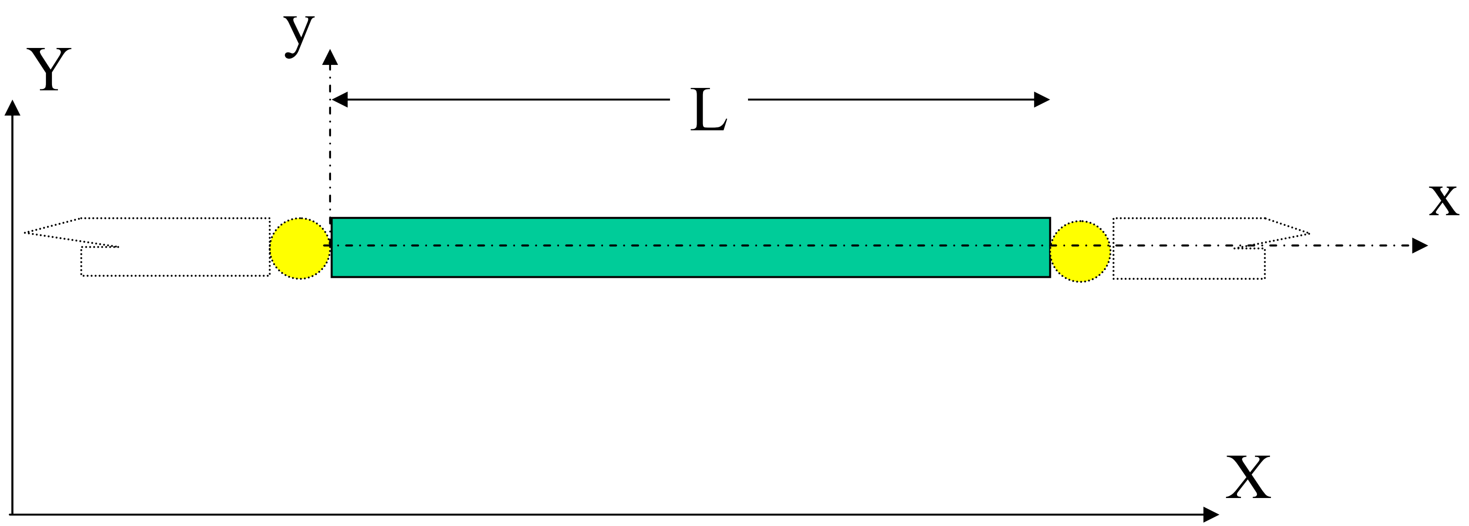
FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS ARTICULADAS

Prof. Carlos Navarro

Departamento de Mecánica de Medios Continuos
y Teoría de Estructuras

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA BIARTICULADA

Sistemas de referencia que vamos a utilizar:

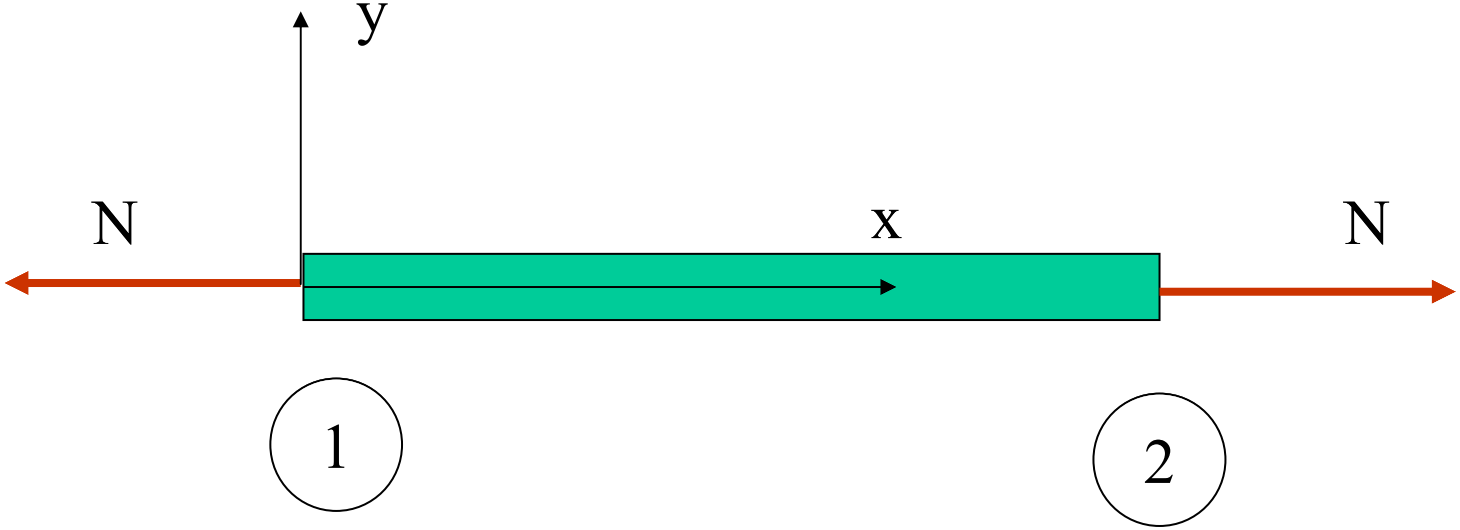


x-y: sistema de ejes locales de la barra

X-Y: sistema de ejes globales de la estructura

Para el cálculo matricial de estructuras de barras es necesario emplear dos sistemas de referencia para expresar todas las magnitudes que intervienen. Por tanto, en todo lo que sigue, supondremos definidos dos sistemas de coordenadas: uno, que denominaremos global, y que será común para todas las barras de la estructura y, para cada una de las barras de la estructura, un sistema de referencia (que denominaremos local) en el que el eje *x* tendrá la dirección de la barra y su sentido vendrá definido desde el que consideremos nudo inicio de la barra al que consideremos nudo final de la misma.

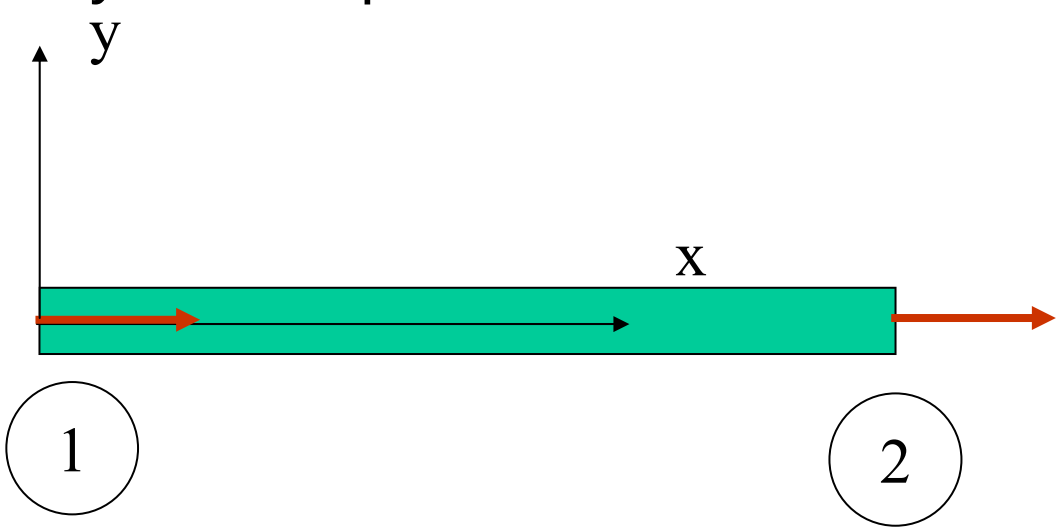
Planteamiento en ejes locales:



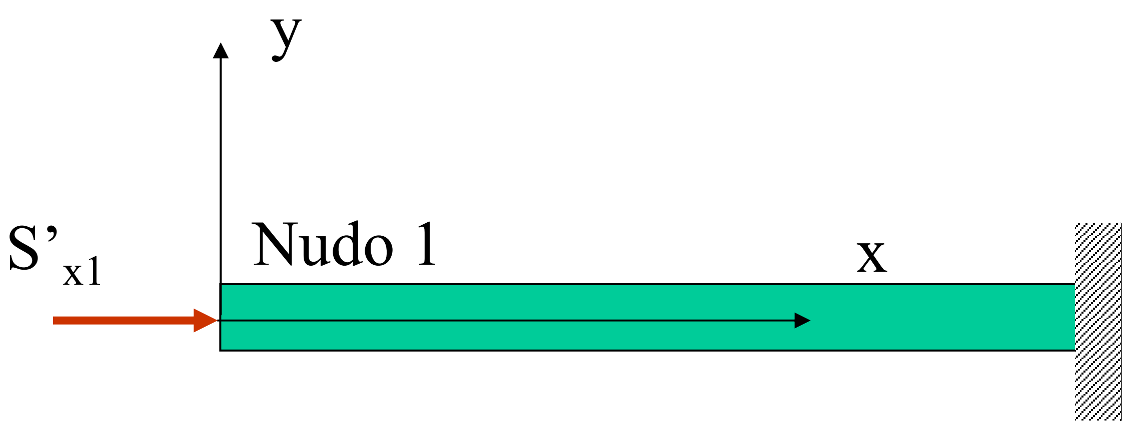
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{L} = \frac{N/A}{E} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{L}{EA}N \quad ó \quad N = \frac{EA}{L}\delta$$

$$k = \frac{EA}{L} \quad y \quad N = k\delta$$

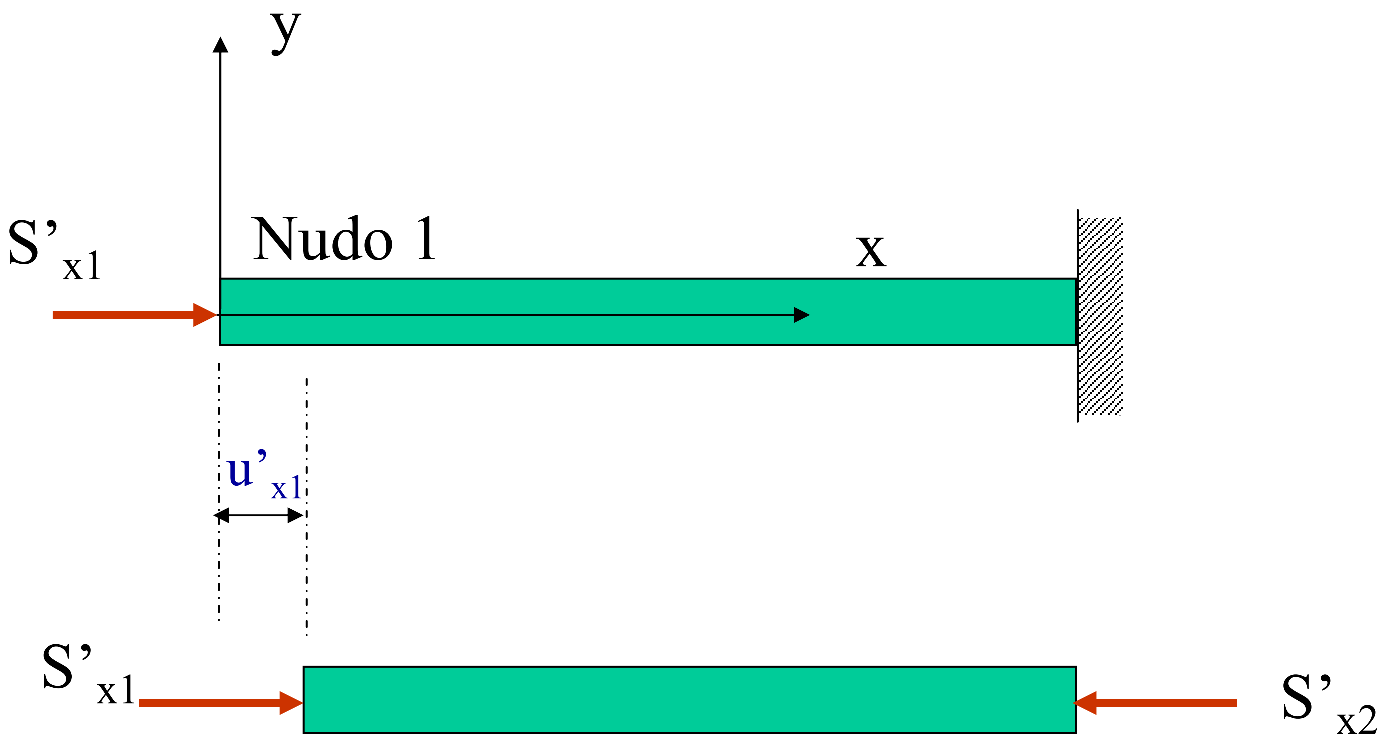
Nudos de la barra y sus desplazamientos:



