CAPÍTULO 5

INESTABILIDAD ELÁSTICA. PANDEO

1.1. INESTABILIDAD ELÁSTICA

Cuando se analizó en Mecánica el equilibrio de un sólido, se definieron las tres formas básicas de equilibrio: equilibrio estable, inestable o indiferente. A modo de recordatorio, supongamos un cilindro que descansa sobre otra superficie cilíndrica (Figura 0.1). Dependiendo de la forma de esta superficie, nos podríamos encontrar en una de estas tres situaciones:

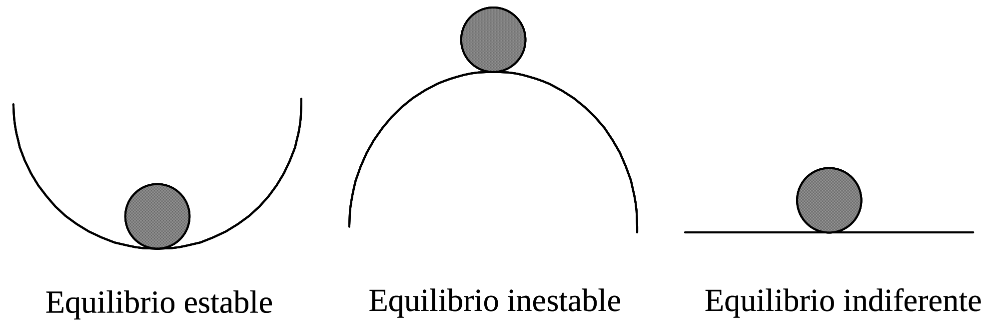

Figura 0.1

En la primera de ellas, si desplazáramos ligeramente el cilindro de su posición de equilibrio, las propias fuerzas que actúan sobre él tratarían de conducirlo a su posición de equilibrio original. En este caso, el estado de equilibrio inicial se definirá como de equilibrio estable. En el segundo caso, si realizamos el mismo razonamiento, el cilindro se alejará de su posición de equilibrio: las fuerzas que sobre él actúan lo alejan de dicha posición, por lo que el equilibrio se denominará inestable. En el tercer y último caso, el razonamiento empleado conduce al cilindro a una nueva posición de equilibrio y, entonces, diremos que el equilibrio es indiferente.

Supongamos, ahora, otro caso muy simple: una barra con un pasador en un extremo y libre en el otro (caso *a)* de la Figura 0.2). Si sobre el extremo libre aplicamos una fuerza hacia arriba y desplazáramos la barra de su posición original de equilibrio, la propia fuerza aplicada trataría de posicionar la barra en su posición de equilibrio inicial, por lo que el estado de equilibrio de la barra sería estable.

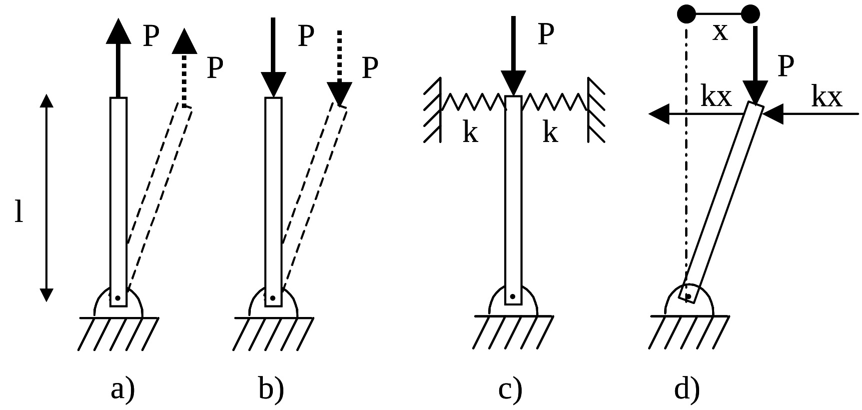

Figura 0.2

Si la fuerza aplicada fuese de compresión, una vez realizada la misma operación que en el caso anterior, la propia fuerza aplicada tendería a hacer girar más aún a la barra (caso *b)* de la Figura 0.2) por lo que el equilibrio sería inestable. Pasemos, ahora, al caso *c)* de la Figura 0.2, en el que, sobre el extremo superior de la barra, actúan dos resortes de constante k. Si desplazásemos el extremo superior hacia la derecha una cantidad x (caso *d)* de la Figura 0.2), el equilibrio sería estable si el momento estabilizador ($2kxl$) superase al momento desestabilizador (Px) e inestable si sucediera lo contrario. Es decir:

- Si: $2kxl>Px$ (lo que implica $P<2kl$) el equilibrio es estable.

