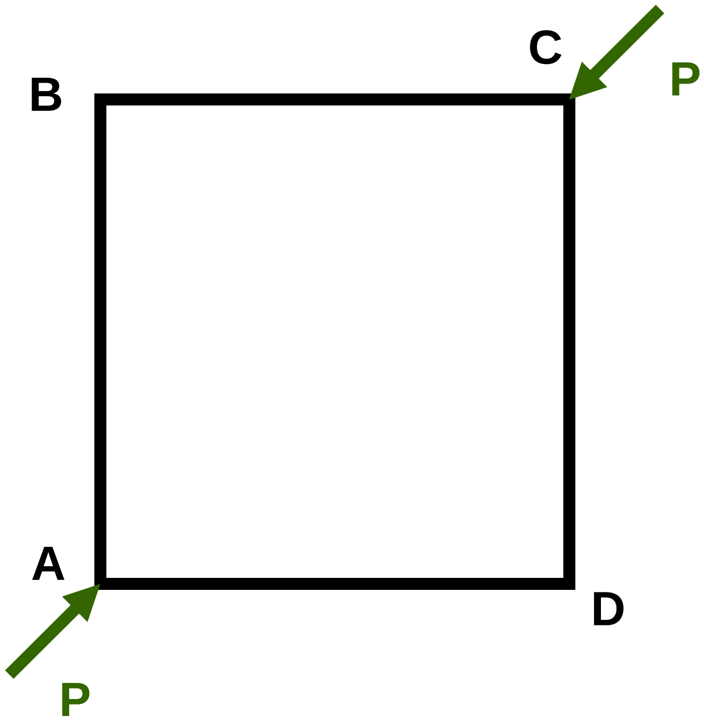
MARCOS Y ANILLOS

Prof. Carlos Navarro

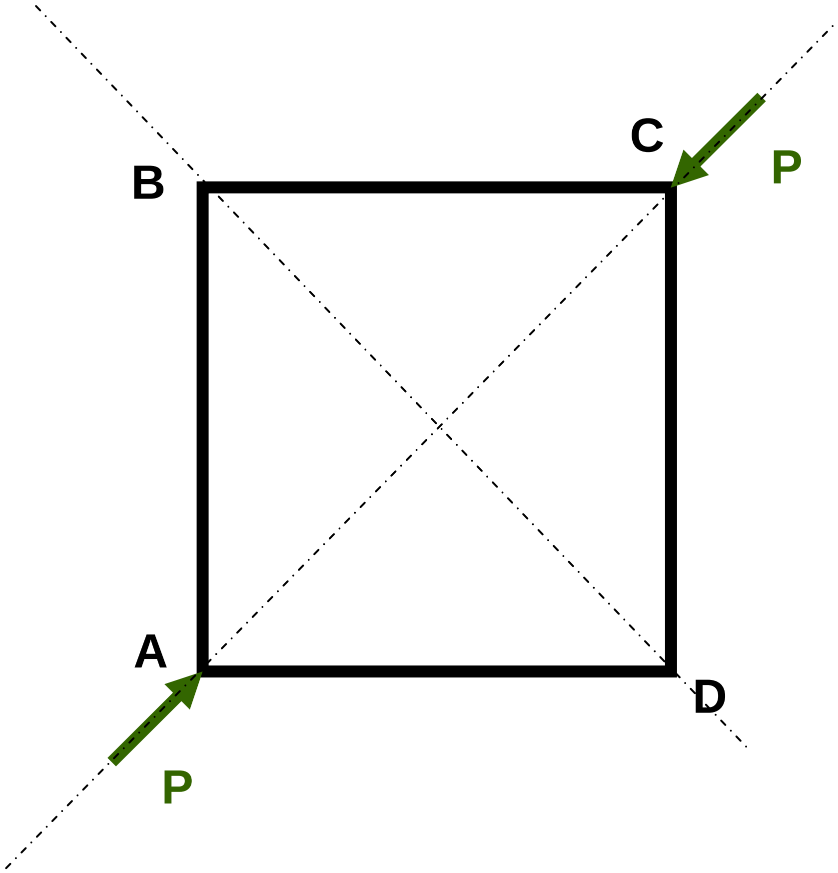
Departamento de Mecánica de Medios Continuos
y Teoría de Estructuras

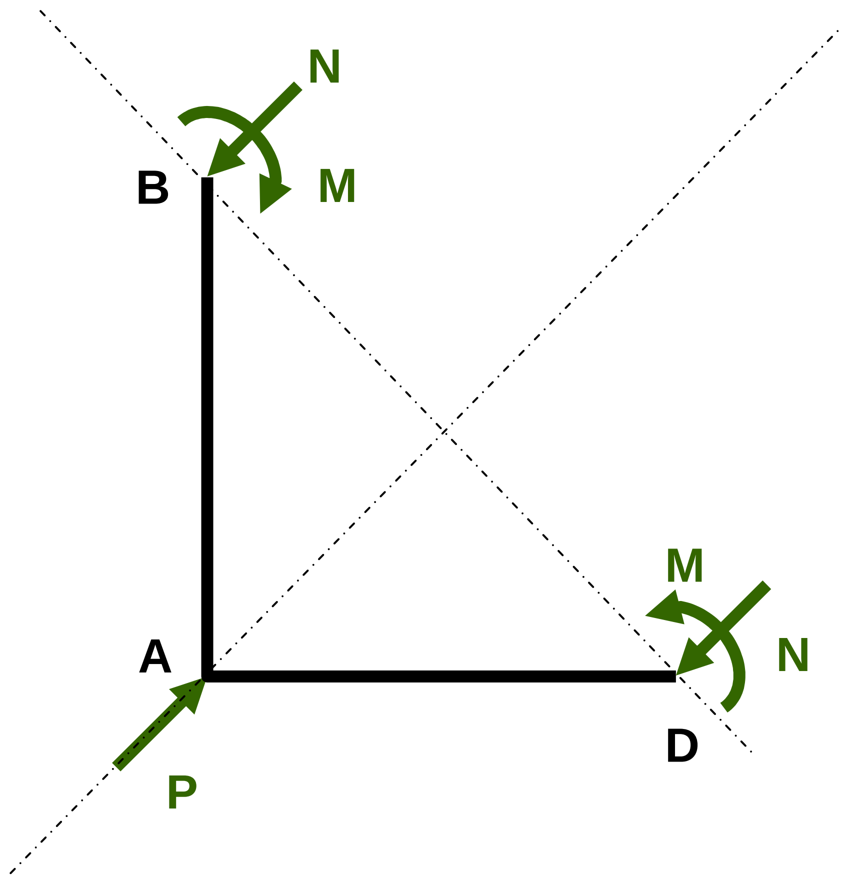
Resolver el marco cuadrado (lado L) de la figura sometido a las cargas indicadas. Supóngase conocida la rigidez EI de las barras.



¡Por supuesto despreciamos los movimientos inducidos por los esfuerzos Axil y cortante!

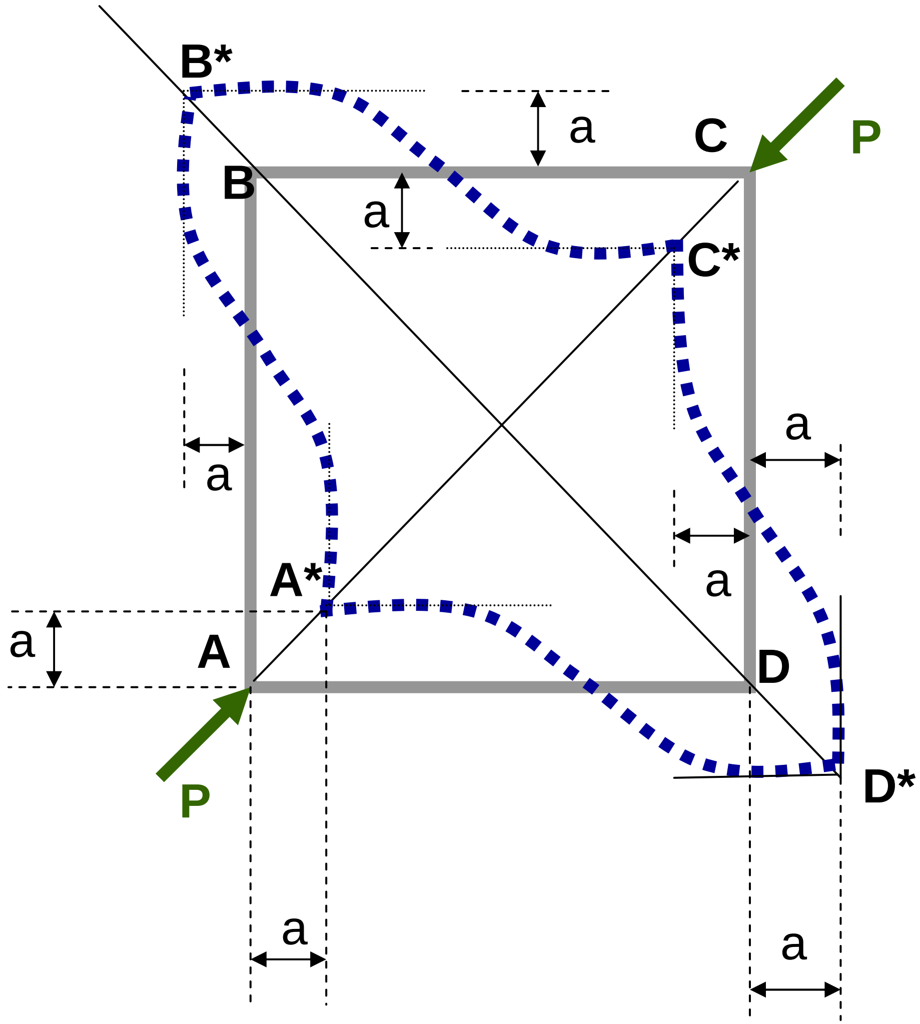
El marco tiene los dos ejes de simetría indicados en la figura:





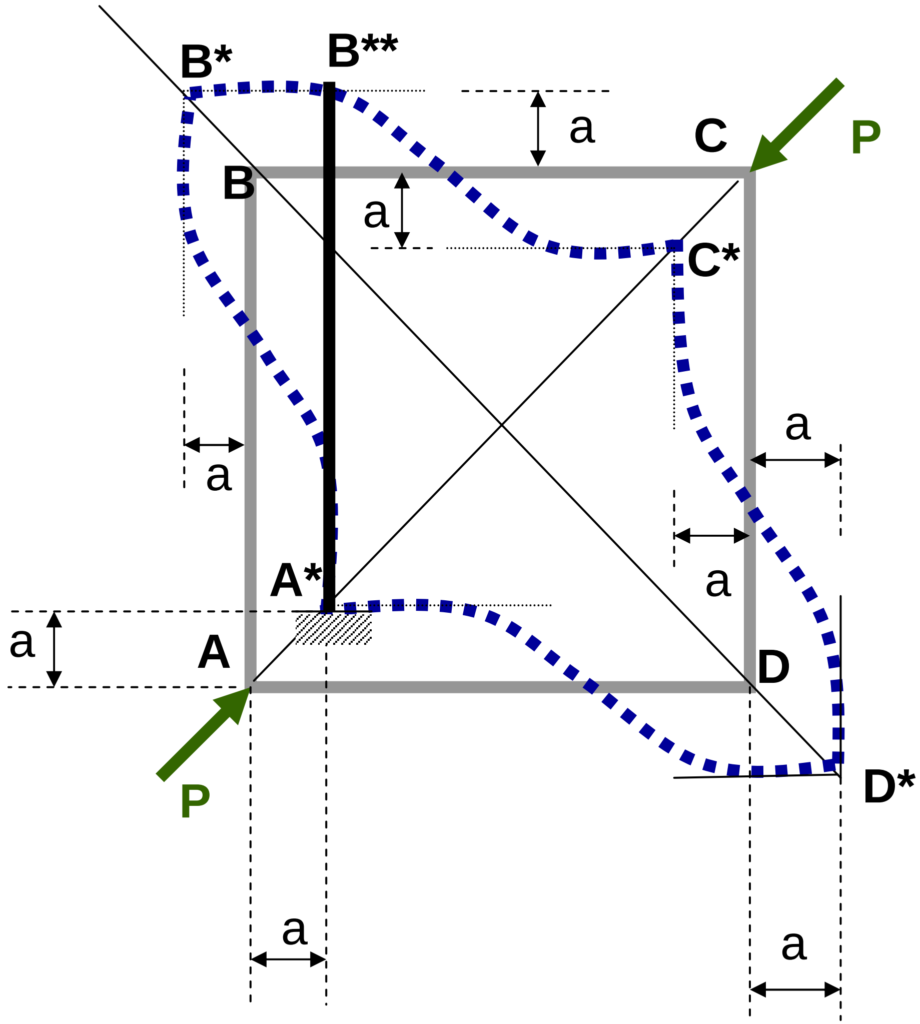
Por equilibrio: N=P/2

¿Cómo se deforma el marco ? Hay que tener en cuenta que las barras ni se acortan ni se alargan:

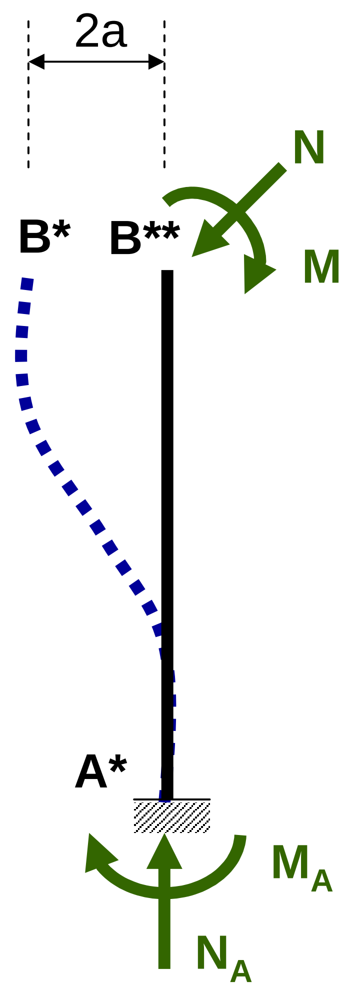


Las secciones A, B, C y D no giran por ser secciones de corte con un eje de simetría

Si, una vez deformado el marco, empotramos en A* y cortamos por B* (liberando los esfuerzos internos):



Si sobre B** actuase, de nuevo, N=P/2 y M, B** pasaría a la posición B* sin experimentar ningún giro.



$$\overset{\curvearrowleft}{\theta}_{B^{**}} = \frac{\left(P/2\cdot \cos 45\right)L^2}{2EI} - \frac{ML}{EI} = 0$$

$$M = \frac{P}{4} L \cdot \cos 45^o$$

$$M_A = \frac{P}{2}\cos 45^o \cdot L - M = M$$

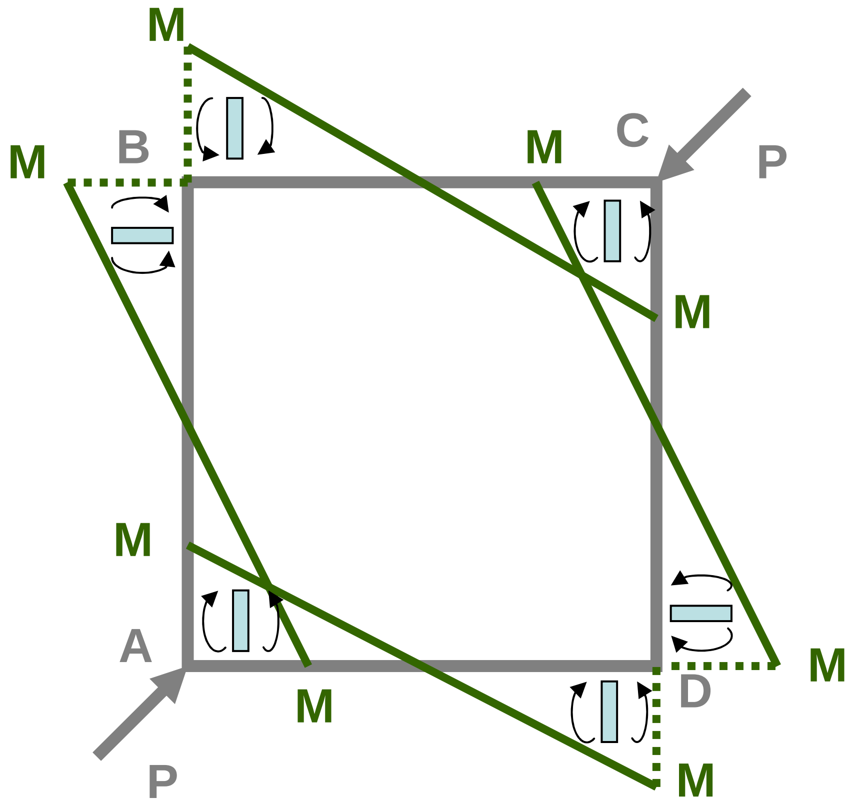
$$N_A = \frac{P}{2} sen 45^o$$

$$2a = \frac{\frac{P}{2}\cos 45^o \cdot L^3}{3EI} - \frac{ML^2}{2EI} =$$

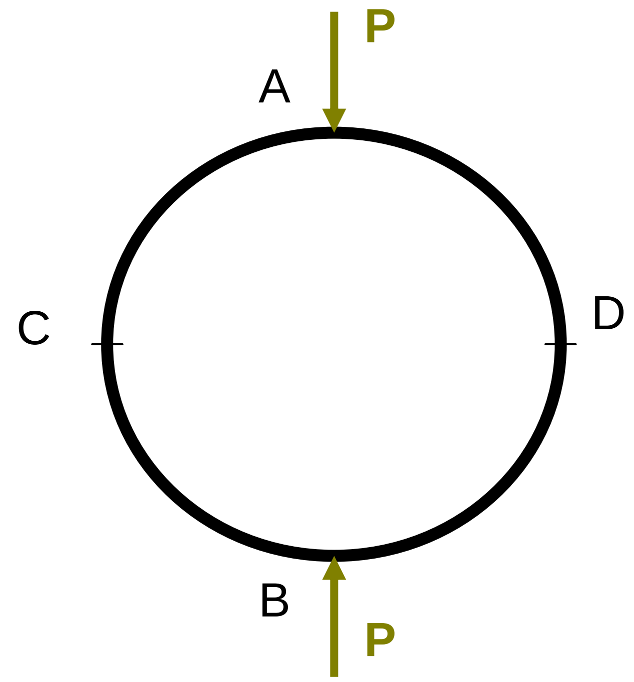
$$= \frac{P\cos 45^o \cdot L^3}{6EI} - \frac{P\cos 45^o \cdot L^3}{8EI} = \frac{P\cos 45^o \cdot L^3}{24EI}$$

