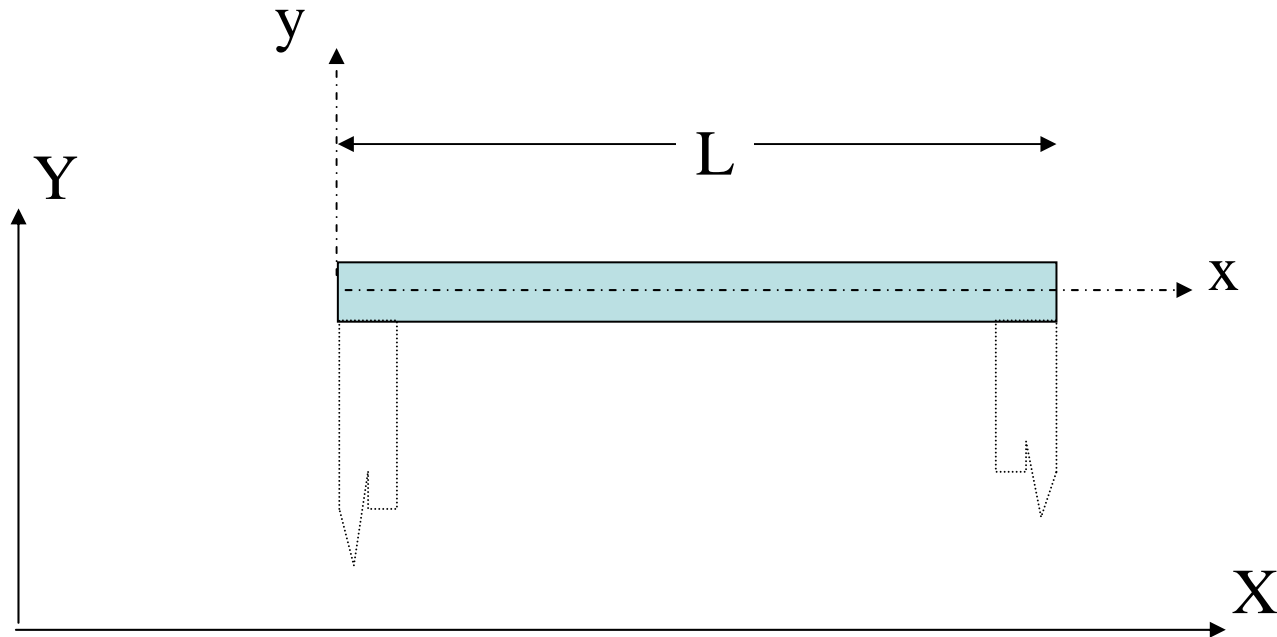


FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS RETICULADAS

Prof. Carlos Navarro

Departamento de Mecánica de Medios Continuos
y Teoría de Estructuras

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA

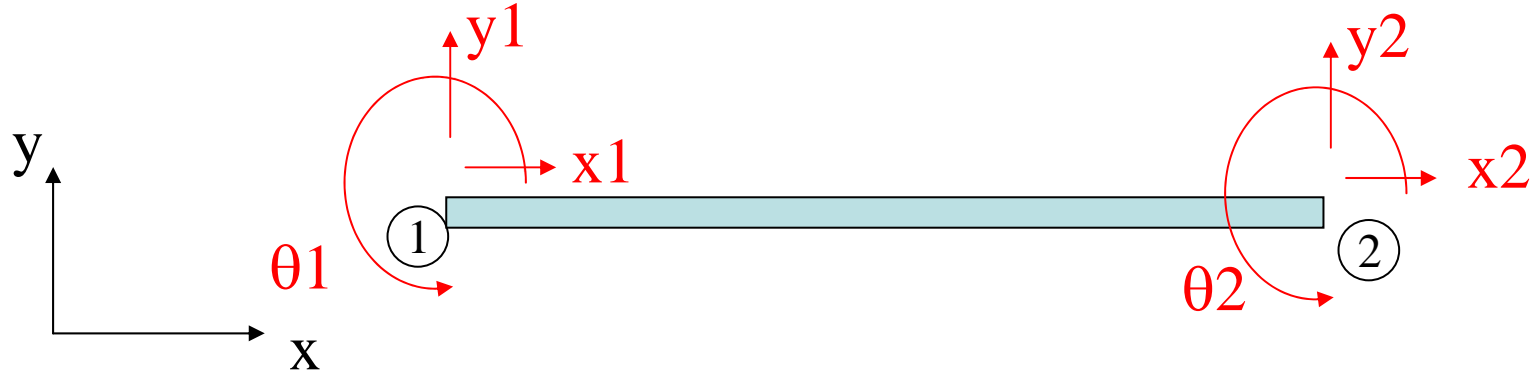


x - y : sistema de ejes locales de la barra

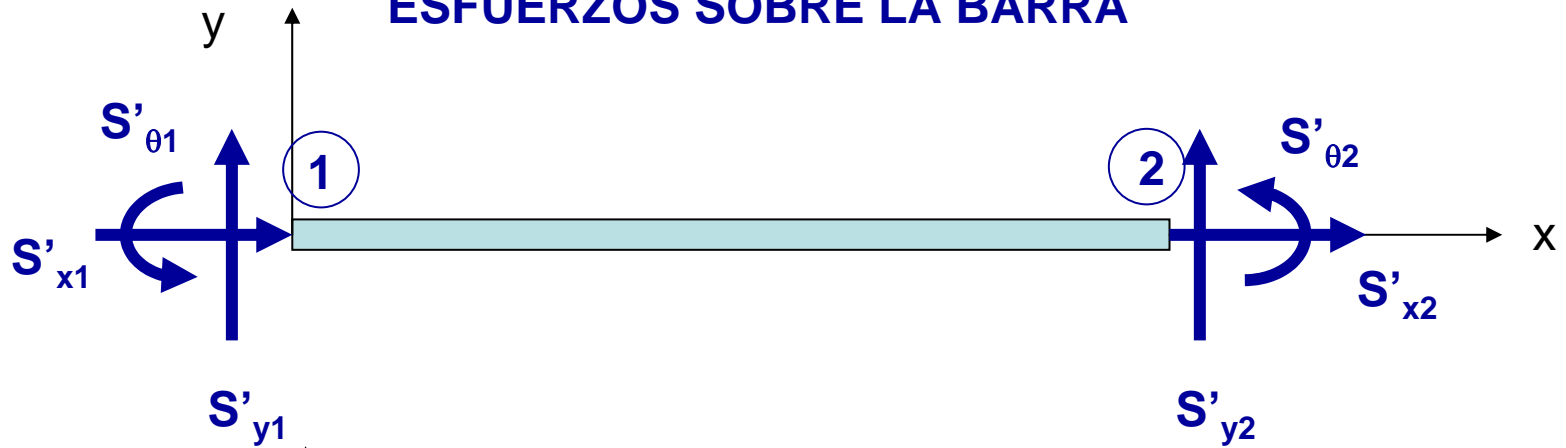
X - Y : sistema de ejes globales de la estructura