- Si: $2kxl<Px$ (lo que implica $P>2kl$) el equilibrio es inestable.

Nótese que, en ambos casos, el hecho de que el equilibrio sea estable o inestable depende del valor de la carga aplicada, de las condiciones de sustentación y, por tanto, de las reacciones, y de un parámetro geométrico de la barra (su longitud). En absoluto el tipo de equilibrio depende de la magnitud x.

Pero planteémonos qué sucede cuando ambos momentos son iguales y, por tanto, $P=2kl$. En ese caso nos encontramos en una *condición crítica* en la que el equilibrio va a pasar de ser estable a inestable y a ese valor de la carga P lo llamaremos **carga crítica** y lo representaremos por P_c.

Un experimento que podemos realizar de una forma sencilla, y que nos ayudará a entender mejor lo que sigue, es el siguiente: cojamos una regla larga y, manteniéndola sujeta por un solo dedo en cada extremo, comprimámosla. Observaremos que, si la fuerza que aplicamos es pequeña, la regla sigue recta pero que, si la fuerza es grande, aunque estamos comprimiendo (esfuerzo axil de compresión), la barra comenzará a sufrir desplazamientos ortogonales a la dirección en la que estamos aplicando la carga. En ese momento diremos que la barra comienza a “pandear”.

Este experimento tan sencillo sería extrapolable a un pilar de una construcción que se encuentre trabajando a compresión (que es el modo de trabajo de los pilares). Es decir, sin haber agotado la capacidad resistente del material del pilar (comportándose el material en régimen elástico), éste ha dejado de cumplir con su misión estructural cuando la carga de compresión que sobre él actúa haya alcanzado un valor tal que el pilar esté a punto de pandear (inestabilidad)

1.2. PANDEO EN BARRAS

Vamos a determinar la carga crítica de pandeo de barras (también conocida como de Euler, en honor de Thomas Euler (1707-1783), con diferentes tipos de sustentación. Supondremos que la carga *P*, que se aplica en el centro de gravedad de la sección transversal de la barra, es de compresión y que el plano en el que se produce el fenómeno de pandeo es un plano de simetría de la pieza prismática.

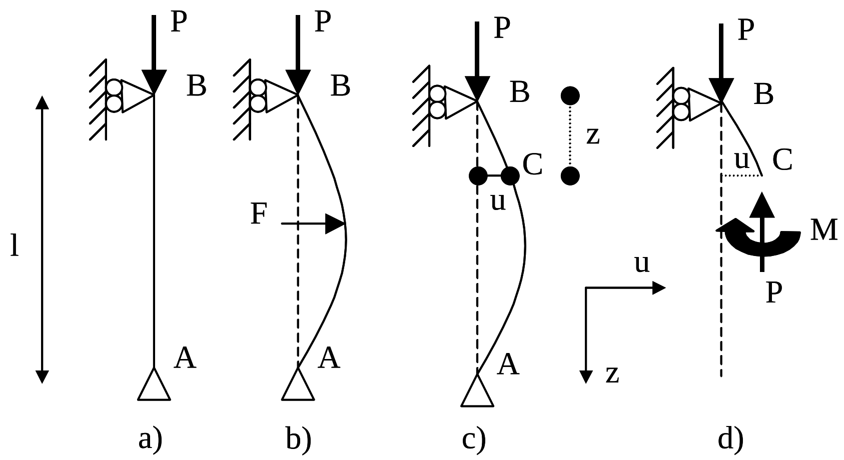

Figura 0.3

Como primer caso, consideremos una barra biapoyada sometida a compresión, como la que se indica en la Figura 0.3 *(a)*.

Si una vez cargada la viga, se aplicara una pequeña fuerza horizontal *F* (ver figura 5.3 *(b)*), la barra flectaría (estamos separando la barra de su posición de equilibrio) de manera que, a una distancia *z* del extremo superior, el desplazamiento horizontal de la directriz sería *u* (Figura 0.3 *(c)*). Observando la sección C de la Figura 0.3 *(d)*, si $M>Pu$ el equilibrio sería estable y si *M<Pu*, inestable. Cuando el momento es crítico *(M=Pu)*, podemos tomar momentos en *C* obteniendo:

$$M = Pu = -\frac{d^2u}{dz^2}EI$$

ecuación que se puede escribir como:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{P}{EI}u = 0 \qquad ó \qquad \frac{d^2u}{dz^2} + k^2u = 0$$

siendo

$$k^2 = \frac{P}{EI}.$$

La solución de la ecuación diferencial anterior es de la forma:

$$u = A\cos(kz) + B\,\mathrm{sen}\,(kz)$$

Imponiendo las siguientes condiciones de contorno, tenemos:

$$\left.\begin{matrix} z=0 \;\; u=0 \\ z=l \;\; u=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=0 \quad y \quad B\,sen(kl)=0$$