Manteniendo el nudo 2 fijo, veamos qué fuerza es necesaria aplicar en el nudo 1 para conseguir un desplazamiento u_1 en dicho nudo:



Emplearemos el símbolo “prima” cuando queramos a magnitudes referidas a los ejes locales de la barra

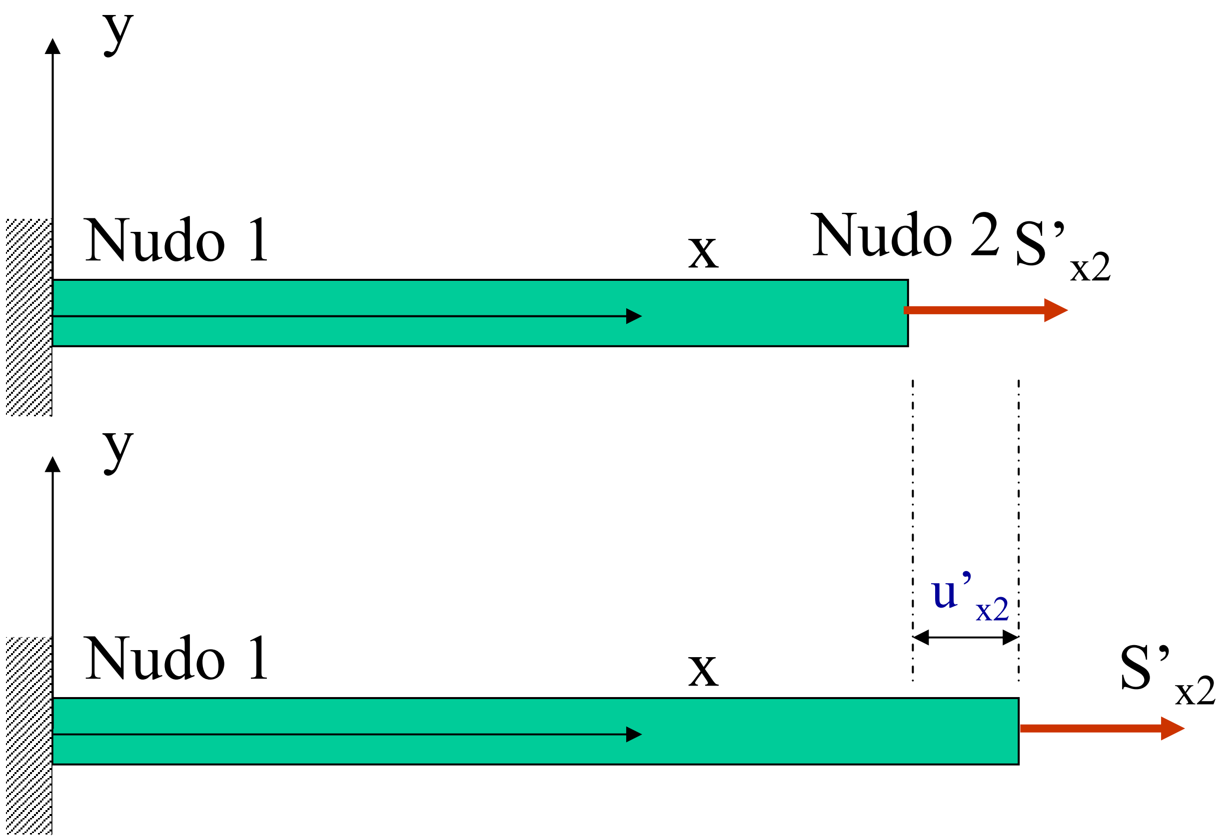


$$S'_{x1} = k \cdot u'_{x1}$$ Ec. (1)

Pero en el nudo 2 aparecerá una fuerza horizontal S'_{x2} de valor igual a la anterior pero de signo contrario

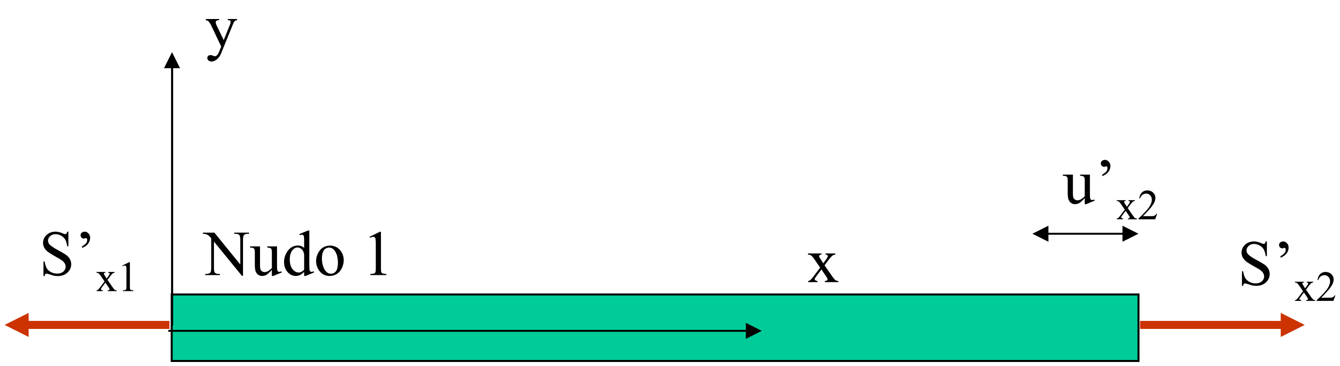
$$S'_{x2} = -k \cdot u'_{x1}$$ Ec. (2)

Hagamos lo mismo para el nudo 2 manteniendo el nudo 1 fijo:



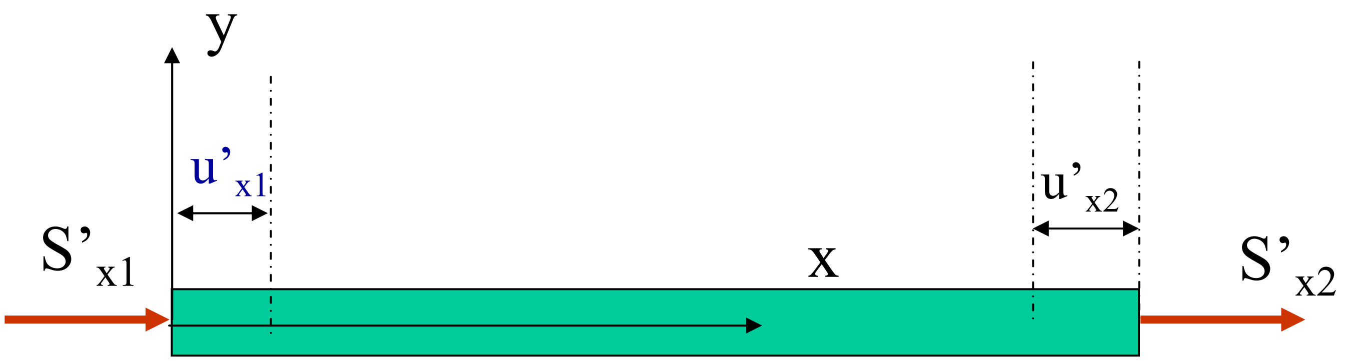
$$S'_{x2} = k \cdot u'_{x2}$$ Ec. (3)

Para equilibrar esta fuerza (S'_{x2}) en el nudo 1 tendrá que actuar una fuerza igual y de signo contrario a la anterior, por lo que:



$$S'_{x1} = -k \cdot u'_{x2} \quad \text{Ec. (4)}$$

Si planteáramos un estado de cargas y de desplazamientos genéricos sobre la barra que estamos analizando:



podríamos escribir:

$$\begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{x1} \\ u'_{x2} \end{Bmatrix}$$

$$\{S'\} = \left[K^e\right]\{u'\}$$

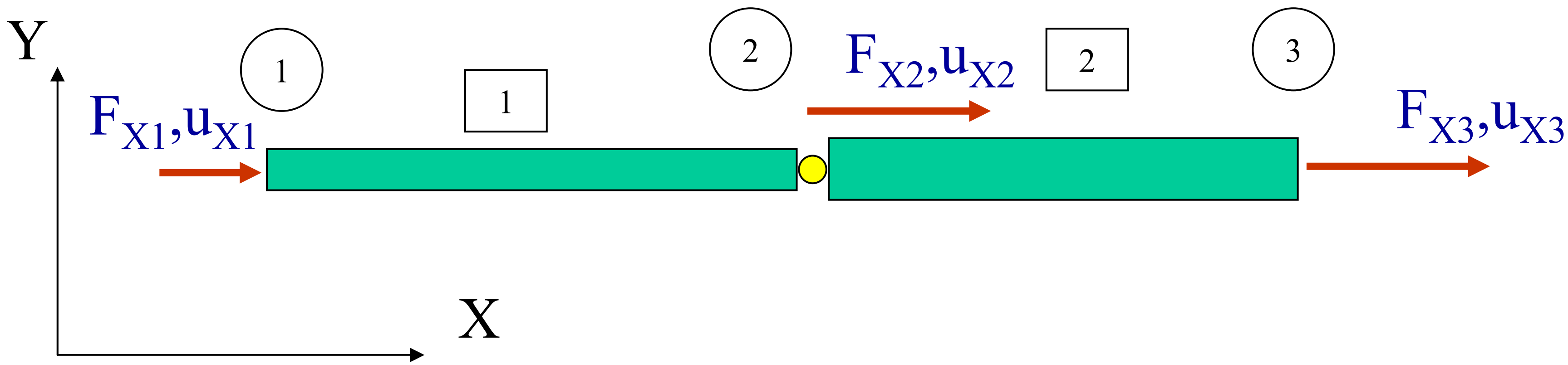
Vector desplazamiento de los nudos en ejes locales

Vector de cargas en los nudos en ejes locales

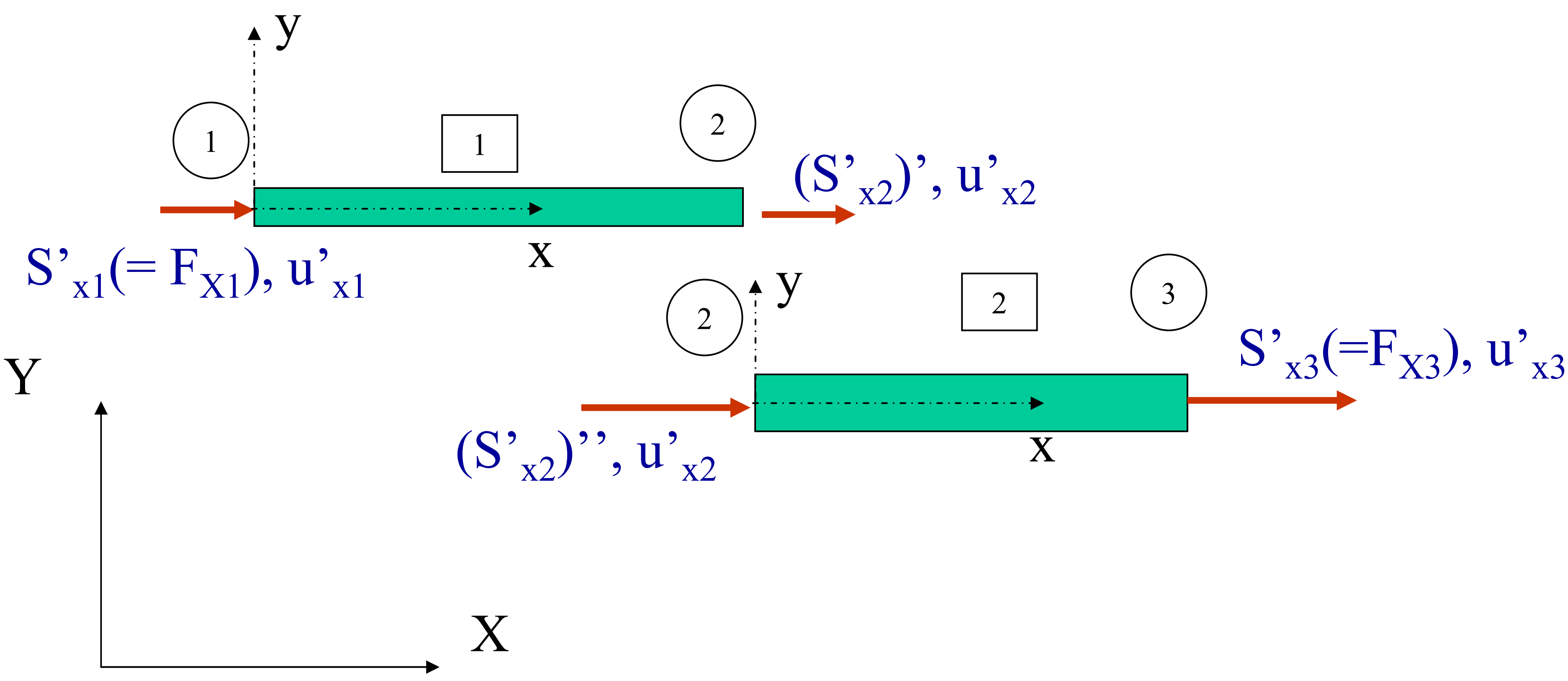
Matriz de rigidez del elemento en ejes locales de la barra