EA y EI conocidos

GDL's DE LA BARRA



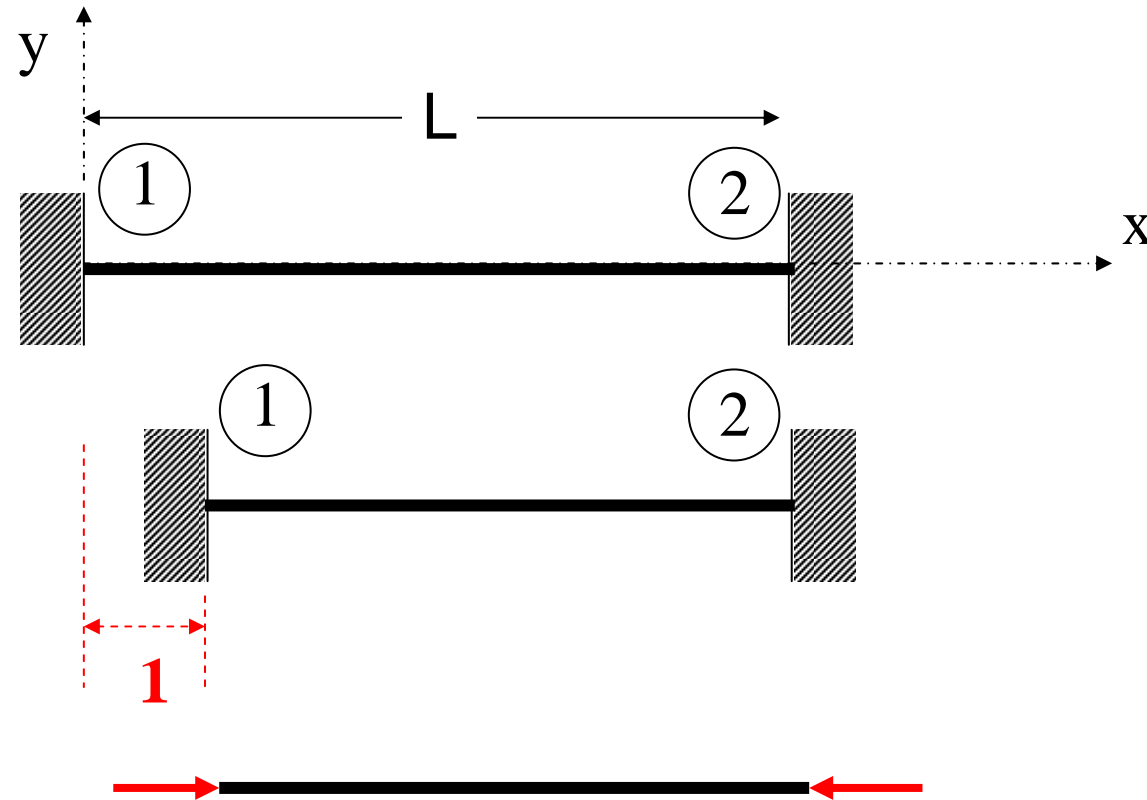
ESFUERZOS SOBRE LA BARRA



MOVIMIENTOS DE LA BARRA



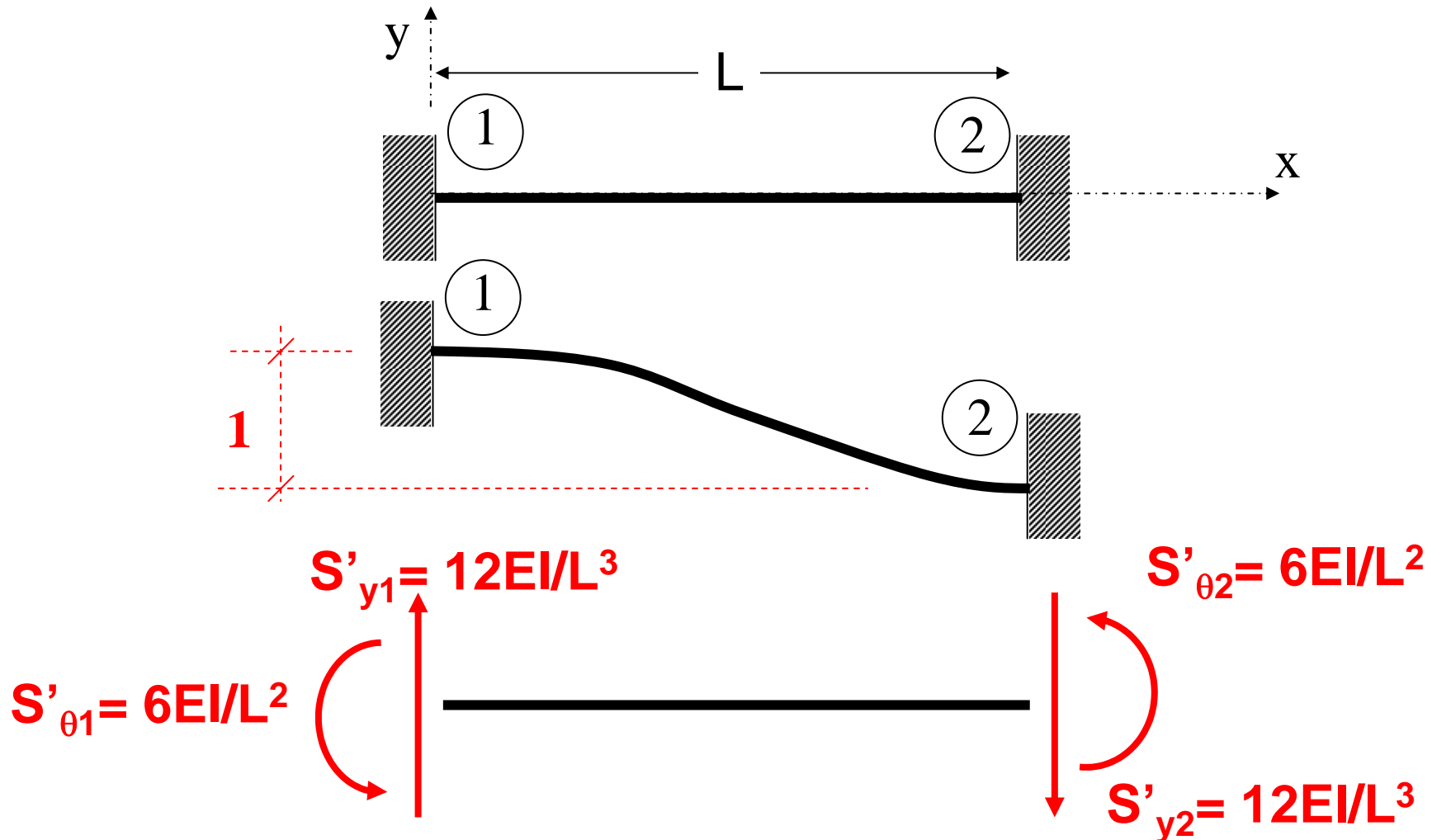
¿Qué carga habría que aplicar a la barra según el gdl **x1** para conseguir un desplazamiento unidad de ese gdl manteniendo sin movimiento el resto de gdl's? ¿Qué cargas de reacción aparecerían según los otros gdl's de la barra?



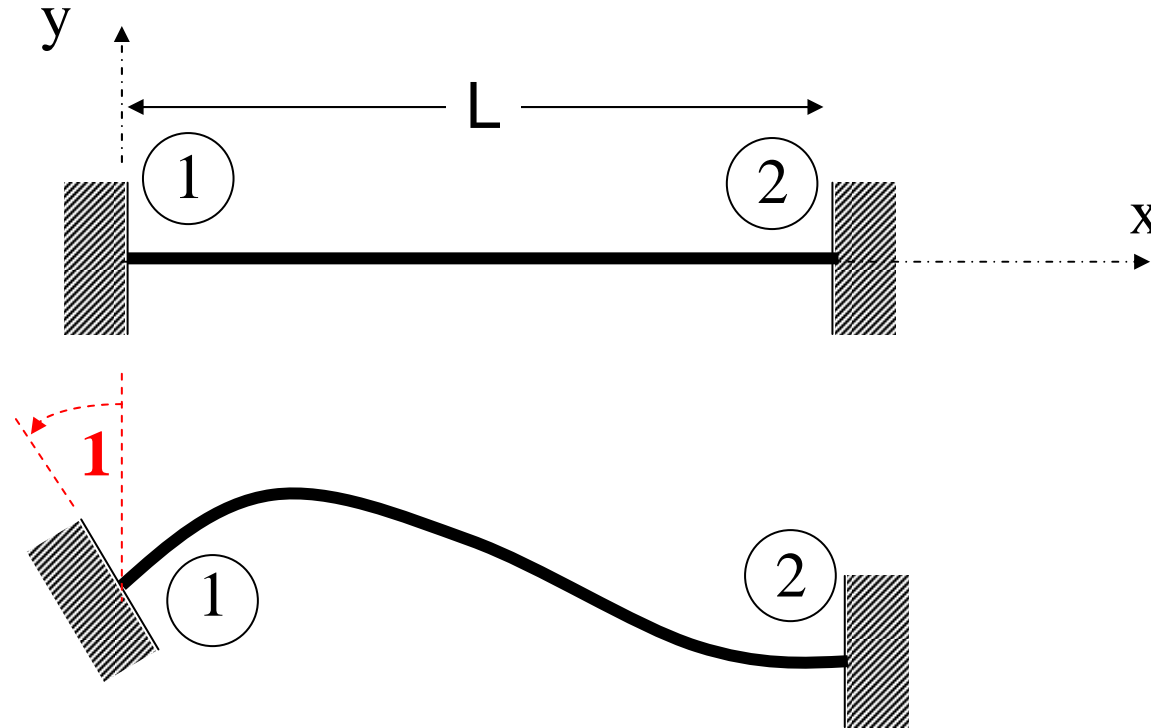
$$S'_{x1} = EA/L$$

$$S'_{x2} = -EA/L$$

¿Qué carga habría que aplicar a la barra según el gdl **y1** para conseguir un desplazamiento unidad de ese gdl manteniendo sin movimiento el resto de gdl's? ¿Qué cargas de reacción aparecerían según los otros gdl's de la barra?



¿Qué carga habría que aplicar a la barra según el gdl θ_1 para conseguir un giro unidad de ese gdl manteniendo sin movimiento el resto de gdl's?
 ¿Qué cargas de reacción aparecerían según los otros gdl's de la barra?