Para que se cumpla la última ecuación anterior, ó *B=0* ó *sen (kl)=0*. Si *B=0* la solución de la ecuación diferencial sería la trivial (*u=0* para cualquier valor de *z*), por lo que, para encontrar una solución distinta de ésta, tenemos que obligar a que *sen (kl)=0*. Esto último conduce a que el producto *kl* debe ser un número entero de veces el ángulo π. Es decir:

$$kl = n\pi \quad n = 1,2,....$$

Para *n=1*, tendríamos:

$$k = \pi / l$$

y, por tanto, la carga crítica de pandeo P_c sería:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Este valor, deducido por primera vez en 1744, también se denomina carga crítica de Euler.

El valor máximo de *u*, u_{max}, se producirá cuando *z=l/2*, por lo que podemos escribir la deformada de la pieza como:

$$u = u_{\max}\,\mathrm{sen}\,(kz)$$

De la ecuación que proporciona la carga crítica de Euler, podemos deducir lo siguiente:

- Si en cociente ente el momento de inercia y el cuadrado de la longitud de la pieza, I/l^2 decrece, P_c decrece.

- Si el momento de inercia I aumenta, manteniendo la longitud l constante, P_c aumenta

- Si la longitud l aumenta, manteniendo el momento de inercia I constante, P_c aumenta

Una pregunta que surge es en qué plano se producirá el pandeo de una pieza. La contestación es muy simple: en aquél en el que el momento de inercia de la sección de la pieza respecto a un eje ortogonal a él sea mínimo. Es decir, dada una sección, podríamos determinar los momentos de inercia de la misma respecto de todos los ejes que pasen por su centro de gravedad. Pues bien, una vez determinado el eje respecto del cual el momento de inercia es mínimo, el plano de pandeo será ortogonal a dicho eje.

Si llamamos I_{min} al momento de inercia mínimo, la carga crítica de pandeo de la pieza será:

$$P_c = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l^2}$$

Si i_{min} es el radio de giro de la sección respecto del eje de momento de inercia mínimo, y llamando Ω al área de la sección, se tiene que:

$$\boldsymbol{I}_{\min} = \Omega \boldsymbol{i}_{\min}^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P_c} = \frac{\pi^2 \boldsymbol{E}\Omega}{\left(\dfrac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{i}_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 \boldsymbol{E}\Omega}{\lambda^2}$$

Este parámetro λ recibe el nombre de **esbeltez de la pieza** y es, simplemente, el cociente entre su longitud y el radio de giro mínimo de su sección. Nótese que, cuanto más grande sea la esbeltez de una pieza, menor es su carga crítica de pandeo.

Si la pieza que estamos considerando tuviera otras condiciones de apoyo, la carga crítica de pandeo cambiaría. Así, por ejemplo, para los siguientes casos:

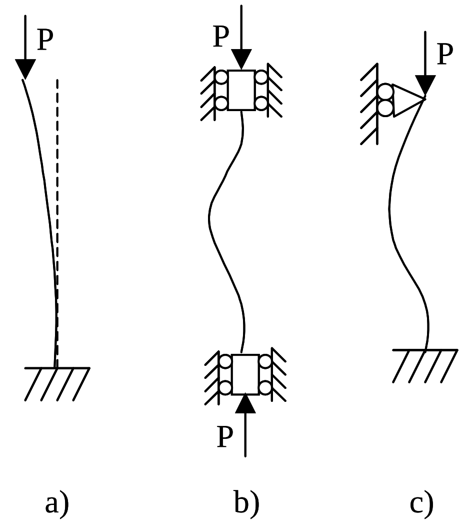

Figura 0.4

las cargas críticas de pandeo resultarían ser:

a) $$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

b) $$P_c = \frac{\pi^2 EI}{\left(l/2\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

c) $$P_c = \frac{\pi^2 EI}{\left(l/\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2} \approx \frac{20\,EI}{l^2}$$

Todas las expresiones anteriores responden a una misma expresión general del tipo:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(\alpha\, l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_p^2}$$

donde l_p recibe el nombre de longitud de pandeo de la pieza y representa la distancia entre dos puntos de inflexión consecutivos de la elástica.