CASO DE UNA ESTRUCTURA ARTICULADA DE DOS BARRAS ALINEADAS

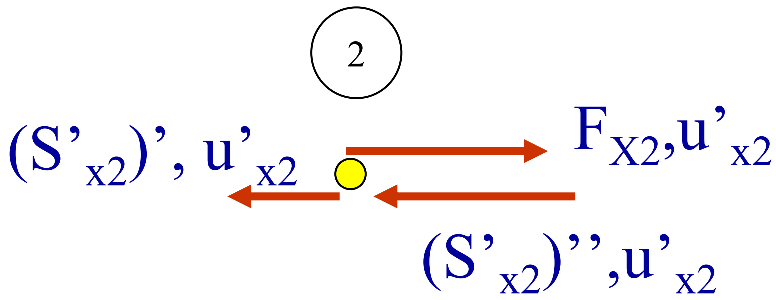
Analicemos, ahora el problema mostrado en la figura:



Si, para cada una de las barras, se considera que su nudo origen coincide con el nudo de numeración más baja de la estructura, y su nudo final con el de numeración más alta, los ejes globales de la estructura y los locales de cada barra son paralelos.



EQUILIBRIO DEL NUDO 2:



Ecuación fuerza-desplazamiento para la barra 1 (ejes locales):

$$\begin{Bmatrix} F_{X1} = S'_{x1} \\ (S'_{x2})' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{x1} = u_{X1} \\ u'_{x2} = u_{X2} \end{Bmatrix}$$

Ecuación fuerza-desplazamiento para la barra 2 (ejes locales):

$$\begin{Bmatrix} (S'_{x2})'' \\ F_{X3} = S'_{x3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{x2} = u_{X2} \\ u'_{x3} = u_{X3} \end{Bmatrix}$$

Elemento 1 $$\begin{Bmatrix} F_{X1} \\ (S'_{x2})' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y2} \end{Bmatrix}$$

Elemento 2 $$\begin{Bmatrix} (S'_{x2})'' \\ F_{X3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X2} \\ u_{X3} \end{Bmatrix}$$

Como quiera que tenemos tres nudos en este problema vamos a añadir una línea más a las ecuaciones matriciales que hemos planteado de manera tal que:

Elemento 1
$$\begin{Bmatrix} F_{X1} \\ (S'_{x2})' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y2} \end{Bmatrix}$$

Elemento 2
$$\begin{Bmatrix} (S'_{x2})'' \\ F_{X3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X2} \\ u_{X3} \end{Bmatrix}$$

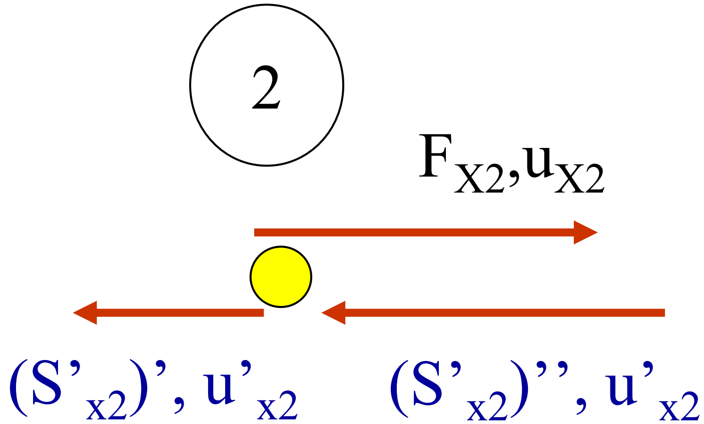
Elemento 1
$$\begin{Bmatrix} F_{X1} \\ (S'_{x2})' \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{X2} \\ u_{X3} \end{Bmatrix}$$

Elemento 2
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ (S'_{x2})'' \\ F_{X3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{X2} \\ u_{X3} \end{Bmatrix}$$

Si, ahora sumamos ambas ecuaciones matriciales (proceso conocido como ensamblaje en el análisis matricial de estructuras), tendríamos:

$$\begin{Bmatrix} F_{X1} \\ (S'_{x2})' + (S'_{x2})'' \\ F_{X3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{X2} \\ u_{X3} \end{Bmatrix}$$

Como el nudo de conexión de las dos barras (nudo 2) debe estar en equilibrio, debe verificarse que:



$$\boxed{S'_{x2} + S''_{x2} = F_{X2}}$$

Por tanto, podemos plantear en ejes globales de la estructura:

Vector de cargas exteriores en nudos

Vector de desplazamientos nodales

$$\begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{X2} \\ F_{X3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{X2} \\ u_{X3} \end{Bmatrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura

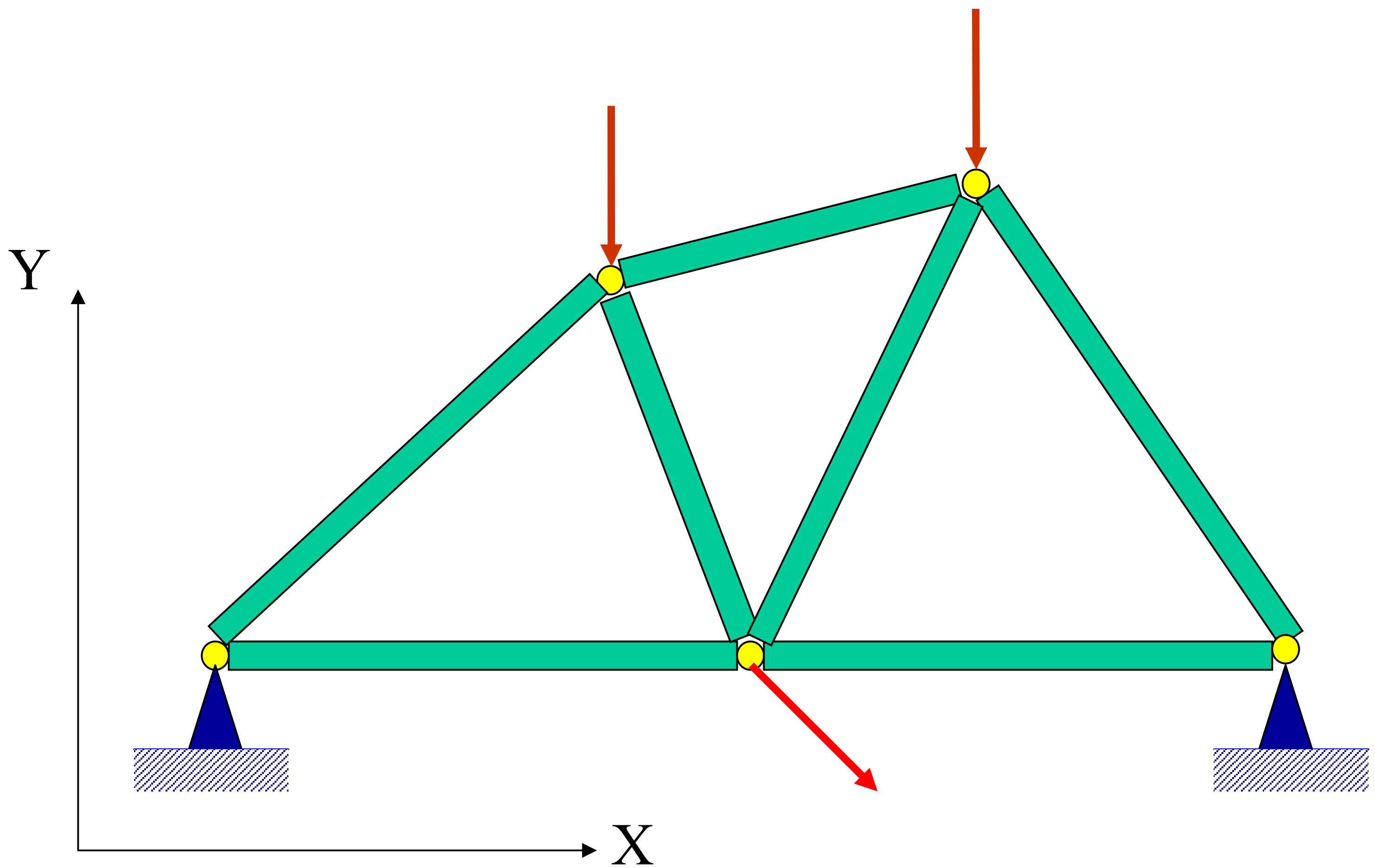
Vector de cargas exteriores en nudos

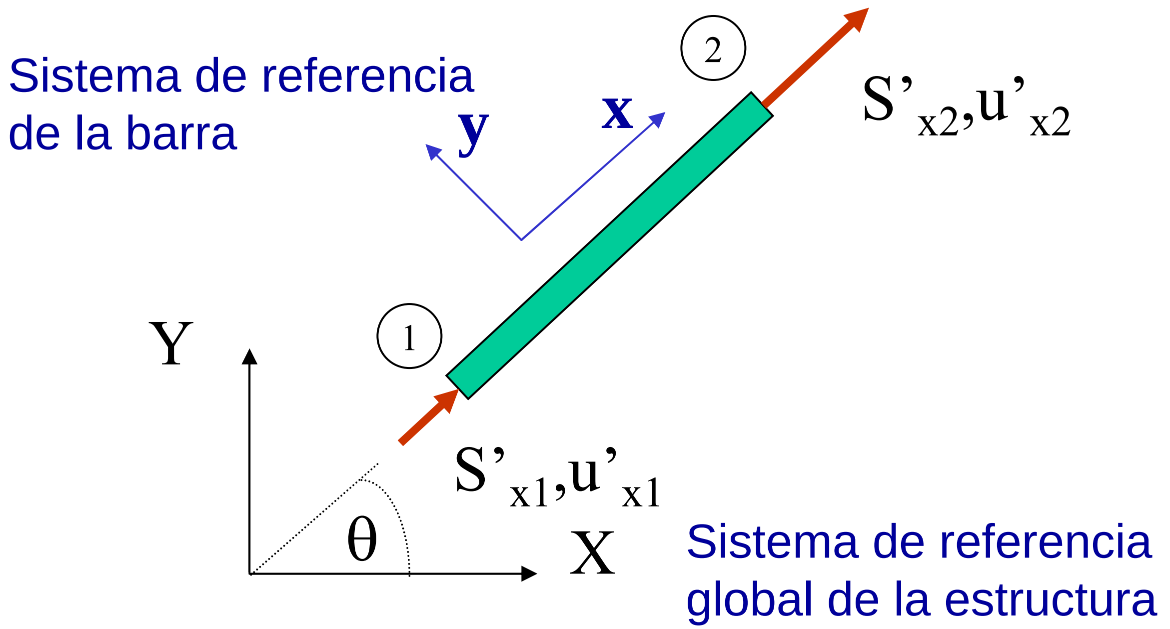
Vector de desplazamientos nodales

$$\{F\} = [K]\{u\}$$

Matriz de rigidez de la estructura

Pero la estructura que tengamos que calcular puede ser más complicada que la que acabamos de ver:

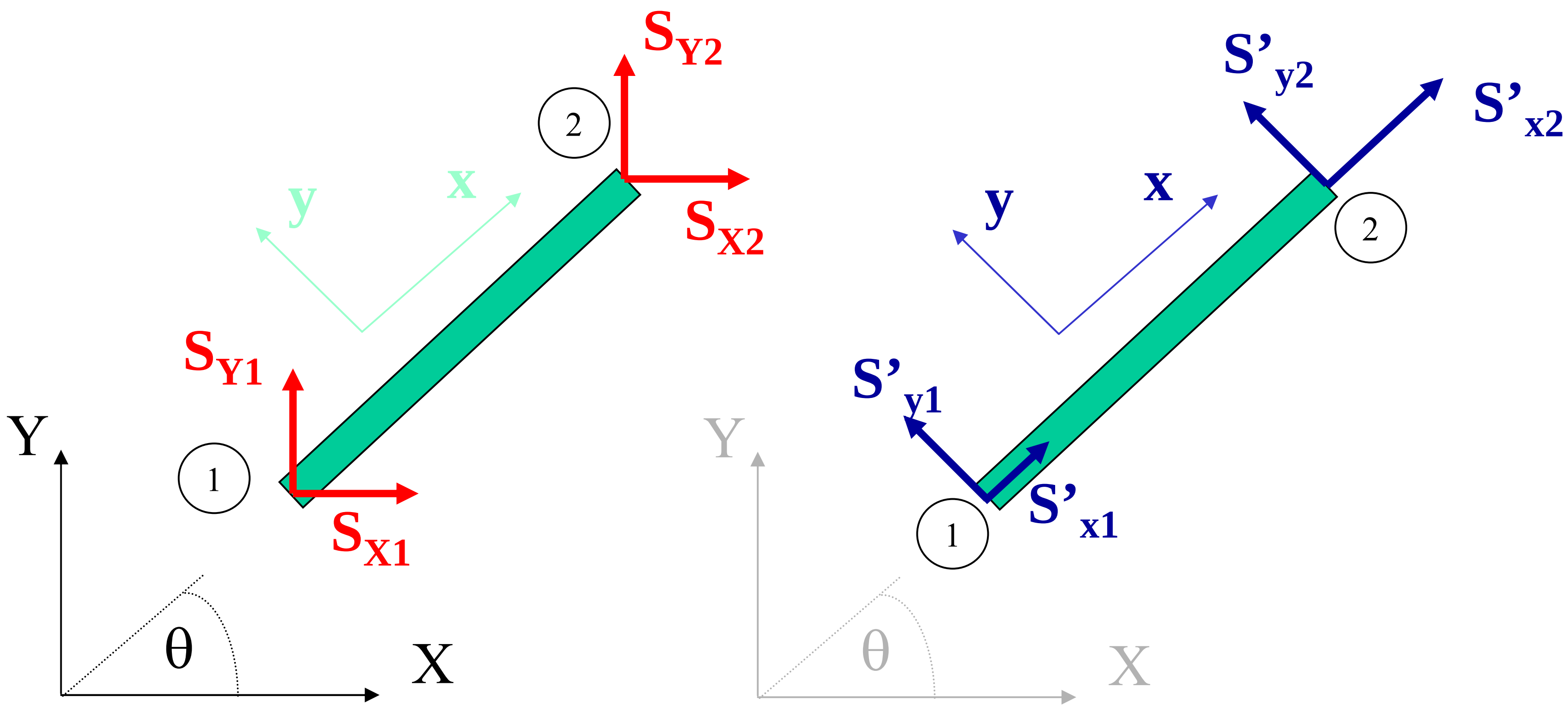


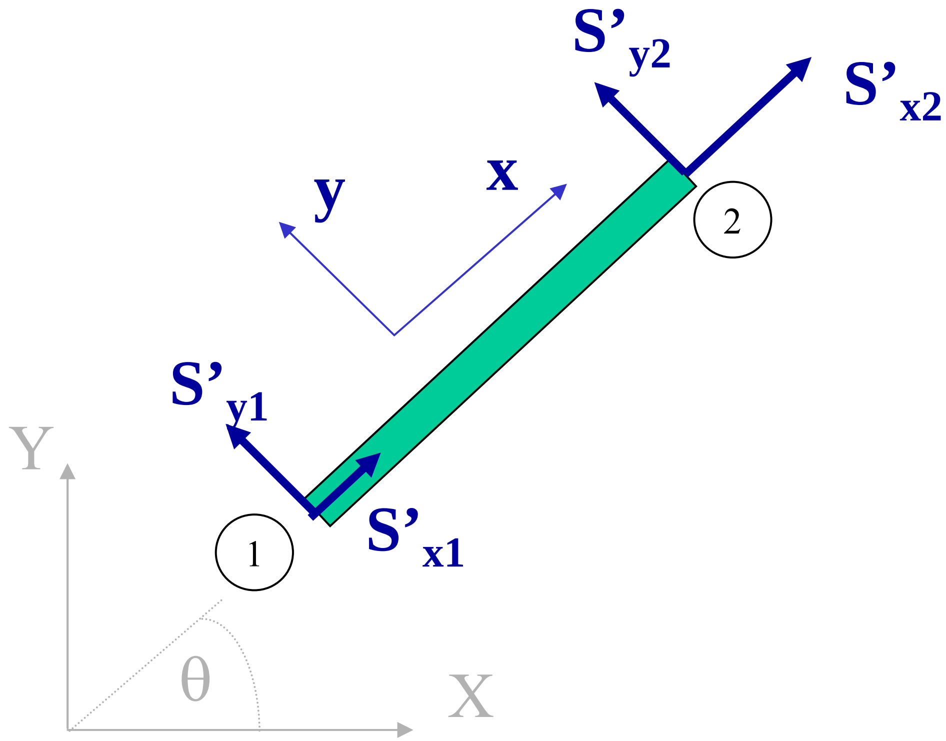


Relación entre fuerzas en extremos de barra y desplazamientos nodales (en ejes locales):

$$\begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{x2} \\ S'_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{x1} \\ u'_{y1} \\ u'_{x2} \\ u'_{y2} \end{Bmatrix}$$

Relación entre las fuerzas en los extremos de barra, en ejes globales,
y las mismas expresadas en ejes locales. (Paso de ejes globales a locales)





$$S'_{x1} = S_{X1}\cos\theta + S_{Y1}\mathrm{sen}\,\theta$$

$$S'_{y1} = -S_{X1}\mathrm{sen}\,\theta + S_{Y1}\cos\theta$$

$$S'_{x2} = S_{X2}\cos\theta + S_{Y2}\mathrm{sen}\,\theta$$

$$S'_{y2} = -S_{X2}\mathrm{sen}\,\theta + S_{Y2}\cos\theta$$

$$
\begin{aligned}
S'_{x1} &= S_{X1}\cos\theta + S_{Y1}\operatorname{sen}\theta \\
S'_{y1} &= -S_{X1}\operatorname{sen}\theta + S_{Y1}\cos\theta \\
S'_{x2} &= S_{X2}\cos\theta + S_{Y2}\operatorname{sen}\theta \\
S'_{y2} &= -S_{X2}\operatorname{sen}\theta + S_{Y2}\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
c = \cos\theta
$$

$$
s = \operatorname{sen}\theta
$$

Vector de fuerzas nodales en coordenadas locales

Vector de fuerzas nodales en coordenadas globales

$$
\begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{x2} \\ S'_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{X1} \\ S_{Y1} \\ S_{X2} \\ S_{Y2} \end{Bmatrix}
$$

$$\{S'\}_{ejes\ locales} = [T]^T \{S\}_{ejes\ globales} \qquad \{S'\} = [T]^T \{S\}$$

$$[\boldsymbol{T}]^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{s} & 0 & 0 \\ -\boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{s} \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

$$\{S\}_{ejes\ globales} = [T]\{S'\}_{ejes\ locales} \qquad \{S\} = [T]\{S'\}$$

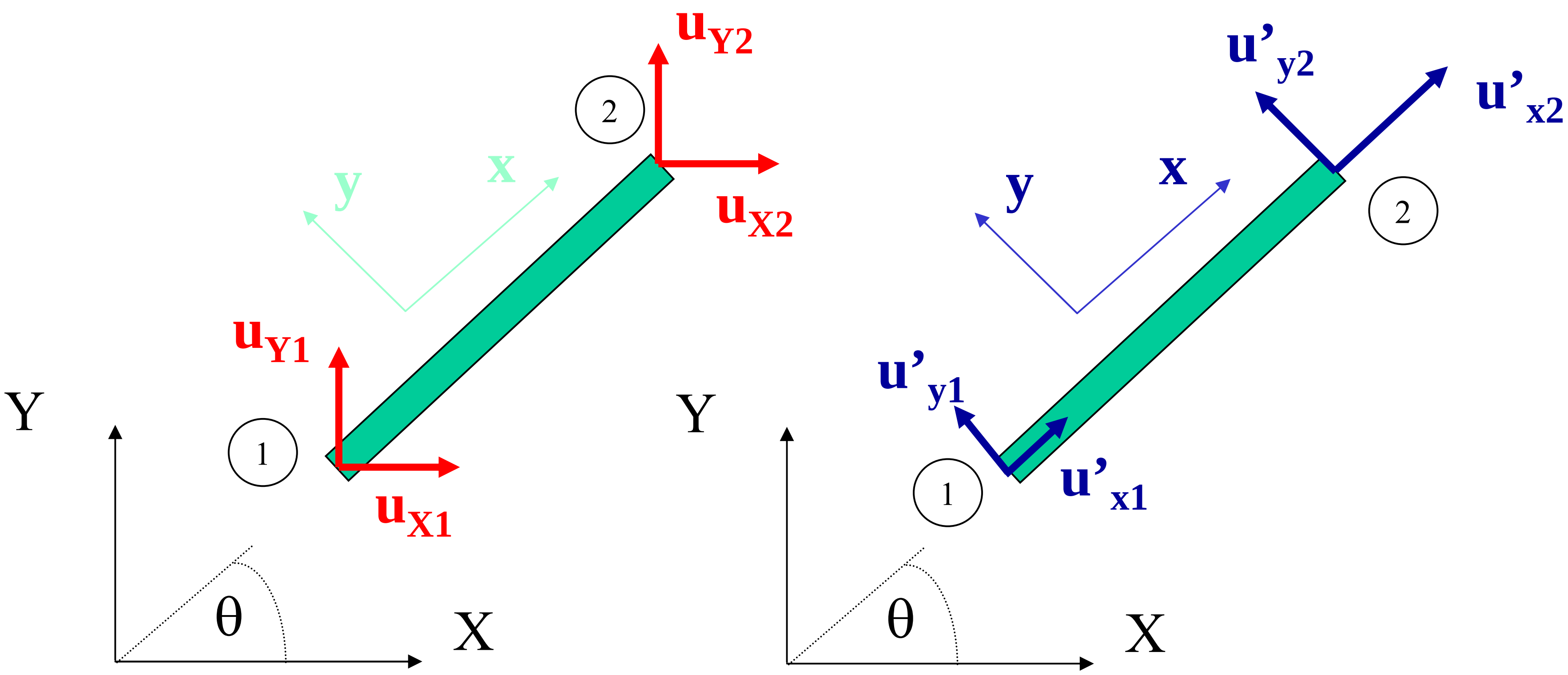
$$[\boldsymbol{T}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & -\boldsymbol{s} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{c} & -\boldsymbol{s} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

Propiedad importante de la matriz de transformación T

La matriz de transformación T es ortogonal: su inversa coincide con su transpuesta

$$\boxed{\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}}}$$

Relación entre los desplazamientos en los extremos de barra, en ejes locales, y los mismos expresados en ejes globales.