$$a = \frac{P\cos 45^o \cdot L^3}{48EI}$$

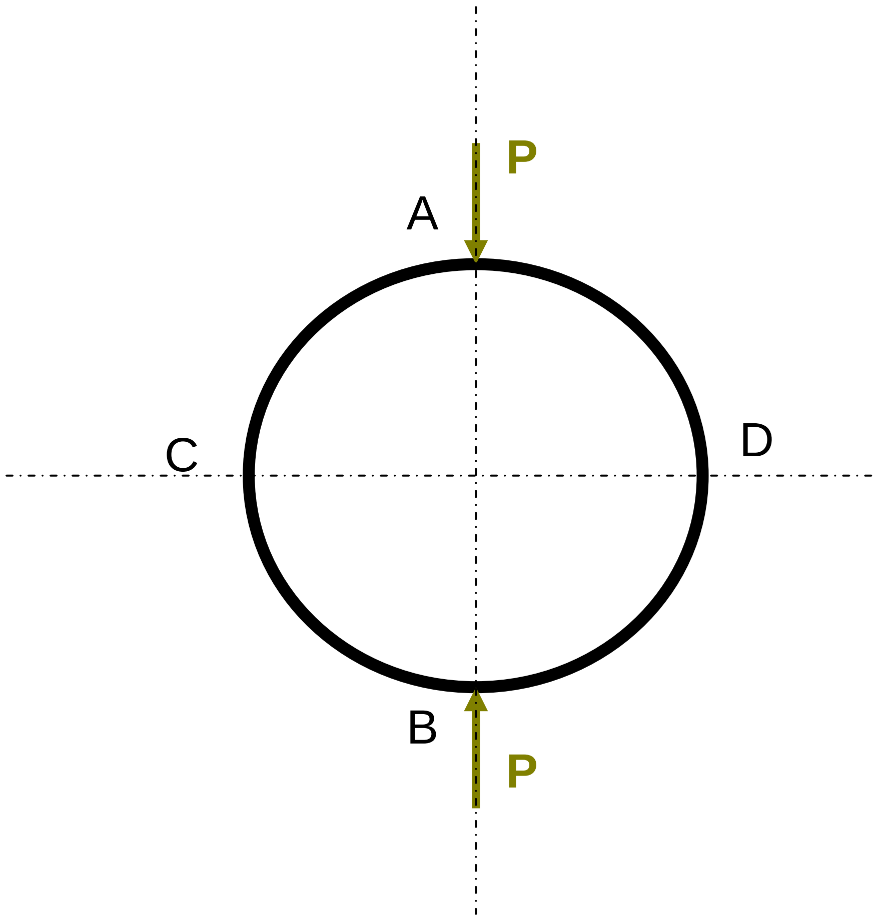
Ley de momentos flectores:



Resolver el anillo de la figura sometido a las cargas indicadas

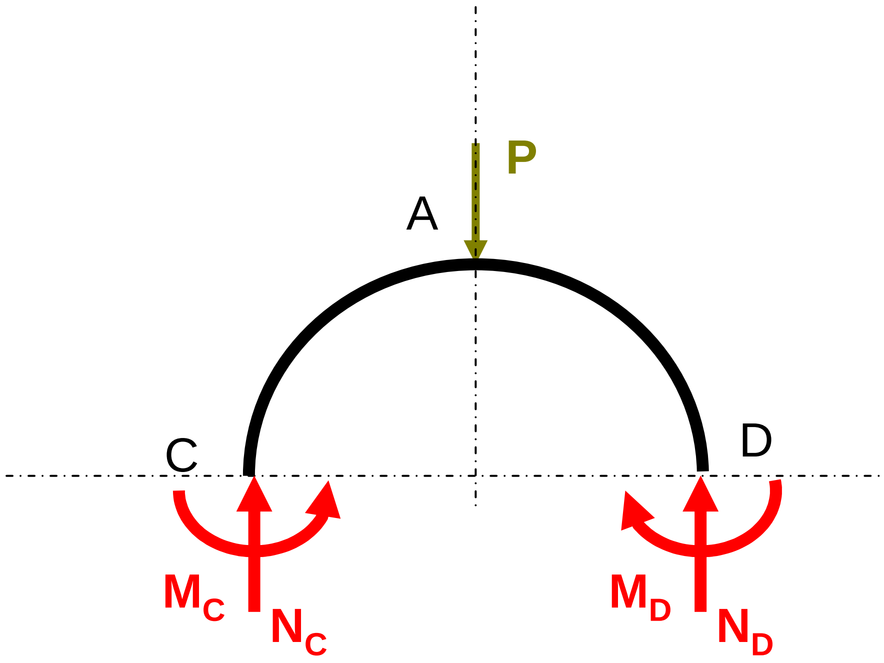


La estructura tiene dos ejes de simetría



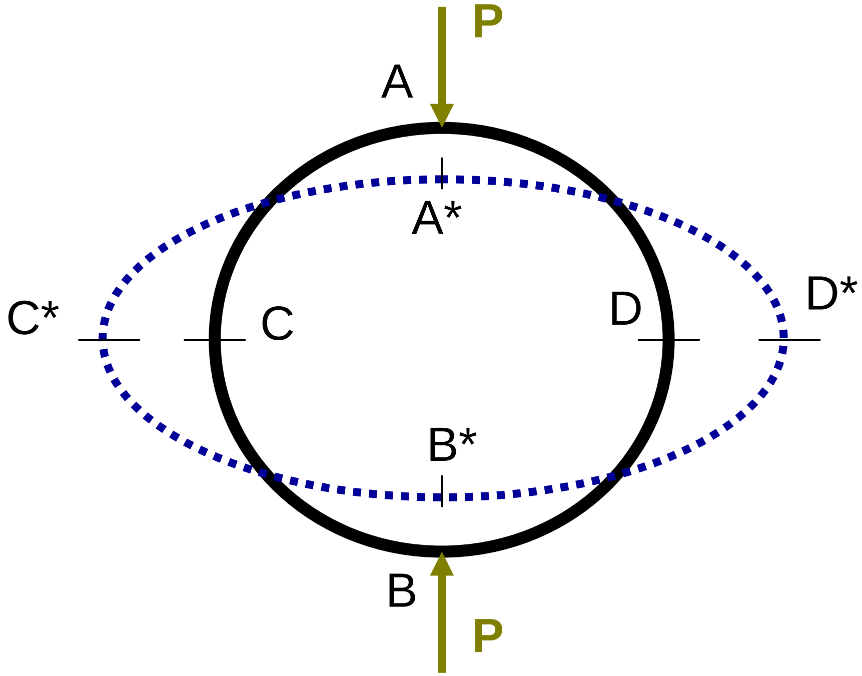
Por razones de simetría, en las secciones C y D sólo existen axil y flector y en las secciones A y B axil(=0), cortante (P/2) y flector.

Cortemos la estructura por la línea CD:



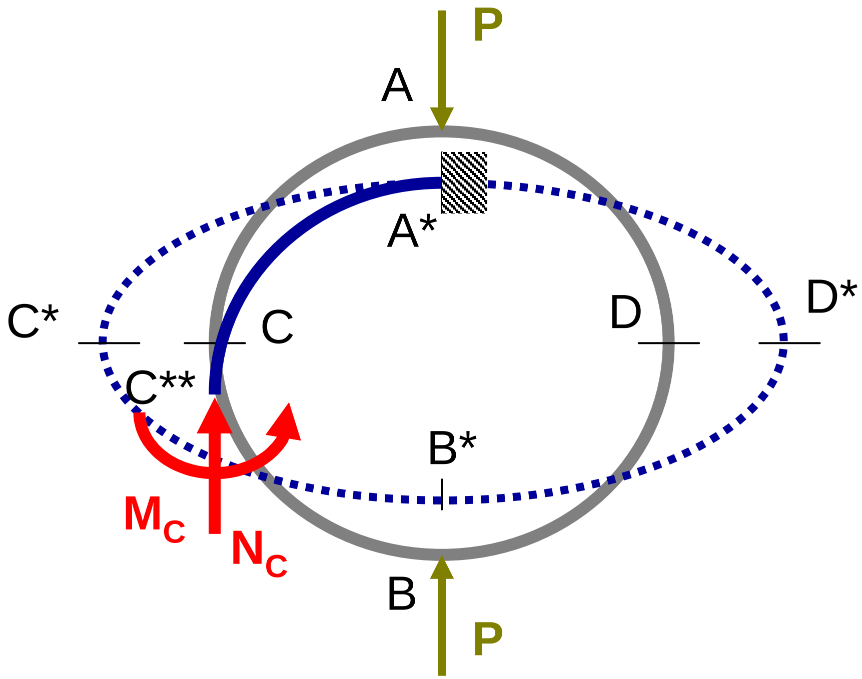
Planteando el equilibrio de fuerzas verticales:

$$N_C = N_D = P/2$$

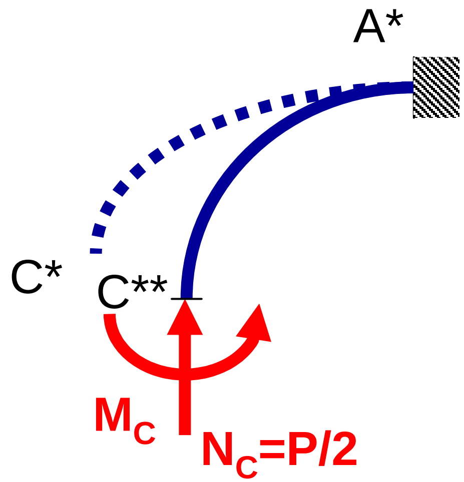


Las secciones A, B, C y D pasan, respectivamente, a A*, B*, C* y D* sin girar

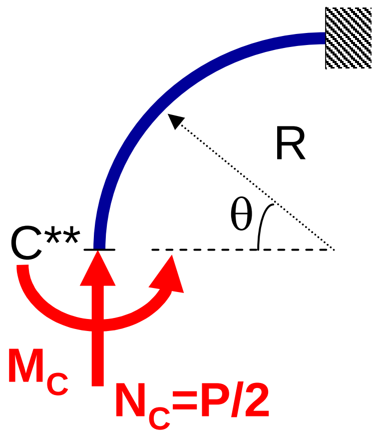
Demos un corte a la estructura deformada por la sección C* manteniendo fija la sección A* y retiremos todos los esfuerzos que actúan en C:



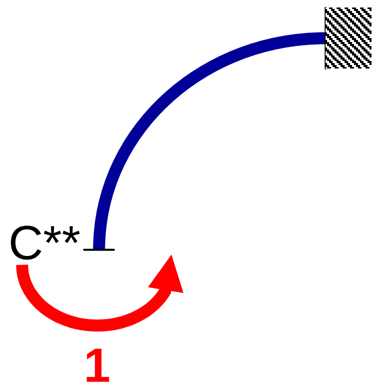
C pasaría a C***



Condición: C no gira!!!!**



Estado 0



Estado I

Ley de momentos flectores:

$$M^0 = M_C - \frac{P}{2}R(1-\cos\theta) \qquad\qquad M^I = 1$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\theta}_{C^{**}} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} M^0 \cdot M^I \cdot ds = \int_0^{\pi/2} \left(M_C - \frac{P}{2}R(1-\cos\theta)\right)\cdot 1 \cdot R\,d\theta = 0$$

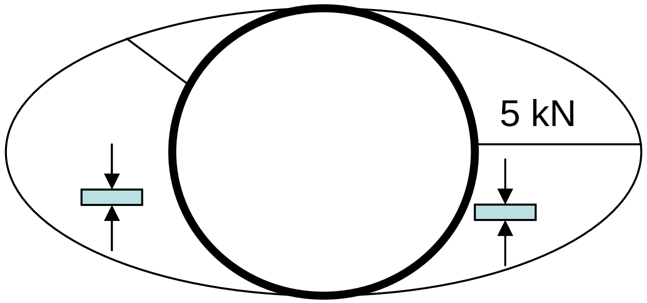
Esta última ecuación nos proporciona el valor de M_C

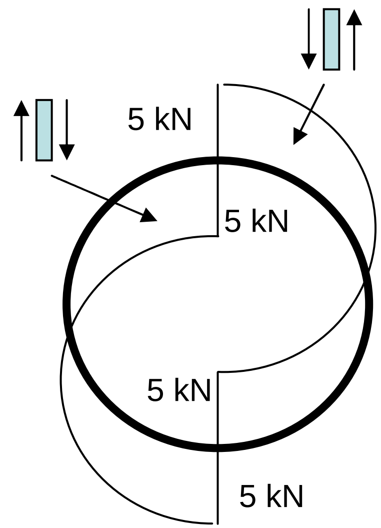
Nótese que los valores de los esfuerzos en C son independientes del valor de EI

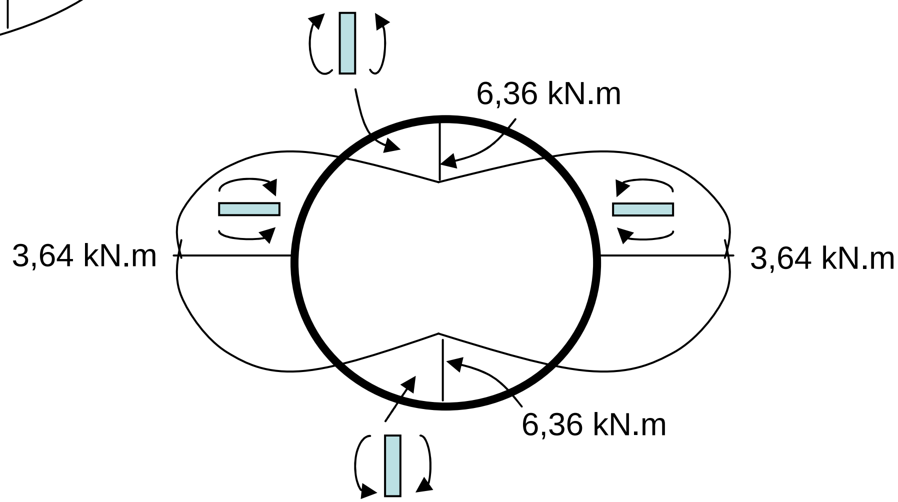
Demos valores numéricos a las magnitudes que aparecen en este problema:
$P=100$ kN, $R=2$m y $EI=10^5$ kN.m^2

$$M_C=3{,}64 \text{ kN.m}$$

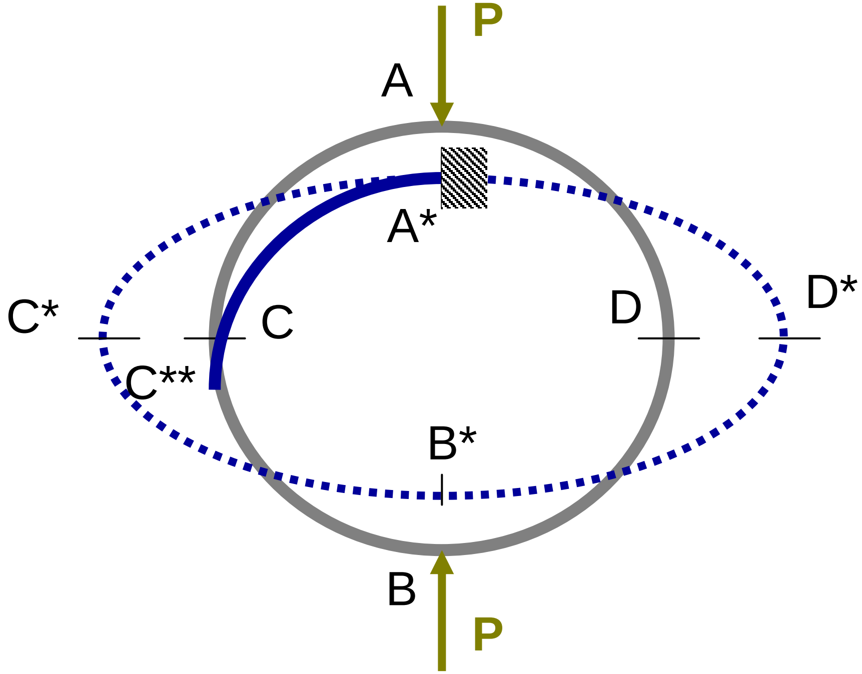
Las leyes de axiles, cortantes y flectores son:







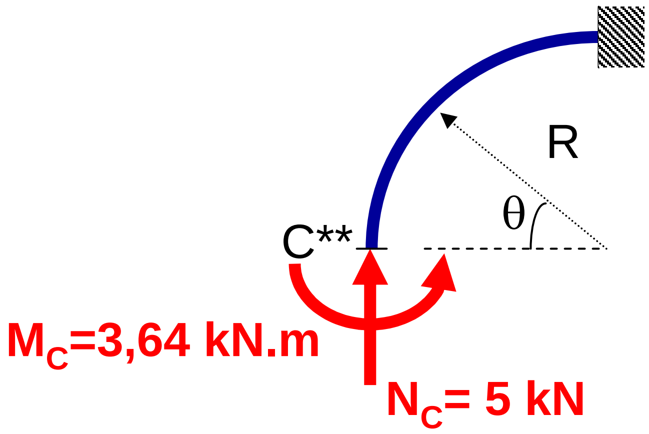
Supongamos que nos piden el desplazamiento (corrimiento) relativo entre A y B



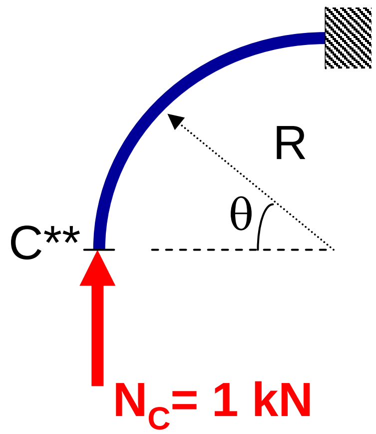
AA*(hacia abajo)=desplazamiento vertical ascendente de C**