1.3. LIMITE DE APLICACIÓN DE LA FORMULA DE EULER. FORMULA DE ENGESSER

Veamos el campo de aplicación de lo que hemos visto. Para ello analicemos la Figura 0.5, en la que se muestra el desplazamiento horizontal u que sufre un punto de la pieza en función de la carga de compresión P aplicada. En el caso teórico, mientras la carga no supere el valor P_c dicho desplazamiento es nulo, y crece indefinidamente una vez que la carga aplicada haya alcanzado este último valor.

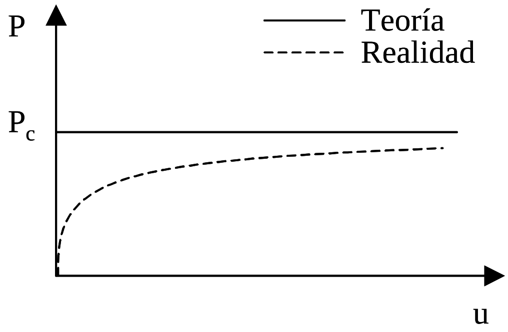

Figura 0.5

En la realidad sucede lo representado en la Figura 0.5 mediante la línea de puntos: aunque la carga *P* la apliquemos en el centro de gravedad de la pieza (compresión pura), aparecerán desplazamientos horizontales en la misma que crecen más rápidamente a medida que la carga aplicada se va aproximando a la carga crítica de pandeo, a partir de la cual, los desplazamientos horizontales crecen mucho más rápidamente.

Como ya vimos, la carga crítica de pandeo tiene, como expresión general, la siguiente:

$$\boldsymbol{P_c} = \frac{\pi^2 \boldsymbol{E}\Omega}{\lambda^2}$$

y la tensión de compresión σ_c a la que se encuentra sometida la pieza cuando la carga a que está sometida es justo la anterior, será:

$$\sigma_{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{P_c}}{\Omega} = \frac{\pi^2 \boldsymbol{E}}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\boldsymbol{c}}\lambda^2 = \pi^2 \boldsymbol{E} = \text{constante}$$

Esta última expresión es la ecuación de una hipérbola en un plano cuyos ejes coordenados fuesen σ_c y λ, y recibe el nombre de hipérbola de Euler, tal como se representa en la Figura 0.6:

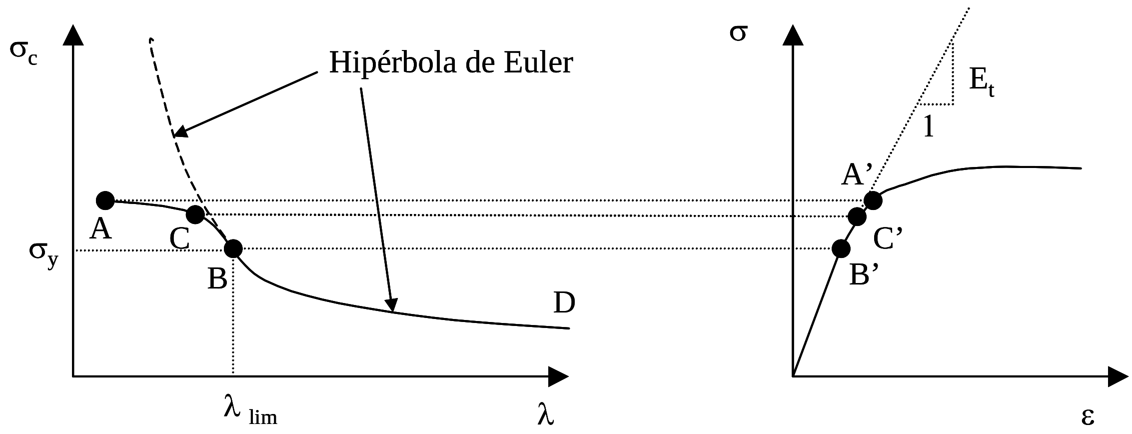

Figura 0.6

En la Figura 0.6 se observa que, cuando nos movemos en la zona DB la pieza pandea pero el comportamiento del material es elástico lineal. Al llegar al punto B (que corresponde al punto B' de la curva tensión-deformación), comienza a producirse la plastificación del material, y la relación entre σ_c y λ no sigue la hipérbola de Euler sino la curva BCA de la figura de la izquierda. Tenemos, entonces, pandeo acompañado de plastificación del material. En estas condiciones (por ejemplo, cuando nos encontramos en el punto C) se puede admitir que la relación entre σ_c y λ viene dada por la expresión:

$$\sigma_c \lambda^2 = \pi^2 E_T$$

donde E_T es el módulo tangente en la curva tensión-deformación correspondiente al punto C'. Esta última expresión recibe el nombre de *Fórmula de Engesser* en honor de Friedrich Engesser (1848-1931).