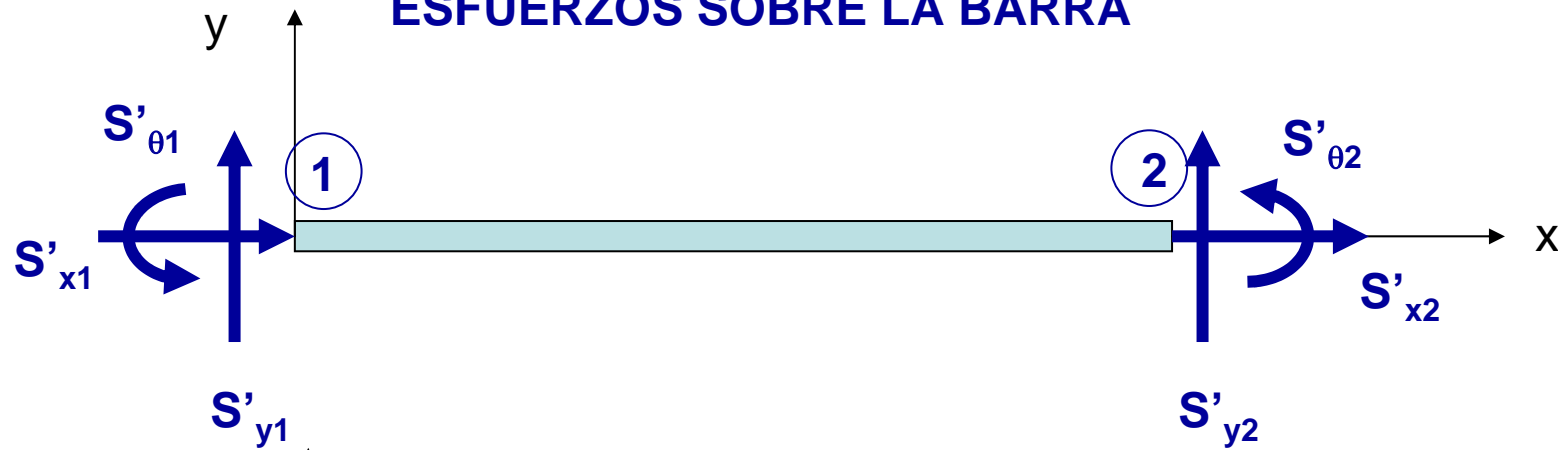
$S'_{\theta_1} = 4EI/L$

$S'_{y1} = 6EI/L^2$

$S'_{\theta_2} = 2EI/L^2$

$S'_{y2} = 6EI/L^2$

ESFUERZOS SOBRE LA BARRA



MOVIMIENTOS DE LA BARRA



AXILES

Cambio de longitud

$$L^* = L + (u'_2 - u'_1)$$

Equilibrio según x

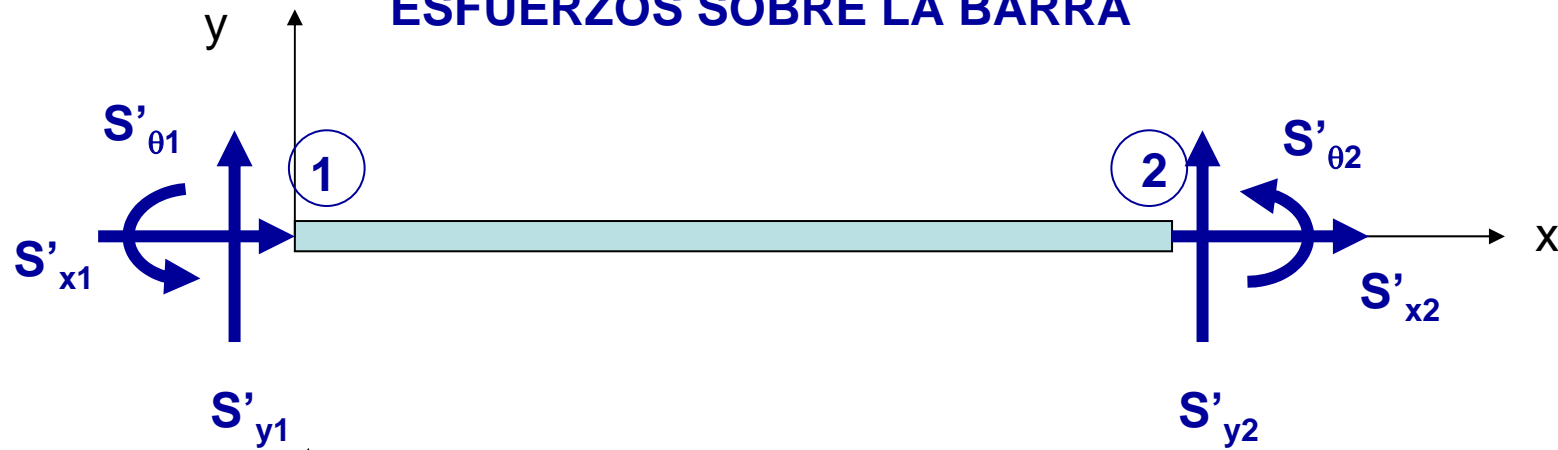
$$S'_{x1} + S'_{x2} = 0$$

$$u'_2 - u'_1 = S'_{x2} L / (EA)$$

$$S'_{x2} = \frac{EA}{L} (u'_2 - u'_1)$$

$$S'_{x1} = \frac{EA}{L} (u'_1 - u'_2)$$

ESFUERZOS SOBRE LA BARRA



MOVIMIENTOS DE LA BARRA

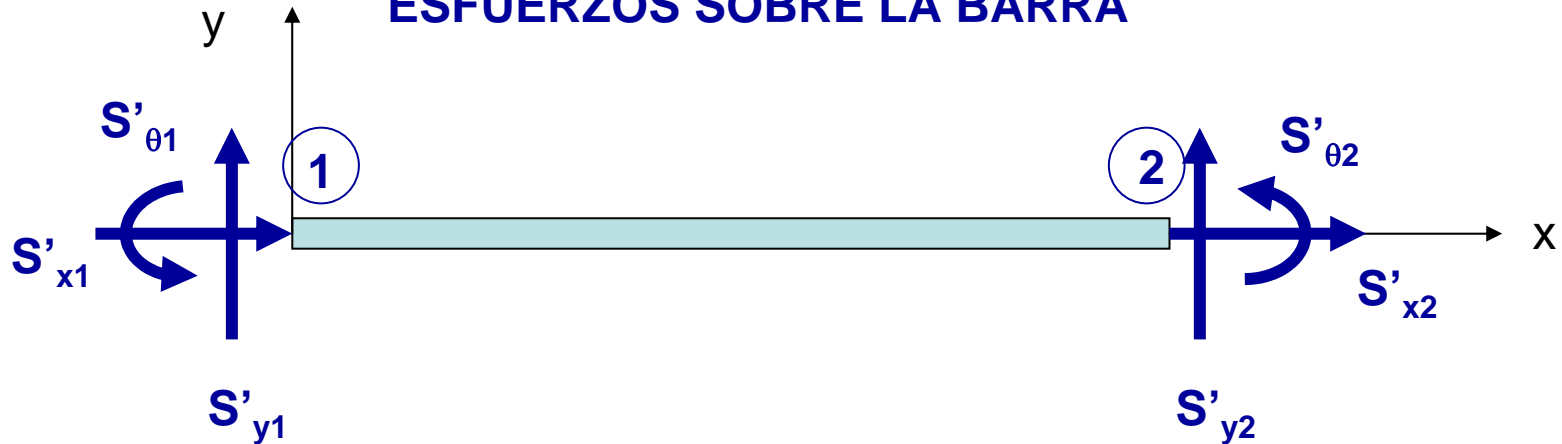


MOMENTOS

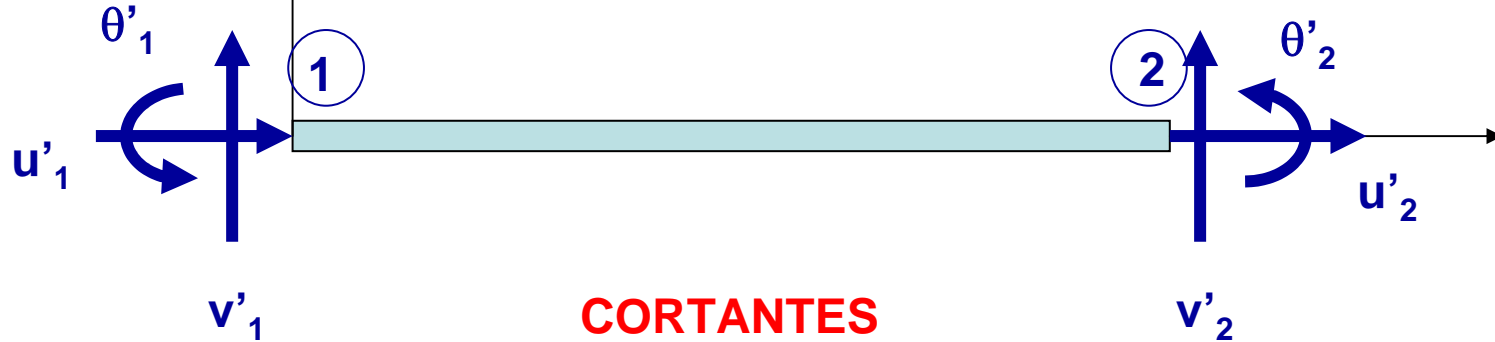
$$S'_{\theta 1} = \frac{4EI}{L} \theta'_1 + \frac{2EI}{L} \theta'_2 + \frac{6EI}{L^2} (v'_1 - v'_2)$$

$$S'_{\theta 2} = \frac{2EI}{L} \theta'_1 + \frac{4EI}{L} \theta'_2 + \frac{6EI}{L^2} (v'_1 - v'_2)$$

ESFUERZOS SOBRE LA BARRA



MOVIMIENTOS DE LA BARRA



CORTANTES

$$S'_{y1} = \frac{S'_{\theta 1} - S'_{\theta 2}}{L} = -S'_{y2}$$

$$S'_{y1} = \frac{6EI}{L^2} \theta'_1 + \frac{6EI}{L^2} \theta'_2 + \frac{12EI}{L^3} (v'_1 - v'_2)$$

$$S'_{y2} = -\frac{6EI}{L^2} \theta'_1 - \frac{6EI}{L^2} \theta'_2 - \frac{12EI}{L^3} (v'_1 - v'_2)$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial como:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{\theta1} \end{Bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{K'_{11}} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}}_{K'_{12}} \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} S'_{x2} \\ S'_{y2} \\ S'_{\theta2} \end{Bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}}_{K'_{21}} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{K'_{22}} \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA:

$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{\theta1} \\ S'_{x2} \\ S'_{y2} \\ S'_{\theta2} \end{matrix} \right\} = \begin{matrix}
 \begin{matrix}
 \mathbf{K}'_{11} & \mathbf{K}'_{12} \\
 \mathbf{K}'_{21} & \mathbf{K}'_{22}
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{matrix} \right\}
 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

\mathbf{K}'_{11} (top-left, green) and \mathbf{K}'_{22} (bottom-right, yellow) are symmetric matrices. \mathbf{K}'_{12} (top-right, purple) and \mathbf{K}'_{21} (bottom-left, blue) are their transposes.