Desplazamiento relativo entre A y B=2 AA*

Luego el problema queda reducido a calcular el desplazamiento vertical de C**



Estado 0



Estado 1

Leyes de momentos flectores:

$$M^0 = M_C - \frac{P}{2} R(1-\cos\theta) \qquad M^I = -R(1-\cos\theta)$$

$$v_C \uparrow = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} M^0 M^I R d\theta = 5{,}95\cdot 10^{-4}\, m$$

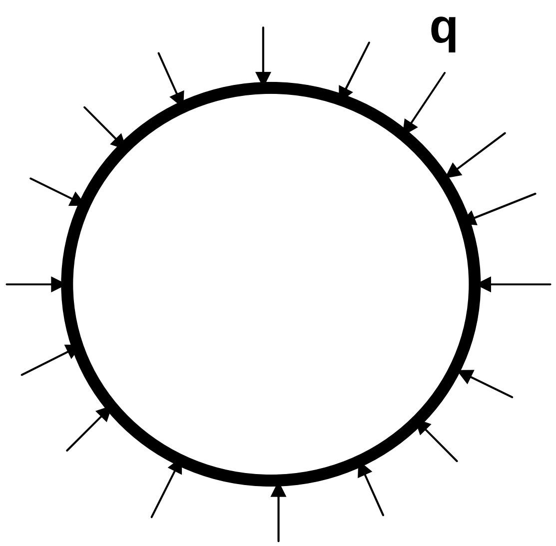
Desplazamiento relativo entre A y B=10,90.10^{-4} m de acercamiento

De manera similar podríamos calcular el desplazamiento relativo entre C y D (el cual se deja para que lo calcule el alumno):

Desplazamiento relativo entre C y D=$10,92.10^{-4}$ m de separación

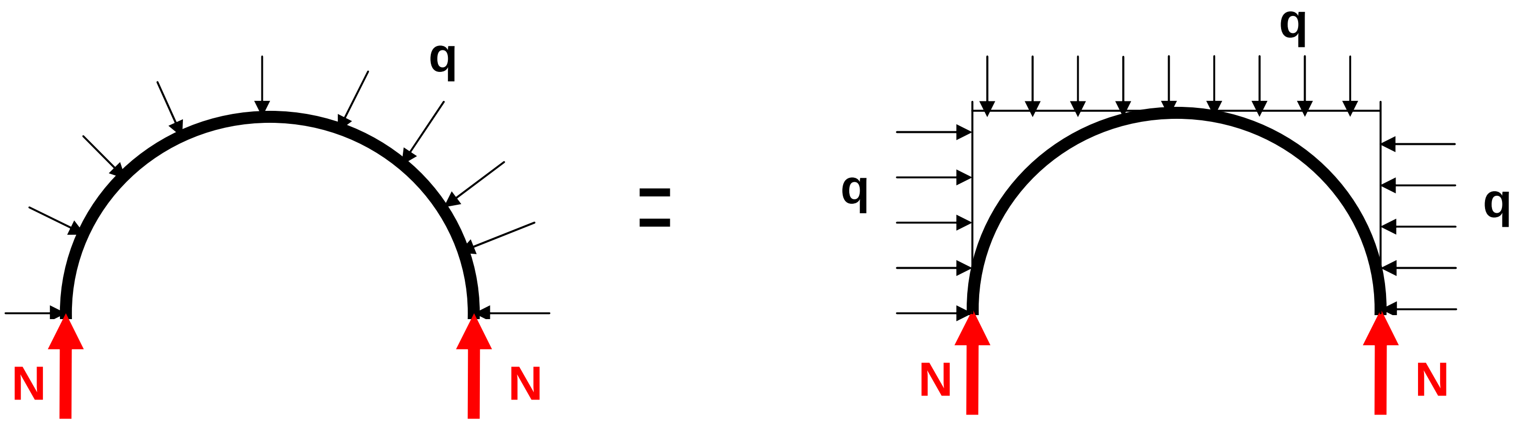
PROBLEMA PROPUESTO

Para el anillo de la figura, en el que R=2 m y EI=10^5 kN.m, determinar las leyes de esfuerzos y los desplazamiento relativos entre cualquier par de puntos diametralmente opuestos para cualquier valor de la sobrecarga uniformemente distribuida **q**.



Solución: Ningún diámetro del anillo cambia de longitud. Las leyes de esfuerzos cortantes y de momentos flectores son nula y sólo existe esfuerzo axil constante a lo largo de toda la directriz de la pieza y su valor es **qR**

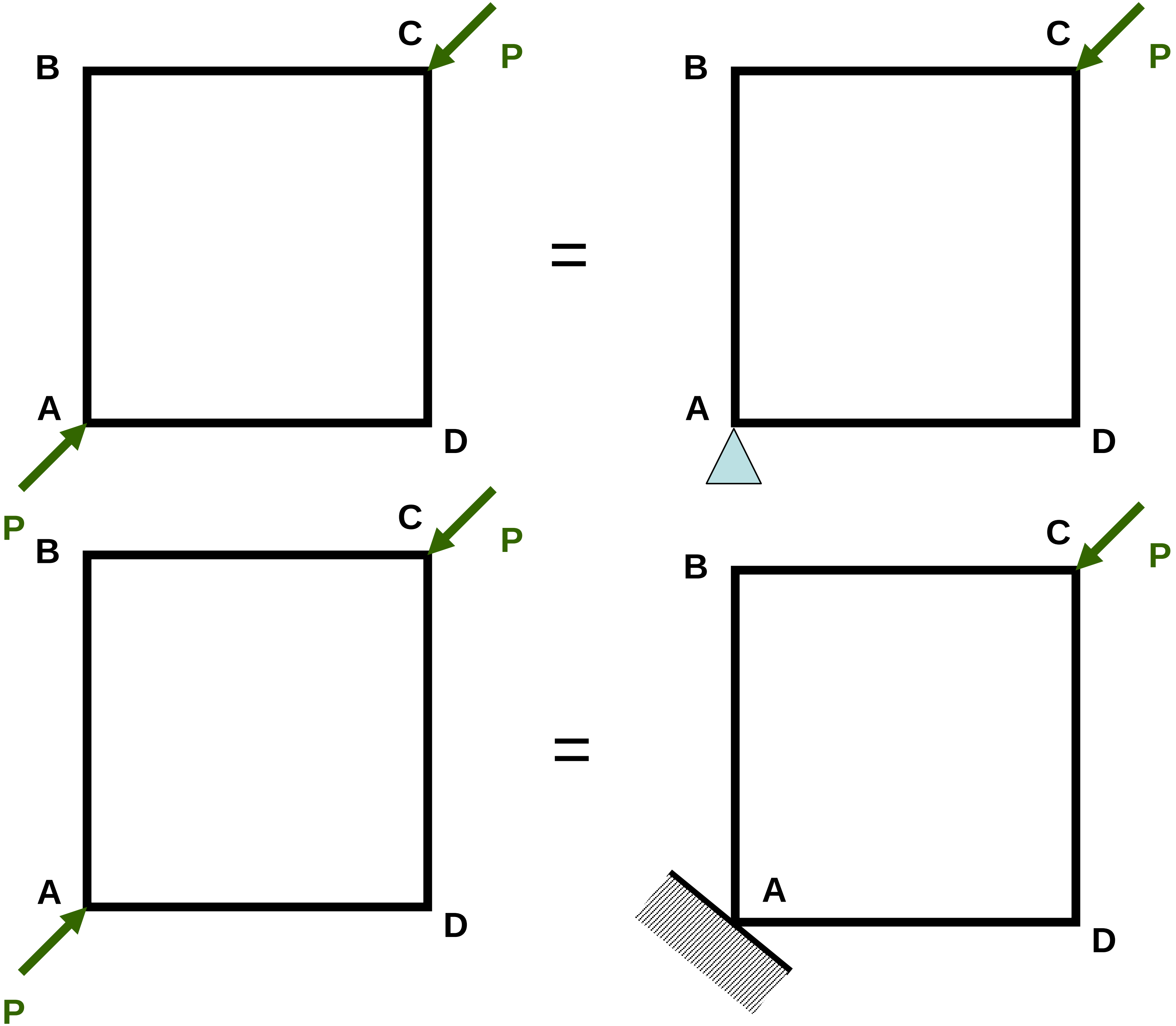
Como todos los ejes diametrales son de simetría, cualquier sección sólo podría desplazarse según el diámetro (sin girar) y, entonces, el anillo se Acortaría. Como estamos despreciando las deformaciones por efecto del esfuerzo axil, esto no podría suceder y, por tanto, el anillo no cambia de forma.