Relación entre los desplazamientos en los extremos de barra, en ejes locales, y los mismos expresados en ejes globales.

$$\begin{Bmatrix} u'_{x1} \\ u'_{y1} \\ u'_{x2} \\ u'_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \end{Bmatrix}$$

Vector de desplazamientos nodales en ejes locales

Vector de desplazamientos nodales en ejes globales

$$\{u'\}_{ejes\ locales} = [T]^T \{u\}_{ejes\ globales} \qquad \{\boldsymbol{u'}\} = [\boldsymbol{T}]^T \{\boldsymbol{u}\}$$

$$[\boldsymbol{T}]^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{s} & 0 & 0 \\ -\boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{s} \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

$$\{u\}_{ejes\ globales} = [T]\{u'\}_{ejes\ locales} \qquad \{\boldsymbol{u}\} = [\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{u'}\}$$

$$[\boldsymbol{T}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & -\boldsymbol{s} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{c} & -\boldsymbol{s} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

$$\{u'\}_{ejes\ locales} = [T]^T \{u\}_{ejes\ globales}$$

$$\{S'\}_{ejes\ locales} = [T]^T \{S\}_{ejes\ globales} = [K^e][T]^T \{u\}_{ejes\ globales}$$

y, como:

$$\{S\} = [T]\{S'\}$$

$$\{S\}_{ejes\ globales} = [T][K^e][T]^T \{u\}_{ejes\ globales}$$

ó:

$$\{S\} = [T][K^e][T]^T \{u\}$$

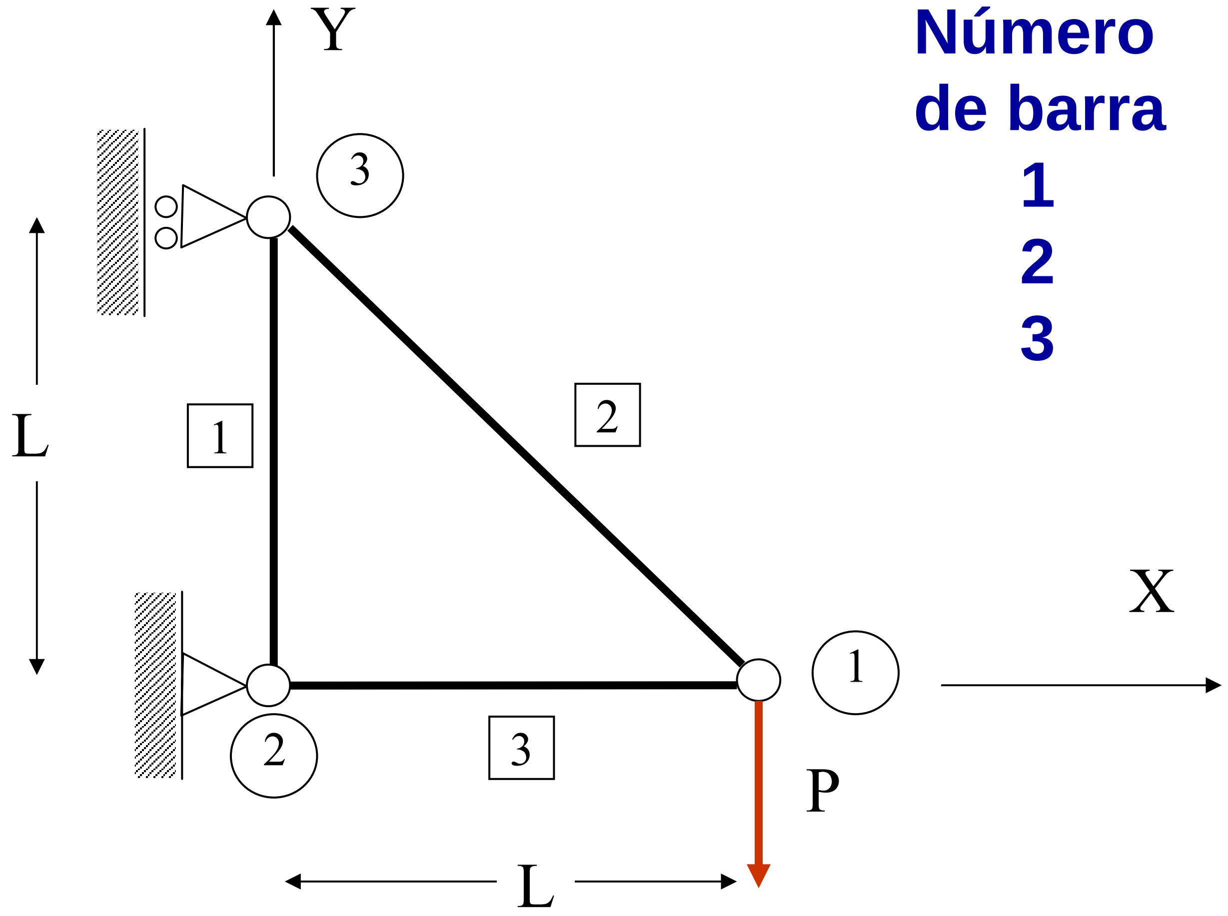
$$\left[\boldsymbol{K}^{e}\right]_{\textit{ejes globales}} = \left[\boldsymbol{T}\right]\left[\boldsymbol{K}^{e}\right]_{\textit{ejes locales}} \left[\boldsymbol{T}\right]^{T}$$

$$\left\{S\right\}_{\textit{ejes globales}} = \left[K^{e}\right]_{\textit{ejes globales}} \left\{u\right\}_{\textit{ejes globales}}$$

$$\left[K^{e}\right]_{\textit{ejes globales}} = k\begin{bmatrix} c^{2} & cs & -c^{2} & -cs \\ cs & s^{2} & -cs & -s^{2} \\ -c^{2} & -cs & c^{2} & cs \\ -cs & -s^{2} & cs & s^{2} \end{bmatrix}$$

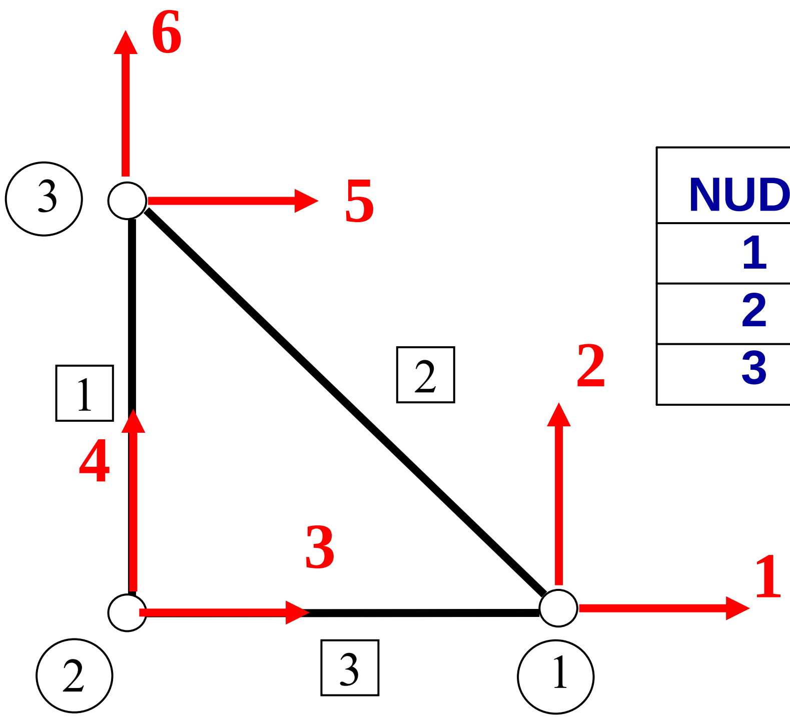
siendo: $k = \dfrac{EA}{L}$

EJEMPLO:



Número de barra	Área
1	A
2	2A
3	A

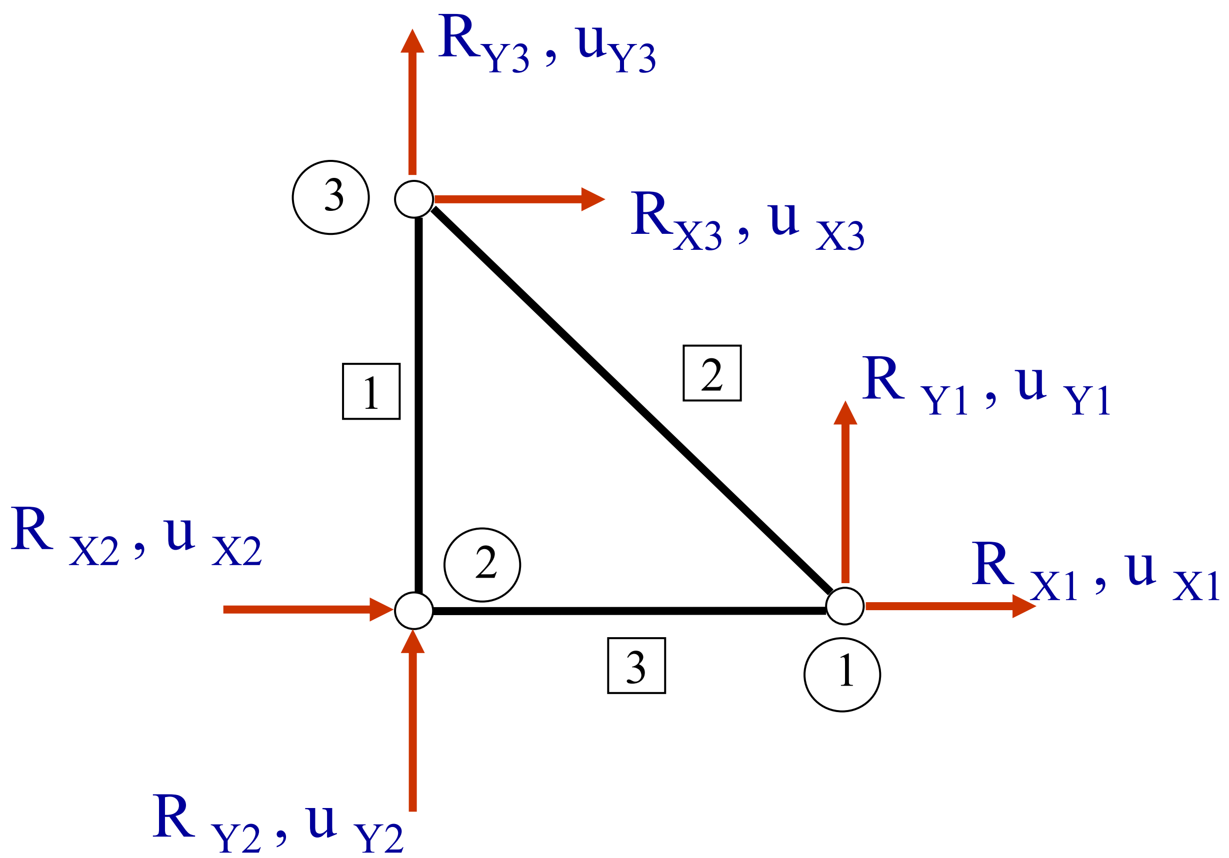
GDL DEL SISTEMA ESTRUCTURAL



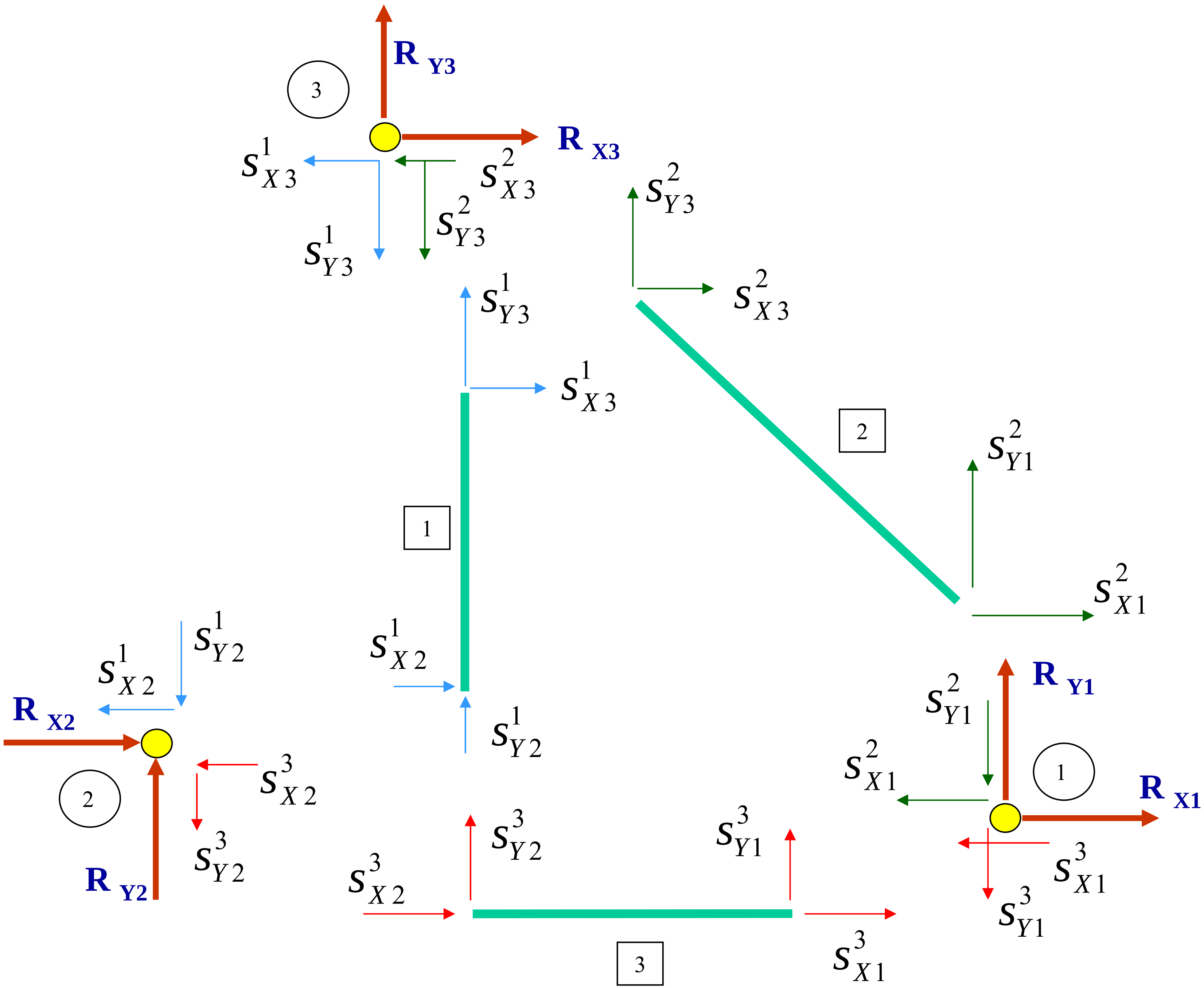
	GDL's	
NUDO	HORIZONTAL (X)	VERTICAL (Y)
1	1	2
2	3	4
3	5	6

	CONEXIONES	
BARRAS	NUDO INICIAL	NUDO FINAL
1	2	3
2	1	3
3	2	1

Fuerzas y desplazamientos (*) en los nudos de la estructura expresados en ejes globales



(*) Se está realizando un planteamiento general en lo que sigue. Si alguna componente de fuerza o desplazamiento resultara ser nula, posteriormente será anulada.



R_{Y3}
3
R_{X3}
S^{1}_{X3}
S^{2}_{X3}
S^{2}_{Y3}
S^{1}_{Y3}
S^{2}_{Y3}
S^{2}_{X3}
S^{1}_{Y3}
S^{1}_{X3}
2
S^{2}_{Y1}
1
S^{2}_{X1}
S^{1}_{Y2}
S^{1}_{X2}
S^{1}_{X2}
R_{X2}
R_{Y1}
S^{2}_{Y1}
S^{1}_{Y2}
S^{2}_{X1}
1
R_{X1}
S^{3}_{X2}
2
S^{3}_{Y2}
S^{3}_{Y2}
S^{3}_{Y1}
S^{3}_{X1}
S^{3}_{Y1}
R_{Y2}
S^{3}_{X2}
3
S^{3}_{X1}

Relación entre fuerzas y desplazamientos nodales en ejes globales:

Elemento 1

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{S}_{X2}^{1} \\ \boldsymbol{S}_{Y2}^{1} \\ \boldsymbol{S}_{X3}^{1} \\ \boldsymbol{S}_{Y3}^{1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{k} & 0 & -\boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{k} & 0 & \boldsymbol{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_{X2} \\ \boldsymbol{u}_{Y2} \\ \boldsymbol{u}_{X3} \\ \boldsymbol{u}_{Y3} \end{Bmatrix}$$

Elemento 2

$$\begin{Bmatrix} S_{X1}^{2} \\ S_{Y1}^{2} \\ S_{X3}^{2} \\ S_{Y3}^{2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}$$

Elemento 3

$$\begin{Bmatrix} S_{X2}^{3} \\ S_{Y2}^{3} \\ S_{X1}^{3} \\ S_{Y1}^{3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X1} \\ u_{Y1} \end{Bmatrix}$$

EXPANSIÓN DE LAS RELACIONES ANTERIORES:

Elemento 1

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{X2}^{1} \\ S_{Y2}^{1} \\ S_{X3}^{1} \\ S_{Y3}^{1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}$$

Elemento 2

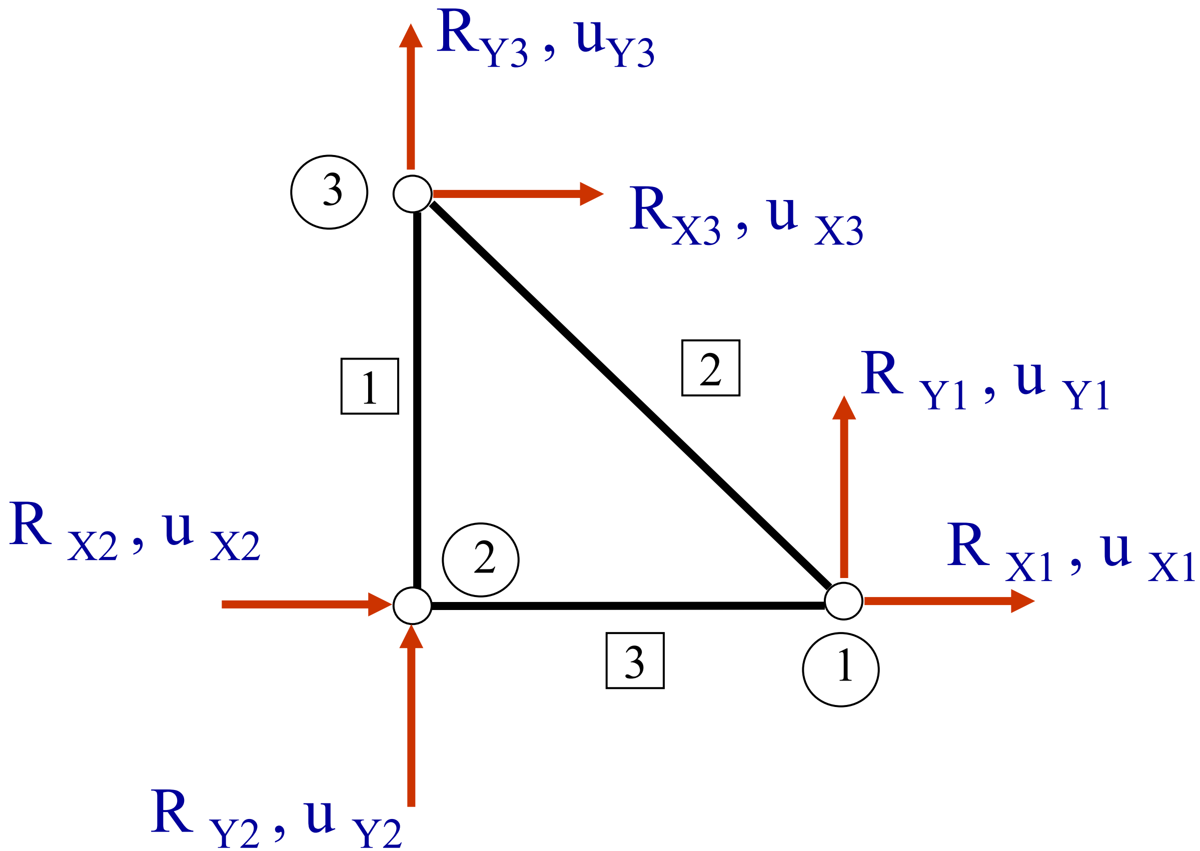
$$\begin{Bmatrix} S_{X1}^{2} \\ S_{Y1}^{2} \\ 0 \\ 0 \\ S_{X3}^{2} \\ S_{Y3}^{2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & 0 & 0 & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & 0 & 0 & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}$$

Elemento 3

$$
\begin{Bmatrix} S^3_{X1} \\ S^3_{Y1} \\ S^3_{X2} \\ S^3_{Y2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}
$$

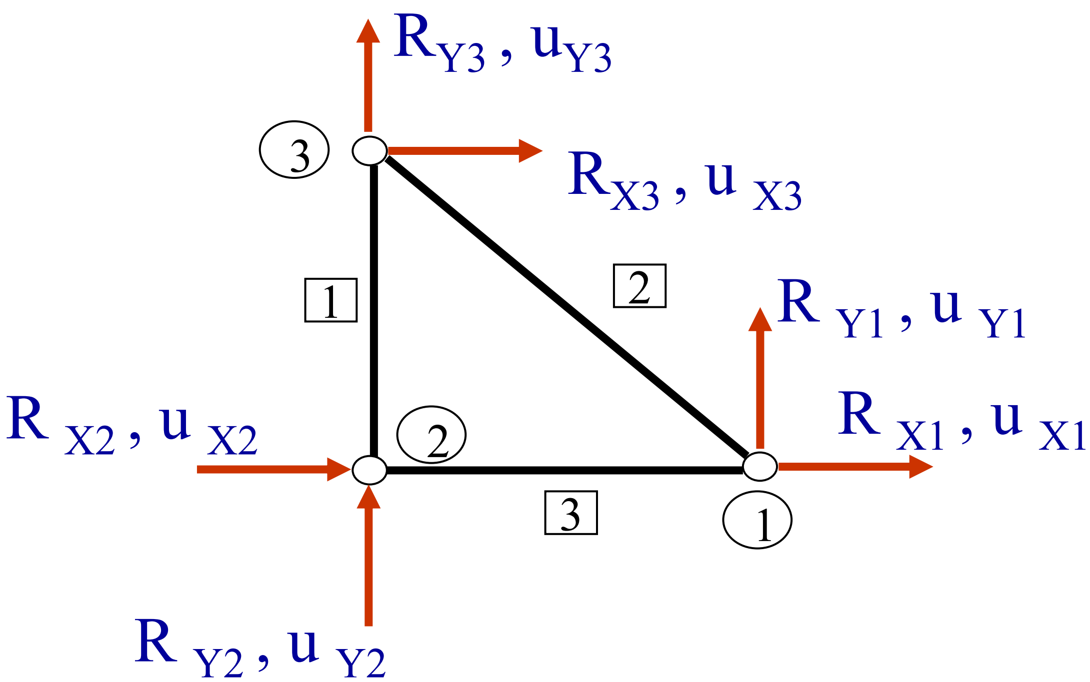
Sumando las ecuaciones matriciales anteriores:

$$\begin{Bmatrix} S^2_{X1}+S^3_{X1} \\ S^2_{Y1}+S^3_{Y1} \\ S^1_{X2}+S^3_{X2} \\ S^1_{Y2}+S^3_{Y2} \\ S^1_{X3}+S^2_{X3} \\ S^1_{Y3}+S^2_{Y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2}+k & -k/\sqrt{2} & -k & 0 & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -k \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & 0 & -k & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2}+k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}$$