Llamando:

$$S'_1 = \begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{\theta 1} \end{Bmatrix} \quad S'_2 = \begin{Bmatrix} S'_{x2} \\ S'_{y2} \\ S'_{\theta 2} \end{Bmatrix} \quad d'_1 = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \end{Bmatrix} \quad d'_2 = \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{S'\} = \begin{Bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{d'\} = \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{Bmatrix}$$

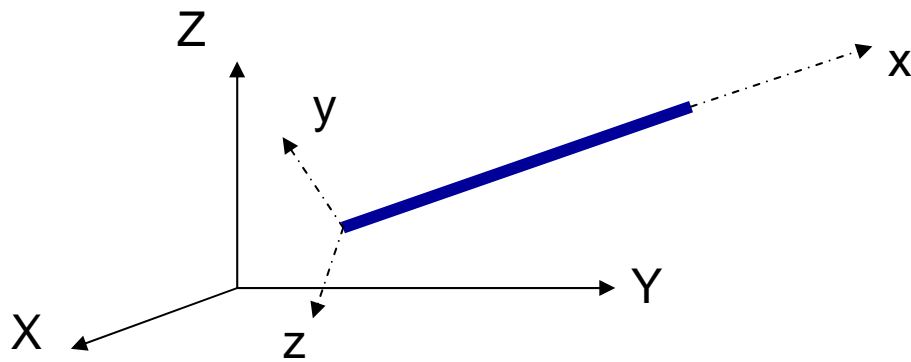
Vector de esfuerzos en los nudos
(ejes locales)

Vector de movimientos en los nudos
(ejes locales)

$$\{S'\} = [K'] \{d'\}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA EN EJES LOCALES

TRANSFORMACIÓN DE EJES LOCALES A GLOBALES



[T]

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_{\theta x} \\ S_{\theta y} \\ S_{\theta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x & X_y & X_z & 0 & 0 & 0 \\ Y_x & Y_y & Y_z & 0 & 0 & 0 \\ Z_x & Z_y & Z_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_x & X_y & X_z \\ 0 & 0 & 0 & X_x & X_y & X_z \\ 0 & 0 & 0 & X_x & X_y & X_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_x \\ S'_y \\ S'_z \\ S'_{\theta x} \\ S'_{\theta y} \\ S'_{\theta z} \end{pmatrix}$$

$X_x = \text{coseno del ángulo que forma el eje local } x \text{ con el eje global } X$

$$\{S\} = [T] \{S'\}$$

$$\{d\} = [T] \{d'\}$$

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

$$\{S'\} = [T]^T \{S\} \quad y \quad \{d'\} = [T]^T \{d\}$$

En el caso plano la matriz de transformación es:

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en extremos de barra se relacionan con los movimientos en nudos, en coordenadas locales, mediante las expresiones:

$$\{S'_1\} = [K'_{11}] \{d'_1\} + [K'_{12}] \{d'_2\}$$

$$\{S'_2\} = [K'_{21}] \{d'_1\} + [K'_{22}] \{d'_2\}$$

$$\{d'_1\} = [T]^T \{d_1\} \quad \text{y} \quad \{d'_2\} = [T]^T \{d_2\}$$

$$\{S'_1\} = [K'_{11}] \{d'_1\} + [K'_{12}] \{d'_2\}$$

$$\{S'_2\} = [K'_{21}] \{d'_1\} + [K'_{22}] \{d'_2\}$$


$$\{S'_1\} = [K'_{11}] \cdot [T]^T \{d_1\} + [K'_{12}] \cdot [T]^T \{d_2\}$$

$$\{S'_2\} = [K'_{21}] \cdot [T]^T \{d_1\} + [K'_{22}] \cdot [T]^T \{d_2\}$$

Esfuerzos en barras en ejes locales en función de los desplazamientos nodales en ejes globales:

$$\{S'_1\} = [K'_{11}] \cdot [T]^T \{d_1\} + [K'_{12}] \cdot [T]^T \{d_2\}$$

$$\{S'_2\} = [K'_{21}] \cdot [T]^T \{d_1\} + [K'_{22}] \cdot [T]^T \{d_2\}$$

Esfuerzos en barras en ejes globales en función
de los desplazamientos nodales en ejes globales:

$$\{S_1\} = [T] \cdot \{S'_1\} = [T] \cdot [K'_{11}] \cdot [T]^T \{d_1\} + [T] \cdot [K'_{12}] \cdot [T]^T \{d_2\}$$

$$\{S_2\} = [T] \cdot \{S'_2\} = [T] \cdot [K'_{21}] \cdot [T]^T \{d_1\} + [T] \cdot [K'_{22}] \cdot [T]^T \{d_2\}$$

Si:

$$[K_{ij}] = [T] \cdot [K'_{ij}] \cdot [T]^T$$

$$\{S_1\} = [K_{11}] \{d_1\} + [K_{12}] \{d_2\}$$

$$\{S_2\} = [K_{21}] \{d_1\} + [K_{22}] \{d_2\}$$

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{S\} = [K]\{d\}$$

¿Cómo ensamblar la matriz de rigidez de una estructura?

Nudos: 1, 2, 3 n

Barras: eje x local desde nudo con numeración más baja al nudo con numeración más alta

Contribución de la barra definida por el nudo inicial **i** y el nudo final **j**

$$\{S_i\}_{ij} = [K_{11}]_{ij} \{d_i\} + [K_{12}]_{ij} \{d_j\}$$

$$\{S_j\}_{ij} = [K_{21}]_{ij} \{d_i\} + [K_{22}]_{ij} \{d_j\}$$

Ecuaciones de equilibrio en el nudo **i**

$$\{f_i\} = \{S_1\}_{ij} + \text{contribución de las otras barras que concurren en el nudo } i$$

Ecuaciones de equilibrio en el nudo **j**

$$\{f_j\} = \{S_2\}_{ij} + \text{contribución de las otras barras que concurren en el nudo } j$$

Siendo las contribuciones de las otras barras los vectores $\{S_1\}$, para las barras que posean el extremo inicial en el nudo **i**, ó $\{S_2\}$, para aquellas que tienen en él su extremo final.

En otras palabras:

$$\{f_i\} = [K_{11}]_{ij} \{d_i\} + [K_{12}]_{ij} \{d_j\} +$$

+ contribución de las otras barras

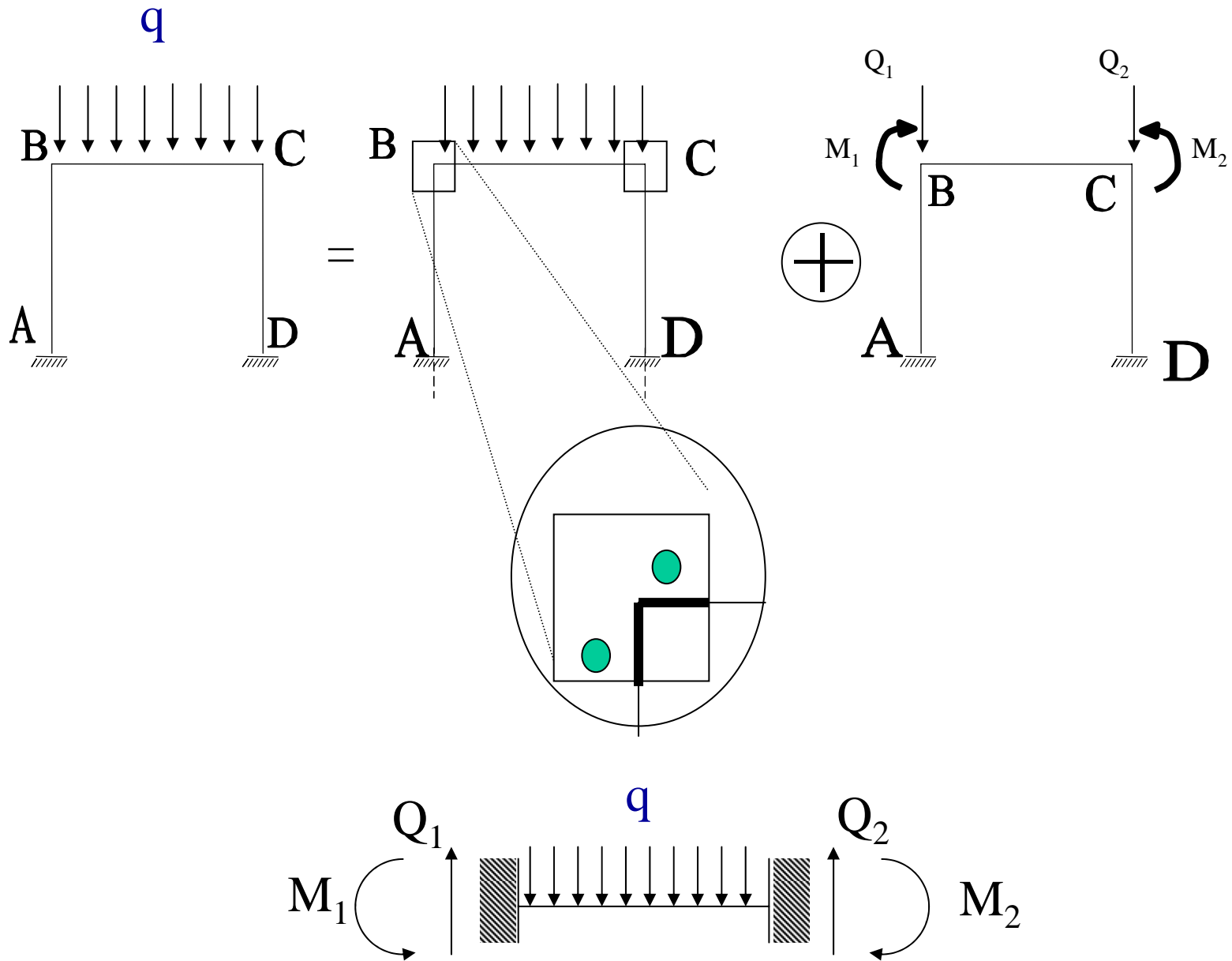
$$\{f_j\} = [K_{21}]_{ij} \{d_i\} + [K_{22}]_{ij} \{d_j\} +$$