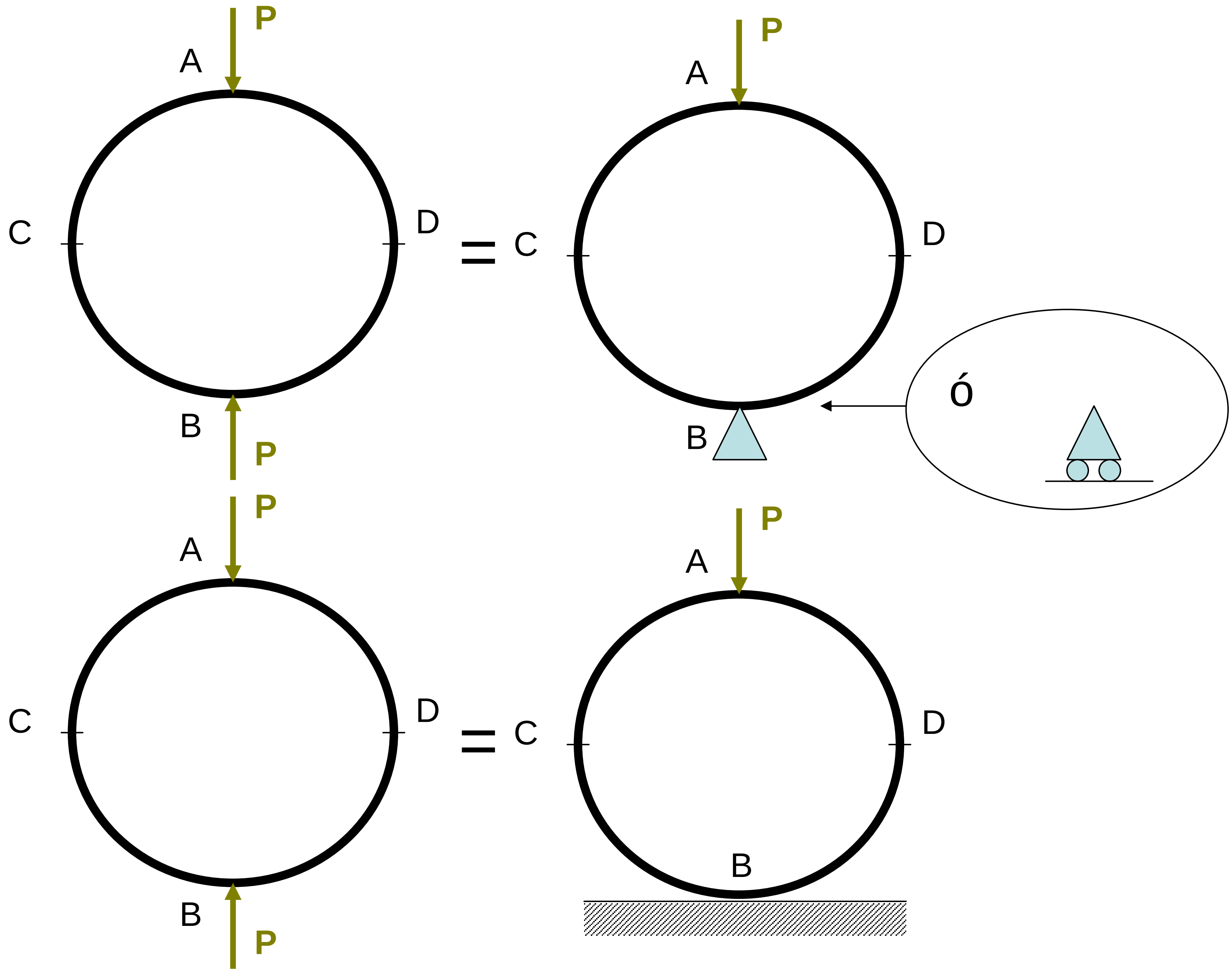


$$2N=q(2R)$$

$$N=qR$$

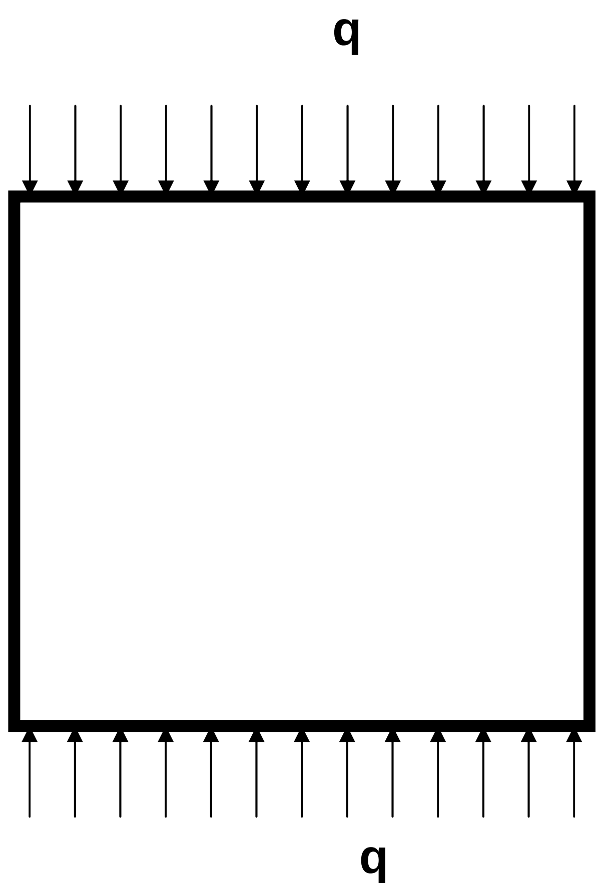
¡Cuando los árboles no nos dejan ver el bosque!