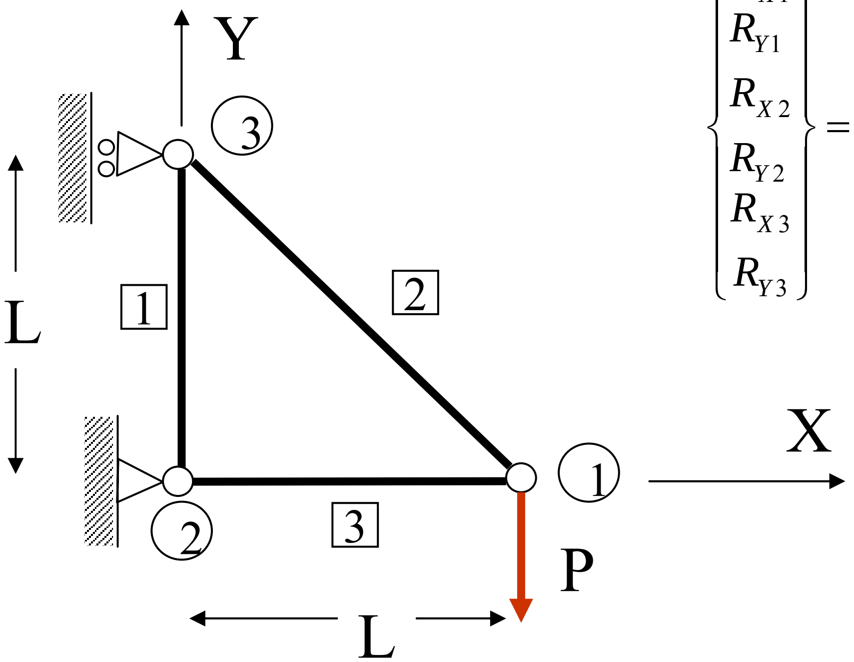


Equilibrio de nudos:

$$\begin{Bmatrix} S^2_{X1} + S^3_{X1} \\ S^2_{Y1} + S^3_{Y1} \\ S^1_{X2} + S^3_{X2} \\ S^1_{Y2} + S^3_{Y2} \\ S^1_{X3} + S^2_{X3} \\ S^1_{Y3} + S^2_{Y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{X1} \\ R_{Y1} \\ R_{X2} \\ R_{Y2} \\ R_{X3} \\ R_{Y3} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} R_{X1} \\ R_{Y1} \\ R_{X2} \\ R_{Y2} \\ R_{X3} \\ R_{Y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2}+k & -k/\sqrt{2} & -k & 0 & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -k \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & 0 & -k & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2}+k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} R_{X1} \\ R_{Y1} \\ R_{X2} \\ R_{Y2} \\ R_{X3} \\ R_{Y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{\sqrt{2}}+k & -\frac{k}{\sqrt{2}} & -k & 0 & -\frac{k}{\sqrt{2}} & \frac{k}{\sqrt{2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{2}} & \frac{k}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{k}{\sqrt{2}} & -\frac{k}{\sqrt{2}} \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -k \\ -\frac{k}{\sqrt{2}} & \frac{k}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{k}{\sqrt{2}} & -\frac{k}{\sqrt{2}} \\ \frac{k}{\sqrt{2}} & -\frac{k}{\sqrt{2}} & 0 & -k & -\frac{k}{\sqrt{2}} & \frac{k}{\sqrt{2}}+k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}$$

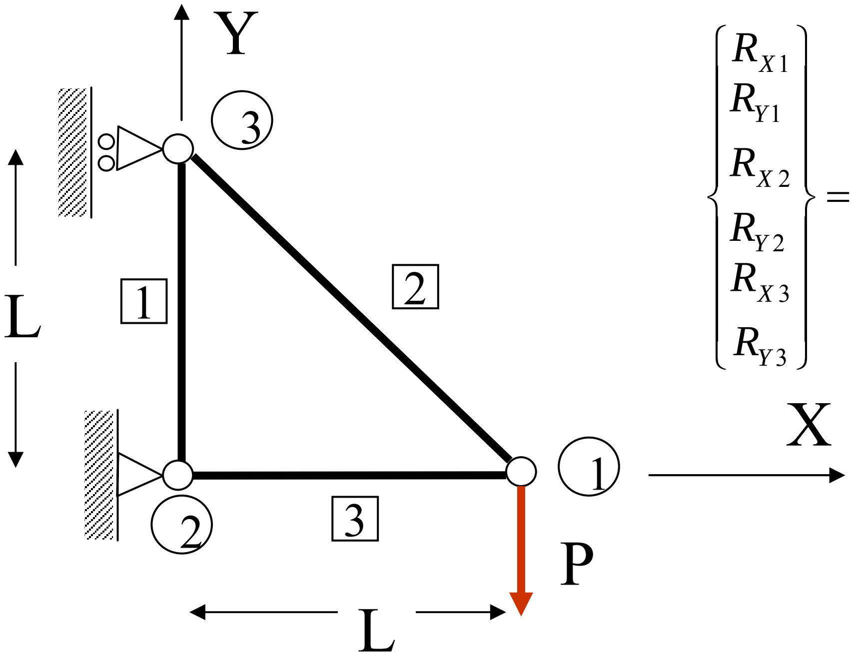
a) *En relación a las fuerzas exteriores* (teniendo en cuenta las ligaduras a que se encuentra sometida la estructura):

$R_{X1} = 0$, pues no hay fuerza exterior aplicada en el nudo 1 según el eje *X*.

$R_{Y1} = -P$, que es la fuerza exterior aplicada a la estructura en ese nudo.

$R_{Y3} = 0$, pues el nudo 3 no se encuentra coaccionado en la dirección *Y*.

Por tanto, del vector de fuerzas sólo tenemos 3 incógnitas: R_{X2}, R_{Y2}, R_{X3}



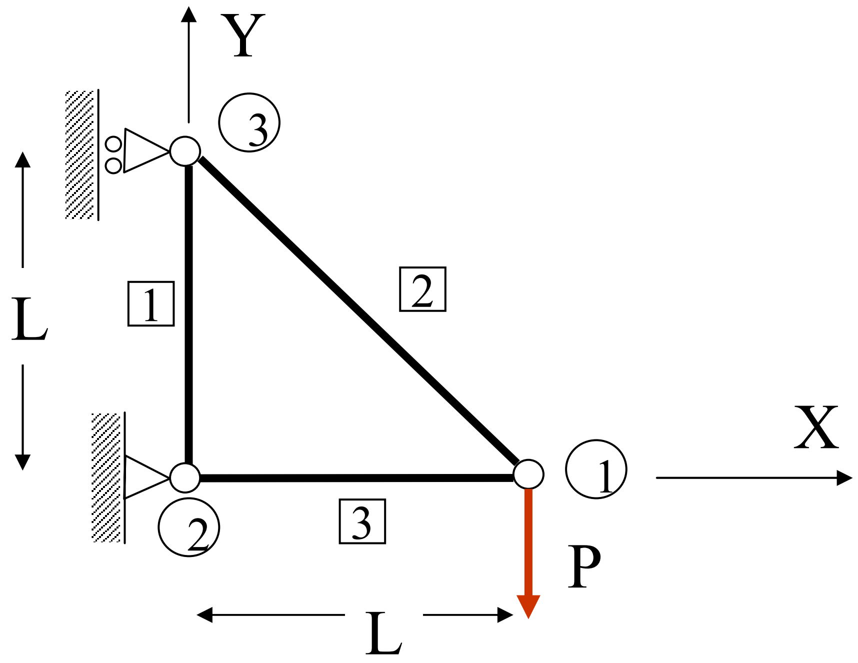
$$\begin{Bmatrix} R_{X1} \\ R_{Y1} \\ R_{X2} \\ R_{Y2} \\ R_{X3} \\ R_{Y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2}+k & -k/\sqrt{2} & -k & 0 & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -k \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & 0 & -k & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2}+k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}$$

b) *En relación a los desplazamientos*:

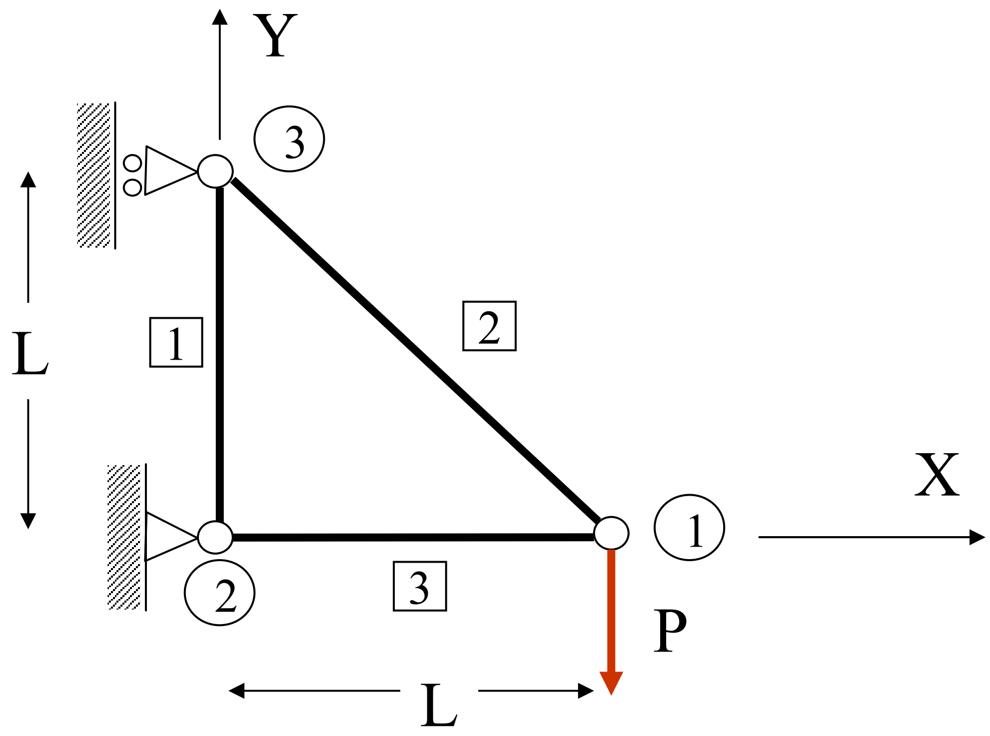
$u_{X2} = u_{Y2} = 0$, por encontrarse impedidos los desplazamientos del nudo 2

$u_{X3} = 0$, por encontrarse impedido el desplazamiento del nudo 3 en la dirección *X*.

En resumen, los desplazamientos incógnitas del problema son, también, 3: u_{X1}, u_{Y1}, u_{Y3}.



$$\begin{Bmatrix} R_{X1} \\ R_{Y1} \\ R_{X2} \\ R_{Y2} \\ R_{X3} \\ R_{Y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2}+k & -k/\sqrt{2} & -k & 0 & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -k \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & 0 & 0 & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & 0 & -k & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2}+k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{k}{\sqrt{2}} + k & -\dfrac{k}{\sqrt{2}} & \dfrac{k}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{k}{\sqrt{2}} & \dfrac{k}{\sqrt{2}} & -\dfrac{k}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{k}{\sqrt{2}} & -\dfrac{k}{\sqrt{2}} & \dfrac{k}{\sqrt{2}} + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{Y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{\sqrt{2}} + k & -\frac{k}{\sqrt{2}} & \frac{k}{\sqrt{2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{2}} & \frac{k}{\sqrt{2}} & -\frac{k}{\sqrt{2}} \\ \frac{k}{\sqrt{2}} & -\frac{k}{\sqrt{2}} & \frac{k}{\sqrt{2}} + k \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vector desplazamientos de la estructura (en ejes globales):

$$\begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{Y3} \end{Bmatrix}$$

Ya podríamos determinar las fuerzas que actúan en los extremos de todas y cada una de las barras de la estructura:

$$\begin{Bmatrix} S'_{xi} \\ S'_{yi} \\ S'_{xj} \\ S'_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{Xi} \\ S_{Yi} \\ S_{Xj} \\ S_{Yj} \end{Bmatrix}$$

y las reacciones:

$$R_{X2} = -k \cdot u_{X1}$$

$$R_{Y2} = -k \cdot u_{Y3}$$

$$R_{X3} = -\frac{k}{\sqrt{2}} \cdot u_{X1} + \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot u_{Y1} - \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot u_{Y3}$$