+ contribución de las otras barras

Por tanto, la barras conectando los nudos inicial **i** y final **j** aporta a la matriz de rigidez de la estructura global las submatrices $[K]_{ij}$ del siguiente modo:

$$\begin{array}{c}
 \text{Columna i} \qquad \qquad \qquad \text{Columna j} \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \begin{array}{c}
 \text{Fila i} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc}
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & [K_{11}]_{ij} & \dots & \dots & [K_{12}]_{ij} & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \text{Fila j} \rightarrow \dots & [K_{21}]_{ij} & \dots & \dots & [K_{22}]_{ij} & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

VECTOR DE CARGAS



En una barra que conecta los nudos i y j de la estructura ($i < j$) sobre la que actúan cargas en puntos intermedios, determinaríamos los vectores reacción $\{r'_1\}$ y $\{r'_2\}$ en los extremos de la barra considerándoles como empotramientos perfectos, en ejes locales.

Las reacciones en los extremos se podrían expresar en ejes globales como:

$$\{r_i\} = [T] \{r'_i\}$$

El vector de cargas actuantes en el nudo i se obtendría sumando los vectores $-\{r_i\}$ de todas las barras con el nudo Inicial o final en este nudo.

Si en el nudo i ya actuase un vector de cargas $\{p_i\}$, al vector de cargas en ese nudo sería:

$$\{f_i\} = \{p_i\} - \Sigma \{r_i\}$$

Σ extendido a todas las barras conectadas al nudo i

CONDICIONES DE CONTORNO

$$\{f\} = [K]\{d\}$$

En general:

- Conoceremos los vectores de carga $\{f\}_i$ en los nudos (Probablemente ignoraremos los vectores de carga $\{f\}_j$ en aquellos nudos en los que existan apoyos y empotramientos)
- Conoceremos $\{d\}_m$, o alguna de sus componentes, en aquellos nudos en los que existan ligaduras

n = número de nudos

n° de g.d.l. = $3n$

r = número de coacciones

n° de movimientos desconocidos = $3n-r$

Objetivo:

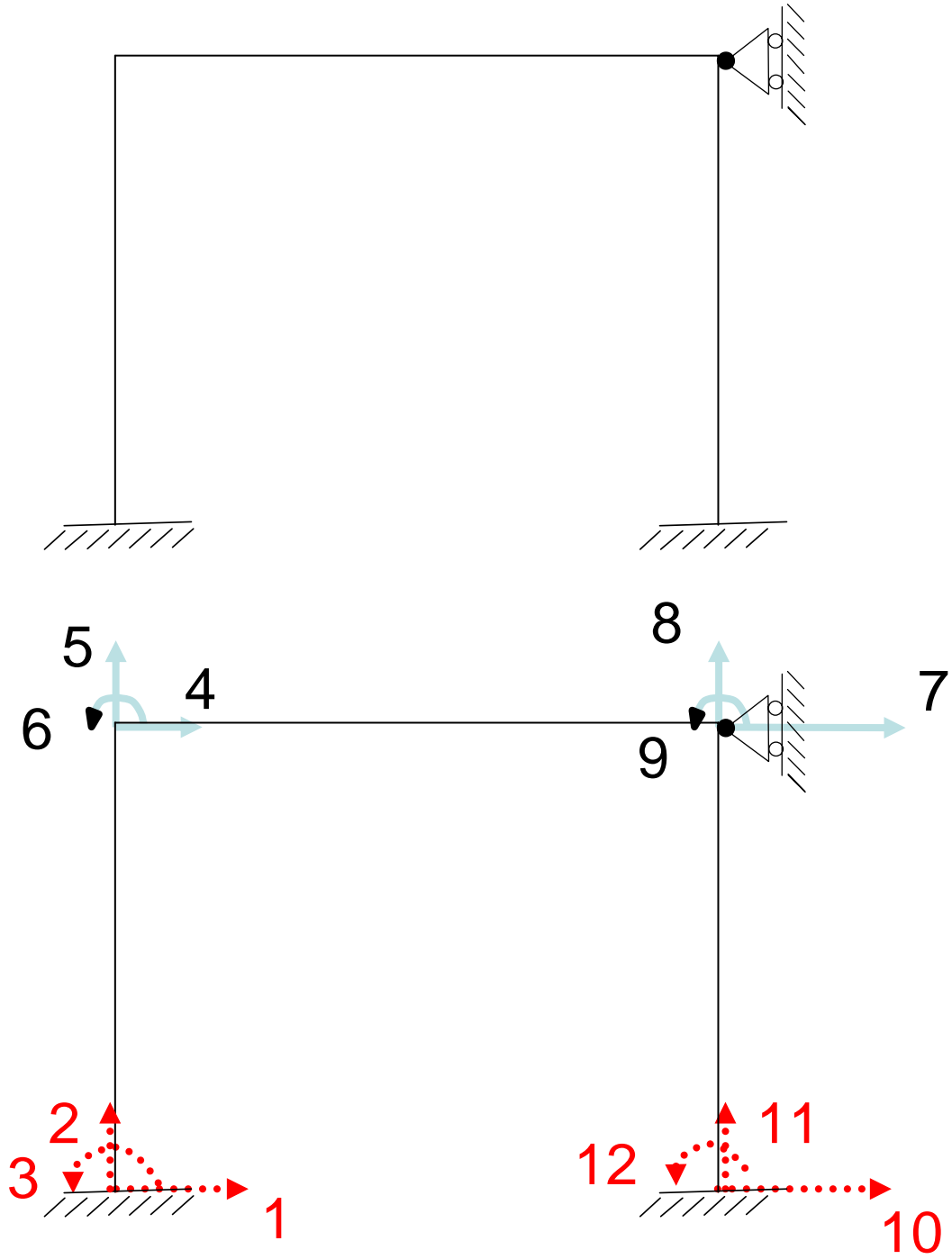
$$\{f^*\} = [K^*]\{d^*\}$$

Vector de cargas
conocidas

Vector de movimientos
incógnitas

Estructura

Numeración
G.D.L



Si eliminamos las filas y columnas correspondientes a los gdl que se encuentran coaccionados (1,2,3,7,10,11 y 12) tendríamos:

$$f_4 = K_{44}d_4 + K_{45}d_5 + K_{46} d_6 + K_{48}d_8 + K_{49}d_9$$

$$f_5 = K_{54}d_4 + K_{55}d_5 + K_{56} d_6 + K_{58}d_8 + K_{59}d_9$$

$$f_6 = K_{64}d_4 + K_{65}d_5 + K_{66} d_6 + K_{68}d_8 + K_{69}d_9$$

$$f_8 = K_{84}d_4 + K_{85}d_5 + K_{86} d_6 + K_{88}d_8 + K_{89}d_9$$

$$f_9 = K_{94}d_4 + K_{95}d_5 + K_{96} d_6 + K_{98}d_8 + K_{99}d_9$$

$$\{f^*\} = [K^*]\{d^*\}$$

Matriz de rigidez reducida no singular

Resolución del sistema de ecuaciones:

$$\{d^*\} = [K^*]^{-1} \{f^*\}$$

Cálculo de esfuerzos en cada barra:

$$\{S'_i\} = [K'_{11}]_{ij} \cdot [T]^T \{d_i\} + [K'_{12}]_{ij} \cdot [T]^T \{d_j\} + \{r'_i\}$$

$$\{S'_j\} = [K'_{21}]_{ij} \cdot [T]^T \{d_i\} + [K'_{22}]_{ij} \cdot [T]^T \{d_j\} + \{r'_j\}$$

Cálculo de reacciones:

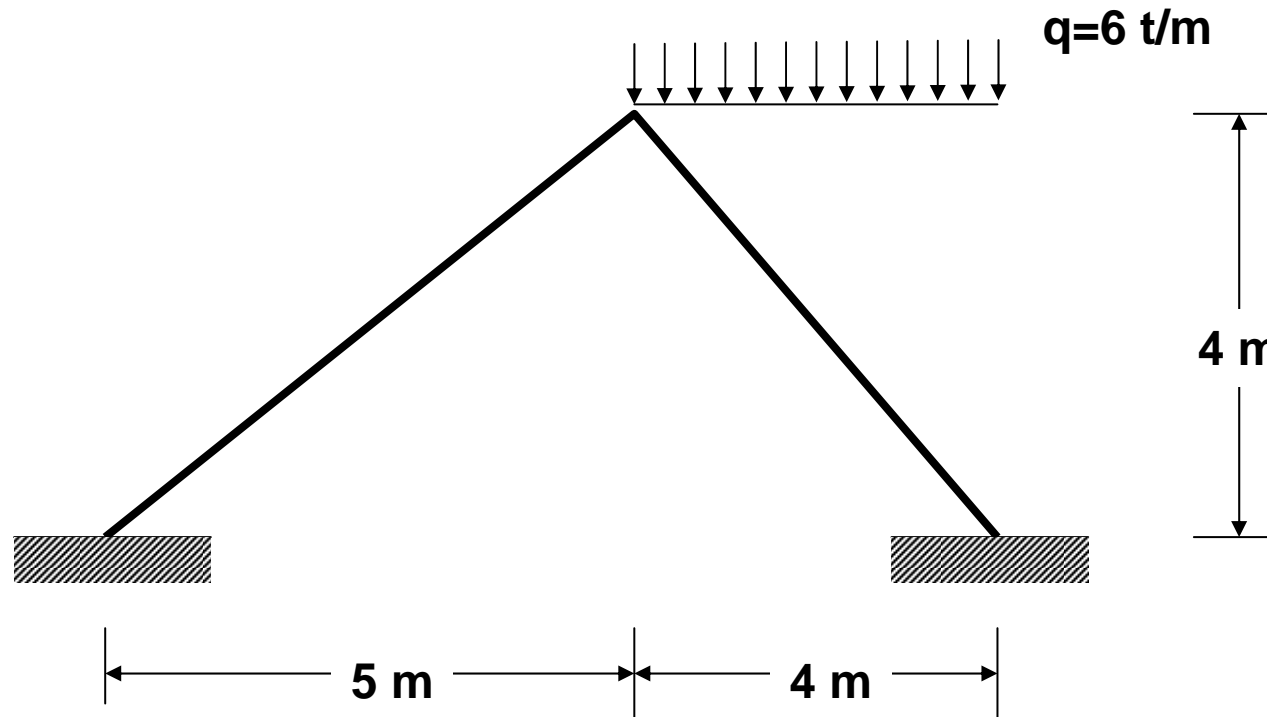
El vector de movimientos en todos los g.d.l. de la estructura (incluidos los coaccionados) se construye término a término asignando el valor obtenido a los g.d.l. que han intervenido en el cálculo y el valor 0 a los g.d.l. coaccionados. Multiplicando este vector por las filas de la matriz del sistema relativas a los g.d.l. coaccionados (filas eliminadas al considerar las condiciones de contorno) se obtienen los esfuerzos aplicados a estos g.d.l., es decir, las reacciones.

A estas reacciones habrán de sumársele las cargas que actúen directamente sobre los g.d.l. coaccionados.

EJEMPLO 1:

Utilizando el análisis matricial, resolver la estructura de la figura determinando:

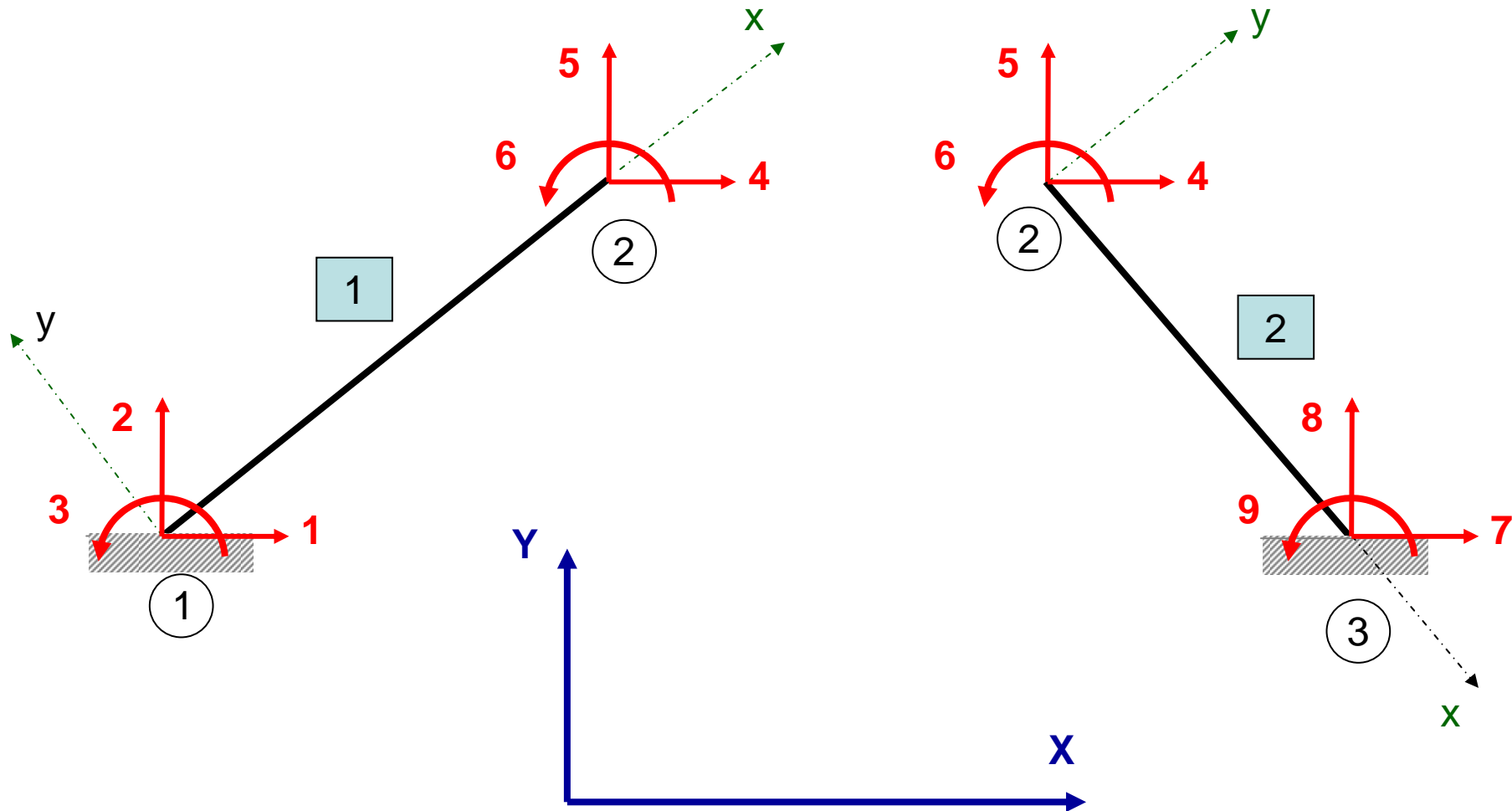
- Desplazamientos de los nudos
- Reacciones en los empotramientos
- Esfuerzos en los extremos de barra



Material: $E = 2000000 \text{ t/m}^2$

Sección de la barras cuadrada de 40 por 40 cm

BARRAS, NUDOS Y GDLs



MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 1 (DEL NUDO 1 AL NUDO 2)

En ejes locales de la barra:

$$K'_{11} = \begin{pmatrix} 4.998 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 195.027 & 624.39 \\ 0 & 624.39 & 2.665 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K'_{12} = \begin{pmatrix} -4.998 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -195.027 & 624.39 \\ 0 & -624.39 & 1.333 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K'_{21} = \begin{pmatrix} -4.998 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -195.027 & -624.39 \\ 0 & 624.39 & 1.333 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K'_{22} = \begin{pmatrix} 4.998 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 195.027 & -624.39 \\ 0 & -624.39 & 2.665 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez completa (en ejes locales):

$$K' = \begin{pmatrix} 4.998 \times 10^4 & 0 & 0 & -4.998 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 195.027 & 624.39 & 0 & -195.027 & 624.39 \\ 0 & 624.39 & 2.665 \times 10^3 & 0 & -624.39 & 1.333 \times 10^3 \\ -4.998 \times 10^4 & 0 & 0 & 4.998 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -195.027 & -624.39 & 0 & 195.027 & -624.39 \\ 0 & 624.39 & 1.333 \times 10^3 & 0 & -624.39 & 2.665 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{Bmatrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 1 (DEL NUDO 1 AL NUDO 2)

Matriz de transformación de ejes locales a globales:

$$T1 = \begin{pmatrix} 0.781 & -0.625 & 0 \\ 0.625 & 0.781 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[K_{ij}] = [T] \cdot [K'_{ij}] \cdot [T]^T$$

En ejes globales de la estructura:

$$K_{11}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.055 \times 10^4 & 2.428 \times 10^4 & -390.053 \\ 2.428 \times 10^4 & 1.962 \times 10^4 & 487.567 \\ -390.053 & 487.567 & 2.665 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{12}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & -390.053 \\ -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & 487.567 \\ 390.053 & -487.567 & 1.333 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{21}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & 390.053 \\ -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & -487.567 \\ -390.053 & 487.567 & 1.333 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{22}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.055 \times 10^4 & 2.428 \times 10^4 & 390.053 \\ 2.428 \times 10^4 & 1.962 \times 10^4 & -487.567 \\ 390.053 & -487.567 & 2.665 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 1 (DEL NUDO 1 AL NUDO 2)

Matriz de rigidez completa (en ejes globales):

$$K^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.055 \times 10^4 & 2.428 \times 10^4 & -390.053 & -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & -390.053 \\ 2.428 \times 10^4 & 1.962 \times 10^4 & 487.567 & -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & 487.567 \\ -390.053 & 487.567 & 2.665 \times 10^3 & 390.053 & -487.567 & 1.333 \times 10^3 \\ \hline -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & 390.053 & 3.055 \times 10^4 & 2.428 \times 10^4 & 390.053 \\ -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & -487.567 & 2.428 \times 10^4 & 1.962 \times 10^4 & -487.567 \\ -390.053 & 487.567 & 1.333 \times 10^3 & 390.053 & -487.567 & 2.665 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 2 (DEL NUDO 2 AL NUDO 2)