B
C
P
A
D
P
=
B
C
P
A
D
B
C
P
A
D
P
=
B
C
P
A
D

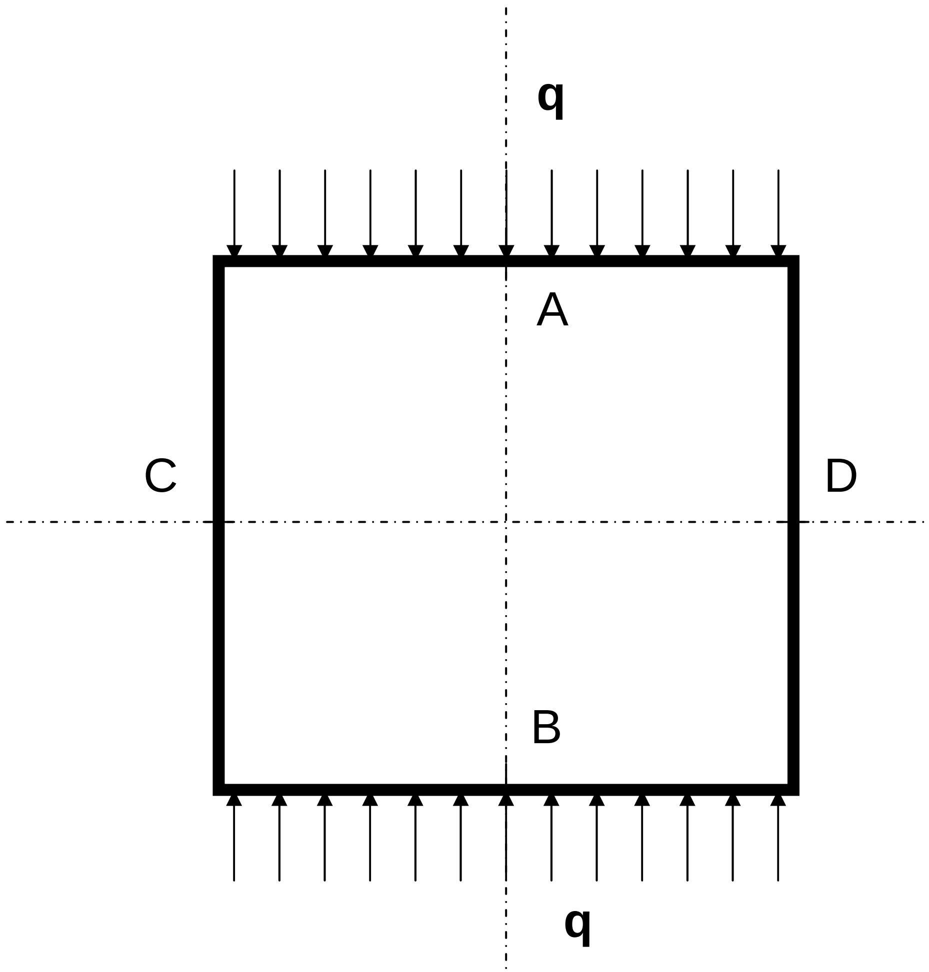

P
A
C
D
B
P
=
P
A
C
D
B
ó
P
A
C
D
B
P
=
P
A
C
D
B

PROBLEMA PROPUESTO

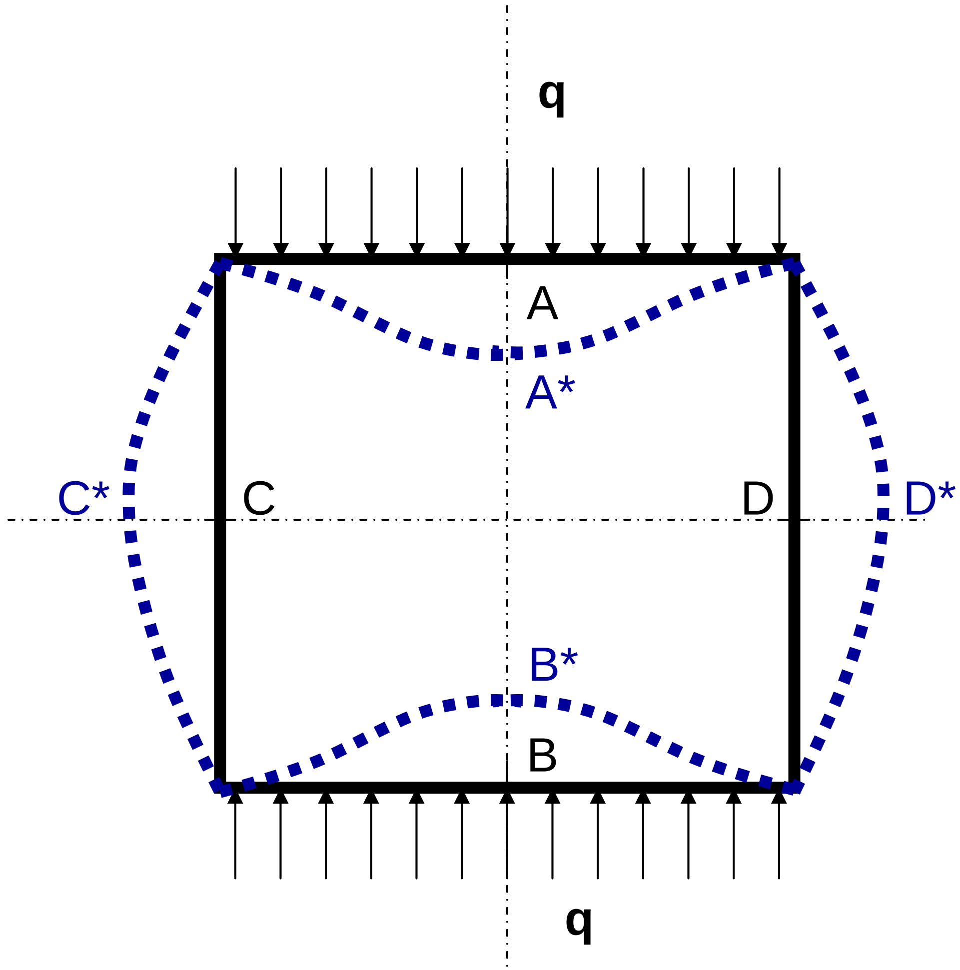
Para el marco cuadrado de la figura, en el que su lado es L y la rigidez es EI, determinar las leyes de esfuerzos cuando actúa la sobrecarga uniformemente distribuida **q**.

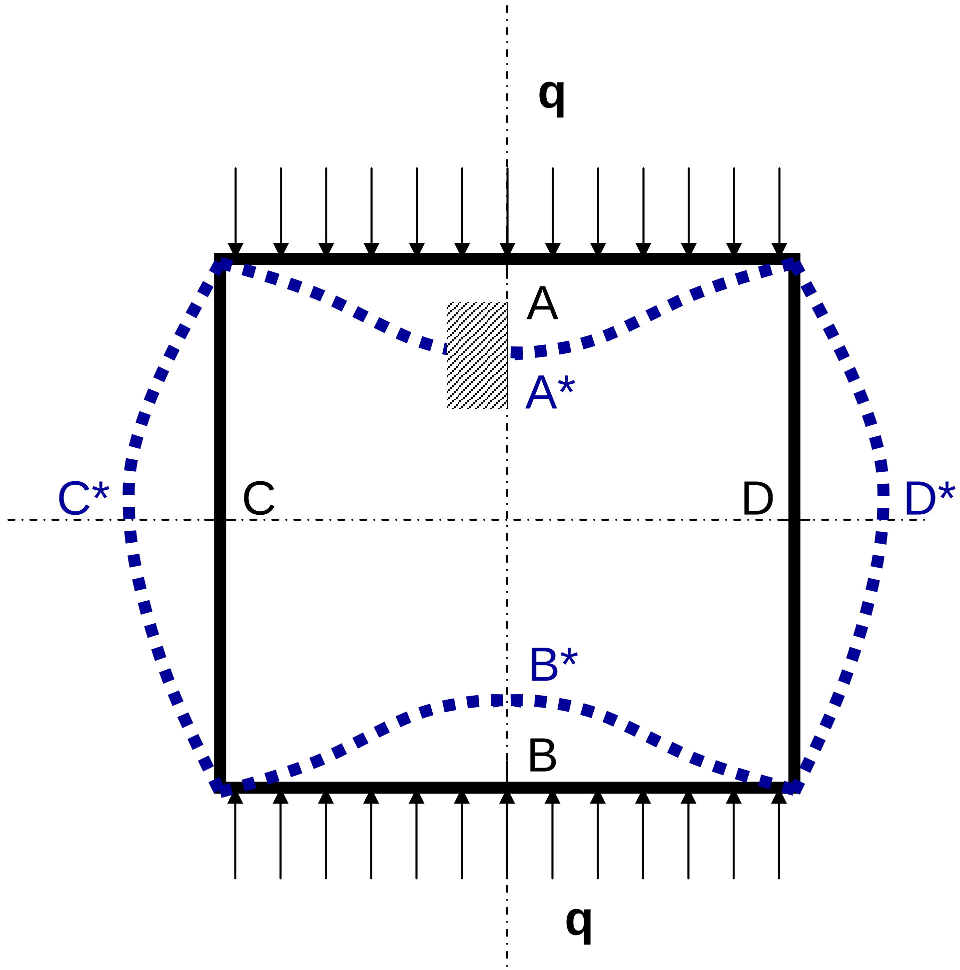


La estructura presenta dos ejes de simetría

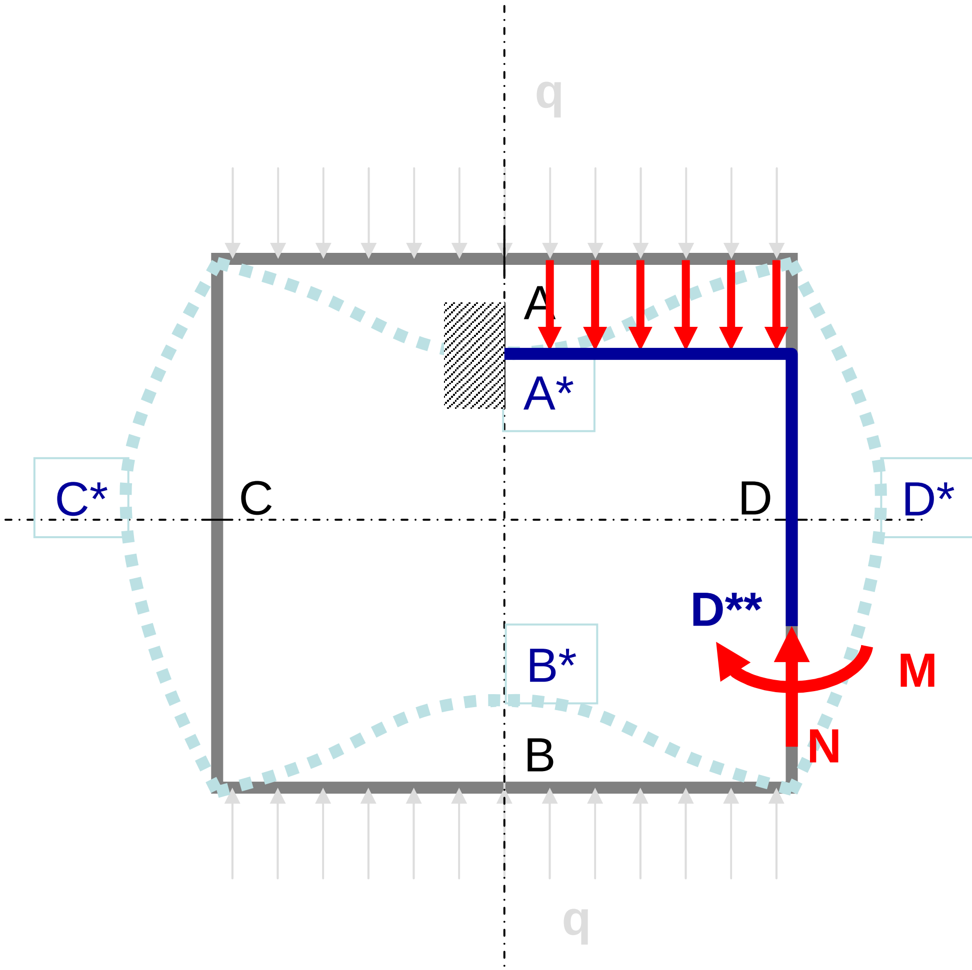


¿Cómo se deforma la estructura?