Cálculo de las deformaciones de cada barra (en ejes locales)

$$\varepsilon = \frac{u'_{x2} - u'_{x1}}{L} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u'_{x1}\\ u'_{y1}\\ u'_{x2}\\ u'_{y2}\end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\{u\}_{ejes\ locales}$$

$$= \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}T^{T}\{u\}_{ejes\ globales}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}\{u\}_{ejes\ globales}$$

$$= \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-c & -s & c & s\end{bmatrix}\{u\}_{ejes\ globales}$$

$$= \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-c & -s & c & s\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{u}_{X1} \\ \mathrm{u}_{Y1} \\ \mathrm{u}_{X2} \\ \mathrm{u}_{Y2} \end{Bmatrix}$$

Cálculo de las tensiones y axiles en cada elemento

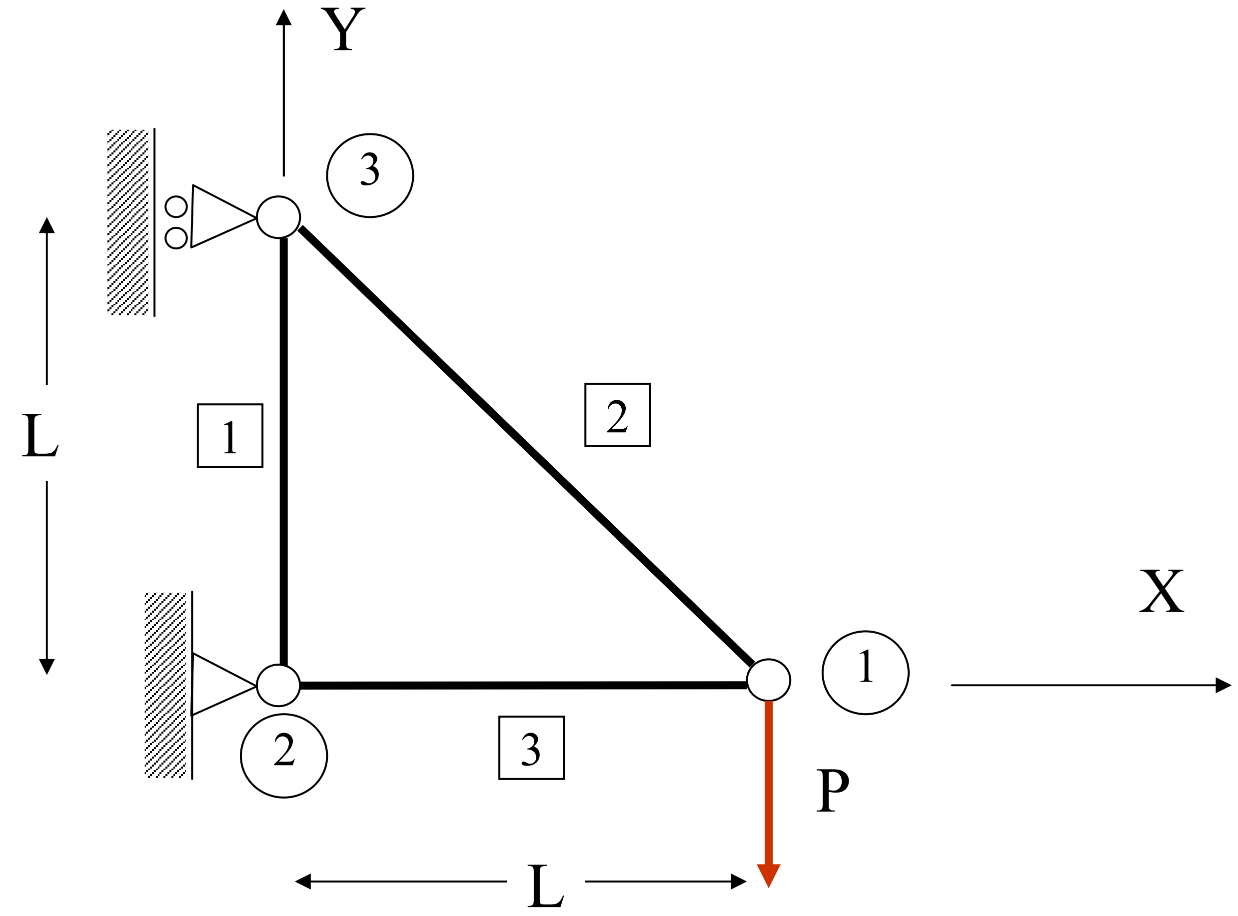
Tensión:

$$\sigma = \mathrm{E}\varepsilon = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}\left(\mathrm{u'}_{x2} - \mathrm{u'}_{x1}\right) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}\{u\}_{ejes\ globales}$$

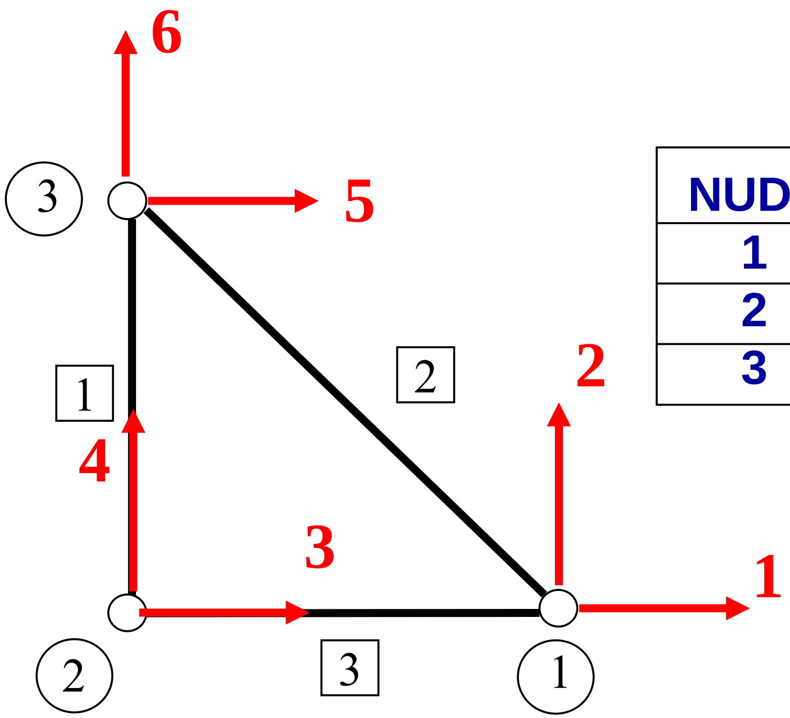
Esfuerzo axil:

$$N = \mathrm{EA}\varepsilon = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}}\left(\mathrm{u'}_{X2} - \mathrm{u'}_{X1}\right) = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}\{u\}_{ejes\ globales}$$

¿Cómo ensamblar directamente la matriz de rigidez de la estructura?


Y
3
L
1
2
X
1
2
3
P
L

GDL DEL SISTEMA ESTRUCTURAL



	GDL's	
NUDO	HORIZONTAL (X)	VERTICAL (Y)
1	1	2
2	3	4
3	5	6

	Conexiones ó Incidencias	
BARRAS	NUDO INICIAL	NUDO FINAL
1	2	3
2	1	3
3	2	1

Relación entre fuerzas en cada gdl (F_i) y los desplazamientos en cada gdl (d_i) en ejes globales:

Elemento 1

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

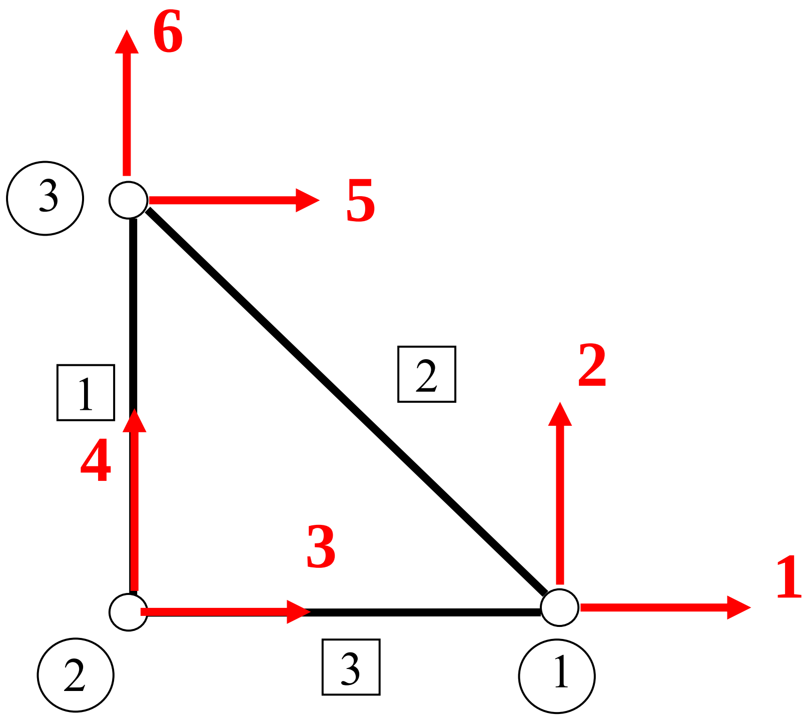
Elemento 2

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ



Matrices de rigidez de los elementos (en ejes globales):

Elemento 1

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3			0	0	0	0
4	SIMÉTRICA			k	0	-k
5					0	0
6						k

	1	2	3	4	5	6
1	$\mathbf{k}/\sqrt{2}$	$-\mathbf{k}/\sqrt{2}$			$-\mathbf{k}/\sqrt{2}$	$\mathbf{k}/\sqrt{2}$
2		$\mathbf{k}/\sqrt{2}$			$\mathbf{k}/\sqrt{2}$	$-\mathbf{k}/\sqrt{2}$
3			0	0	0	0
4	SIMÉTRICA			k	0	-k
5					0 $\mathbf{k}/\sqrt{2}$	0 $-\mathbf{k}/\sqrt{2}$
6						k $\mathbf{k}/\sqrt{2}$

	1	2	3	4	5	6
1	$\mathbf{k}/\sqrt{2}$ k	$-\mathbf{k}/\sqrt{2}$ 0	-k	0	$-\mathbf{k}/\sqrt{2}$	$\mathbf{k}/\sqrt{2}$
2		$\mathbf{k}/\sqrt{2}$ 0	0	0	$\mathbf{k}/\sqrt{2}$	$-\mathbf{k}/\sqrt{2}$
3			0 k	0 0	0	0
4	SIMÉTRICA			k 0	0	-k
5					0 $\mathbf{k}/\sqrt{2}$	0 $-\mathbf{k}/\sqrt{2}$
6						k $\mathbf{k}/\sqrt{2}$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

	1	2	3	4	5	6
1	$k+k/\sqrt{2}$	$-k/\sqrt{2}$	-k	0	$-k/\sqrt{2}$	$k/\sqrt{2}$
2		$k/\sqrt{2}$	0	0	$k/\sqrt{2}$	$-k/\sqrt{2}$
3			k	0	0	0
4	SIMÉTRICA			k	0	-k
5					$k/\sqrt{2}$	$-k/\sqrt{2}$
6						$k+k/\sqrt{2}$

Significado físico de la matriz de rigidez

Si consideramos, en general, una matriz de rigidez de la forma:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

y la relación carga-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

La primera ecuación es:

$$k_{11}d_1 + k_{12}d_2 + k_{13}d_3 = F_1$$

Equilibrio de fuerzas en el nudo 1

Significado de los elementos de las columnas de la matriz K:

¿Qué sucede si d_1=1, d_2=0, d_3=0 ?

Los gdl 2 y 3 se mantienen sin desplazamiento y el gdl 1 sufre un desplazamiento unidad en la dirección de F_1

$F_1 = k_{11}$	Fuerza actuando según el gdl 1 debido a un desplazamiento unidad del gdl 1
$F_2 = k_{21}$	Fuerza actuando según el gdl 2 debido a un desplazamiento unidad del gdl 1
$F_3 = k_{31}$	Fuerza actuando según el gdl 3 debido a un desplazamiento unidad del gdl 1

De manera similar se podría ver qué significado físico tienen los otros términos de la matriz de rigidez

En general:

$\mathbf{K}_{\boldsymbol{ij}}$ = Fuerza actuante en el gdl “i” debida a un desplazamiento unidad del gdl “j” manteniendo el resto de gdl del sistema fijos