En ejes locales de la barra:

$$K'_{11} = \begin{pmatrix} 5.657 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 282.843 & 800 \\ 0 & 800 & 3.017 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K'_{12} = \begin{pmatrix} -5.657 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -282.843 & 800 \\ 0 & -800 & 1.508 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K'_{21} = \begin{pmatrix} -5.657 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -282.843 & -800 \\ 0 & 800 & 1.508 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K'_{22} = \begin{pmatrix} 5.657 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 282.843 & -800 \\ 0 & -800 & 3.017 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez completa (en ejes locales):

$$K' = \begin{pmatrix} 5.657 \times 10^4 & 0 & 0 & -5.657 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 282.843 & 800 & 0 & -282.843 & 800 \\ 0 & 800 & 3.017 \times 10^3 & 0 & -800 & 1.508 \times 10^3 \\ -5.657 \times 10^4 & 0 & 0 & 5.657 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -282.843 & -800 & 0 & 282.843 & -800 \\ 0 & 800 & 1.508 \times 10^3 & 0 & -800 & 3.017 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{Bmatrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 2 (DEL NUDO 2 AL NUDO 3)

Matriz de transformación de ejes locales a globales:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[K_{ij}] = [T] \cdot [K'_{ij}] \cdot [T]^T$$

En ejes globales de la estructura:

$$K_{11}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.843 \times 10^4 & -2.814 \times 10^4 & 565.685 \\ -2.814 \times 10^4 & 2.843 \times 10^4 & 565.685 \\ 565.685 & 565.685 & 3.017 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{21}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & -565.685 \\ 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & -565.685 \\ 565.685 & 565.685 & 1.508 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{12}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & 565.685 \\ 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & 565.685 \\ -565.685 & -565.685 & 1.508 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{22}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.843 \times 10^4 & -2.814 \times 10^4 & -565.685 \\ -2.814 \times 10^4 & 2.843 \times 10^4 & -565.685 \\ -565.685 & -565.685 & 3.017 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 2 (DEL NUDO 2 AL NUDO 3)

Matriz de rigidez completa (en ejes globales):

$$K^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.843 \times 10^4 & -2.814 \times 10^4 & 565.685 & -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & 565.685 \\ -2.814 \times 10^4 & 2.843 \times 10^4 & 565.685 & 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & 565.685 \\ 565.685 & 565.685 & 3.017 \times 10^3 & -565.685 & -565.685 & 1.508 \times 10^3 \\ -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & -565.685 & 2.843 \times 10^4 & -2.814 \times 10^4 & -565.685 \\ 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & -565.685 & -2.814 \times 10^4 & 2.843 \times 10^4 & -565.685 \\ 565.685 & 565.685 & 1.508 \times 10^3 & -565.685 & -565.685 & 3.017 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

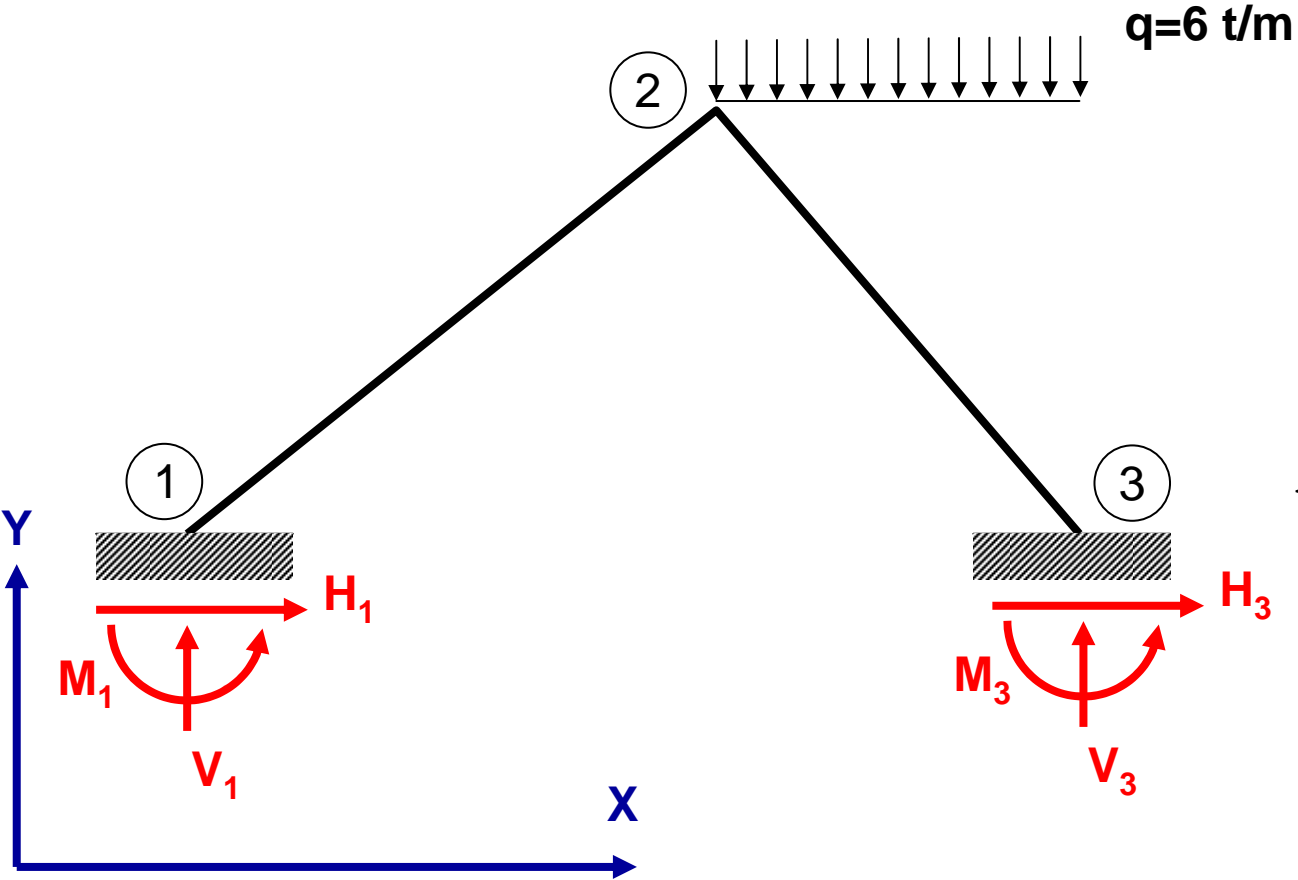
ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} & \leftarrow \text{GDL} \\ \begin{matrix} \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3.055 \times 10^4 & 2.428 \times 10^4 & -390.053 & -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & -390.053 & 0 & 0 & 0 \\ 2.428 \times 10^4 & 1.962 \times 10^4 & 487.567 & -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & 487.567 & 0 & 0 & 0 \\ -390.053 & 487.567 & 2.665 \times 10^3 & 390.053 & -487.567 & 1.333 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & 390.053 & 5.897 \times 10^4 & -3.86 \times 10^3 & 955.739 & -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & 565.685 \\ -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & -487.567 & -3.86 \times 10^3 & 4.805 \times 10^4 & 78.119 & 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & 565.685 \\ -390.053 & 487.567 & 1.333 \times 10^3 & 955.739 & 78.119 & 5.682 \times 10^3 & -565.685 & -565.685 & 1.508 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 0 & -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & -565.685 & 2.843 \times 10^4 & -2.814 \times 10^4 & -565.685 \\ 0 & 0 & 0 & 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & -565.685 & -2.814 \times 10^4 & 2.843 \times 10^4 & -565.685 \\ 0 & 0 & 0 & 565.685 & 565.685 & 1.508 \times 10^3 & -565.685 & -565.685 & 3.017 \times 10^3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\{f\} = [K]\{d\}$$

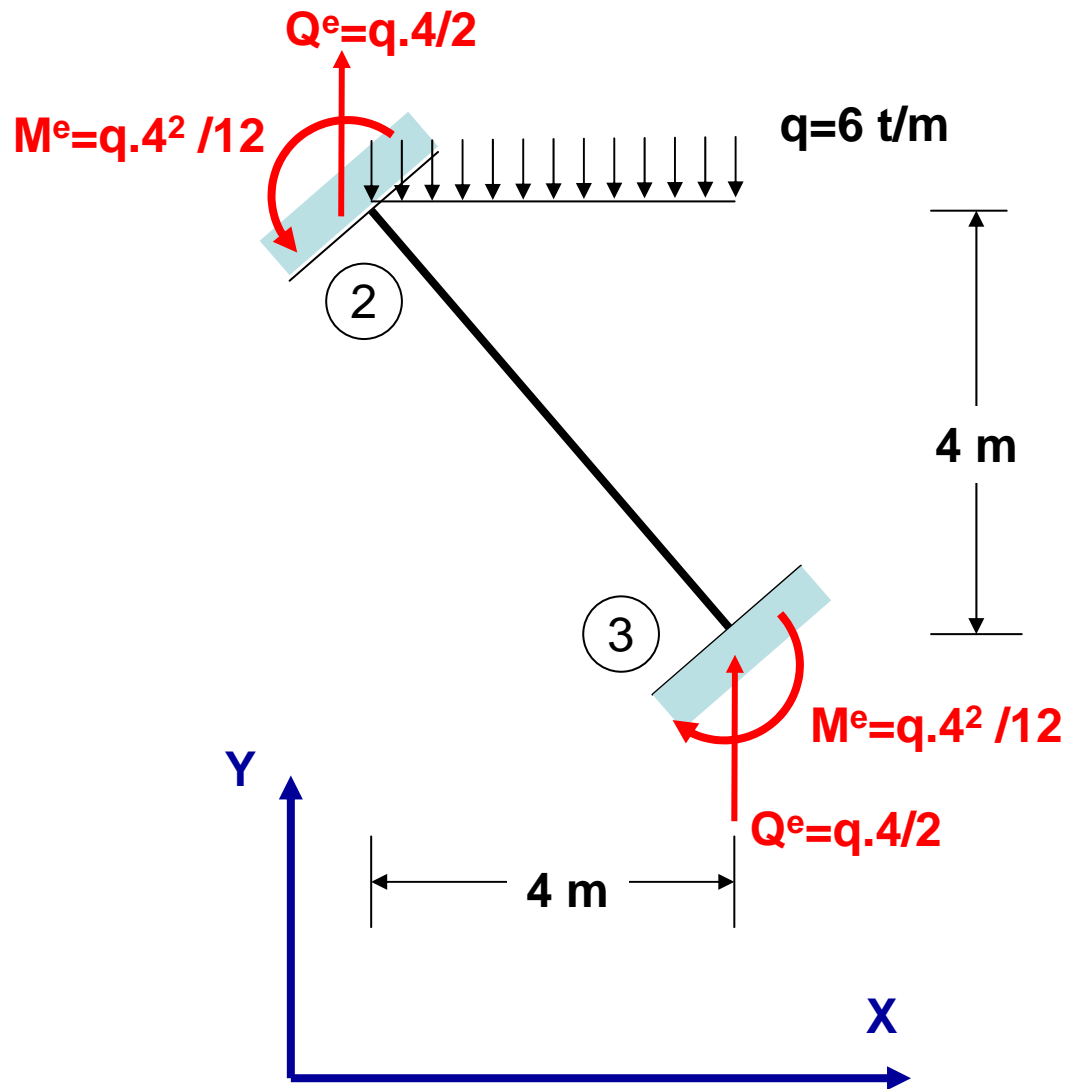
VECTOR DE CARGAS

$$\{f_i\} = \{p_i\} - \sum \{r_i\}$$



$$\{p\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

NUDO 1
 NUDO 2
 NUDO 3



$$r_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$r_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ -8 \end{Bmatrix}$$

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad \{r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 8 \\ 0 \\ 12 \\ -8 \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ 0 \\ -12 \\ -8 \\ H_3 \\ V_3 - 12 \\ M_3 + 8 \end{Bmatrix}$$

The diagram illustrates the relationship between three vectors: $\{p\}$, $\{r\}$, and $\{f\}$. Each vector is partitioned into three sections corresponding to three nodes (NUDO 1, NUDO 2, and NUDO 3).

- NUDO 1 (top section):**
 - $\{p\}$: H_1, V_1, M_1
 - $\{r\}$: $0, 0, 0$
 - $\{f\}$: H_1, V_1, M_1
- NUDO 2 (middle section):**
 - $\{p\}$: $0, 0, 0$
 - $\{r\}$: $12, 8, 0$
 - $\{f\}$: $0, -12, -8$
- NUDO 3 (bottom section):**
 - $\{p\}$: H_3, V_3, M_3
 - $\{r\}$: $0, 12, -8$
 - $\{f\}$: $H_3, V_3 - 12, M_3 + 8$

Dashed green lines and arrows indicate the boundaries and groupings for each node.

$$\{f\} = [K]\{d\}$$

$$\begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ 0 \\ -12 \\ -8 \\ H_3 \\ V_3 - 12 \\ M_3 + 8 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 3.055 \times 10^4 & 2.428 \times 10^4 & -390.053 & -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & -390.053 & 0 & 0 & 0 \\ 2.428 \times 10^4 & 1.962 \times 10^4 & 487.567 & -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & 487.567 & 0 & 0 & 0 \\ -390.053 & 487.567 & 2.665 \times 10^3 & 390.053 & -487.567 & 1.333 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & 390.053 & 5.897 \times 10^4 & -3.86 \times 10^3 & 955.739 & -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & 565.685 \\ -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & -487.567 & -3.86 \times 10^3 & 4.805 \times 10^4 & 78.119 & 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & 565.685 \\ -390.053 & 487.567 & 1.333 \times 10^3 & 955.739 & 78.119 & 5.682 \times 10^3 & -565.685 & -565.685 & 1.508 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 0 & -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & -565.685 & 2.843 \times 10^4 & -2.814 \times 10^4 & -565.685 \\ 0 & 0 & 0 & 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & -565.685 & -2.814 \times 10^4 & 2.843 \times 10^4 & -565.685 \\ 0 & 0 & 0 & 565.685 & 565.685 & 1.508 \times 10^3 & -565.685 & -565.685 & 3.017 \times 10^3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Supresión de las ecuaciones correspondientes a gdl con movimientos impedidos

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ 0 \\ -12 \\ -8 \\ H_3 \\ V_3 \\ M_3 + 8 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
 3.055 \times 10^4 & 2.428 \times 10^4 & -390.053 & -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & -390.053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2.428 \times 10^4 & 1.962 \times 10^4 & 487.567 & -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & 487.567 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -390.053 & 487.567 & 2.663 \times 10^3 & 390.053 & -487.567 & 1.333 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & 390.053 & 5.897 \times 10^4 & -3.86 \times 10^3 & 955.739 & -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & 565.685 & & & \\
 -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & -487.567 & -3.86 \times 10^3 & 4.805 \times 10^4 & 78.119 & 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & 565.685 & & & \\
 -390.053 & 487.567 & 1.333 \times 10^3 & 955.739 & 78.119 & 5.682 \times 10^3 & -565.685 & -565.685 & 1.508 \times 10^3 & & & \\
 0 & 0 & 0 & -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & -565.685 & 2.843 \times 10^4 & -2.814 \times 10^4 & -565.685 & & & \\
 0 & 0 & 0 & 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & -565.685 & -2.814 \times 10^4 & 2.843 \times 10^4 & -565.685 & & & \\
 0 & 0 & 0 & 565.685 & 565.685 & 1.508 \times 10^3 & 565.685 & 565.685 & 3.017 \times 10^3 & & &
 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\{f^*\} = [K^*]\{d^*\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -12 \\ -8 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 5.897 \times 10^4 & -3.86 \times 10^3 & 955.739 \\ -3.86 \times 10^3 & 4.805 \times 10^4 & 78.119 \\ 955.739 & 78.119 & 5.682 \times 10^3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 6.618 \times 10^{-6} \\ -2.469 \times 10^{-4} \\ -1.406 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$\{d\}$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \\ \theta_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \\ \theta_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.618 \times 10^{-6} \\ -2.469 \times 10^{-4} \\ -1.406 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

REACCIONES EN LOS NUDOS 1 Y 3

$$\begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = [K_{12}^{(1)}] \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \{r_1\} \qquad \begin{Bmatrix} H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = [K_{21}^{(2)}] \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \{r_3\}$$

$$\begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -3.055 \times 10^4 & -2.428 \times 10^4 & -390.053 \\ -2.428 \times 10^4 & -1.962 \times 10^4 & 487.567 \\ 390.053 & -487.567 & 1.333 \times 10^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.618 \times 10^{-6} \\ -2.469 \times 10^{-4} \\ -1.406 \times 10^{-3} \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,343 \\ 4 \\ -1,75 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -2.843 \times 10^4 & 2.814 \times 10^4 & -565.685 \\ 2.814 \times 10^4 & -2.843 \times 10^4 & -565.685 \\ 565.685 & 565.685 & 1.508 \times 10^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.618 \times 10^{-6} \\ -2.469 \times 10^{-4} \\ -1.406 \times 10^{-3} \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ -8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6,343 \\ 20 \\ -10,256 \end{Bmatrix}$$

ESFUERZOS EN LAS BARRAS

$$\begin{aligned}\{\mathbf{S}'_1\} &= [\mathbf{K}'_{11}] \cdot [\mathbf{T}]^T \{\mathbf{d}_1\} + [\mathbf{K}'_{12}] \cdot [\mathbf{T}]^T \{\mathbf{d}_2\} + \{\mathbf{r}'_1^e\} \\ \{\mathbf{S}'_2\} &= [\mathbf{K}'_{21}] \cdot [\mathbf{T}]^T \{\mathbf{d}_1\} + [\mathbf{K}'_{22}] \cdot [\mathbf{T}]^T \{\mathbf{d}_2\} + \{\mathbf{r}'_2^e\}\end{aligned}$$

BARRA-1

Nudo 1

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{\theta1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7,45 \\ -0,84 \\ -1,75 \end{Bmatrix}$$

Nudo 2

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S'_{x2} \\ S'_{y2} \\ S'_{\theta2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7,45 \\ 0,84 \\ -3,62 \end{Bmatrix}$$

BARRA-2

Nudo 1

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{\theta1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,66 \\ 7,31 \\ 3,62 \end{Bmatrix}$$

Nudo 2

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S'_{x2} \\ S'_{y2} \\ S'_{\theta2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18,63 \\ 9,66 \\ -10,26 \end{Bmatrix}$$