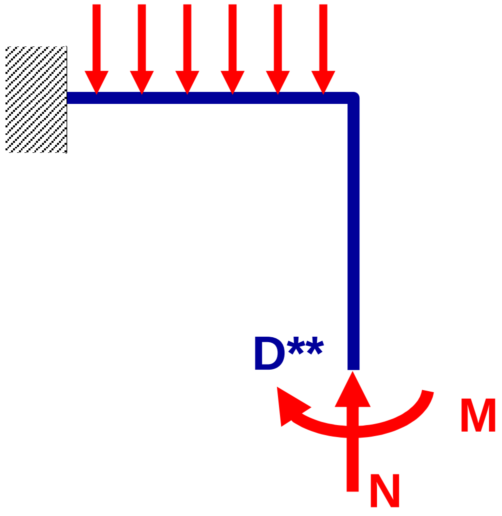


Empotramos en A*, cortamos por D* y retiramos todas las cargas y los esfuerzos que aparezcan en esta última sección

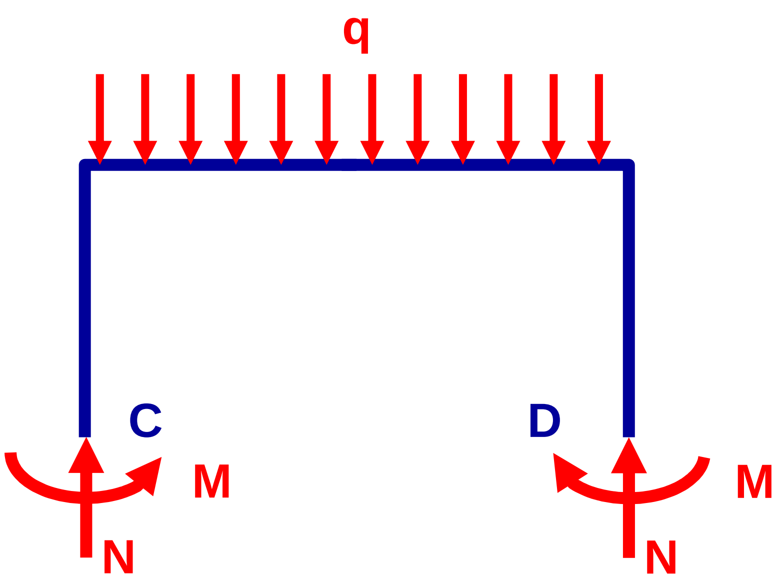


Al volver a considerar los esfuerzos en D y las cargas exteriores, D** pasa a D* sin que la sección D** gire

Luego nuestro problema a quedado reducido a, en la estructura de la figura, obtener M con la condición de que D** no gire

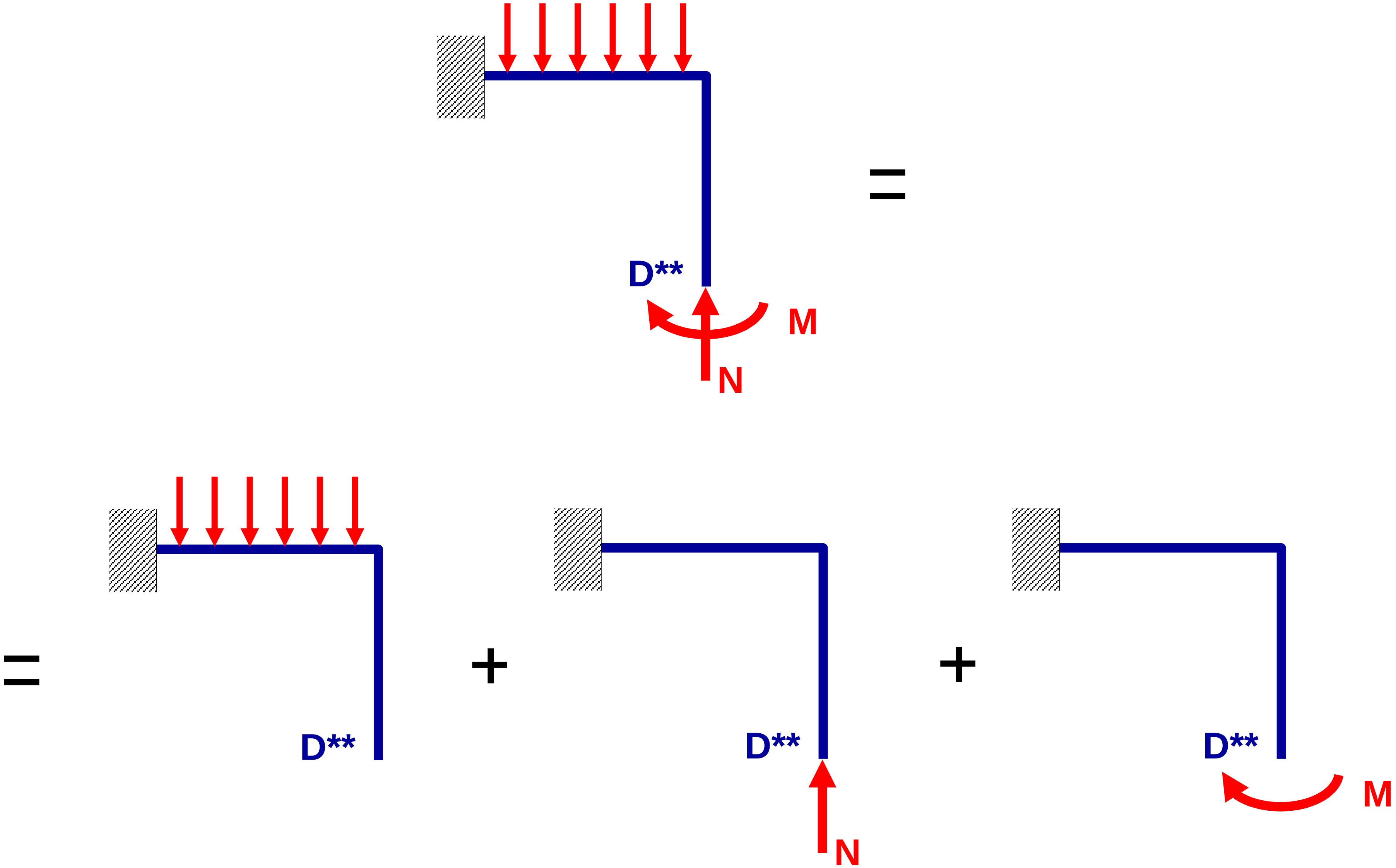


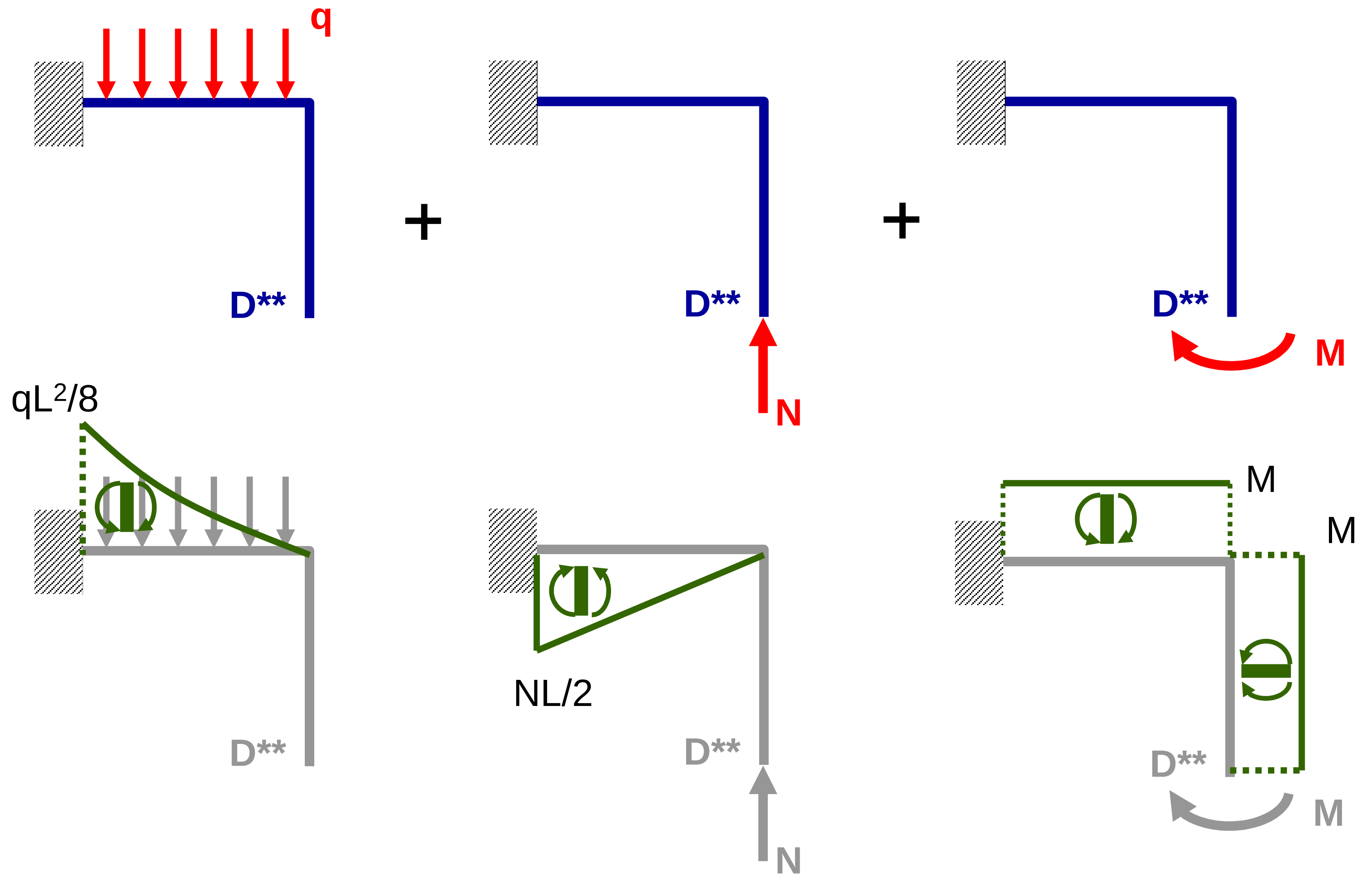
N la conocemos por equilibrio de medio marco:



qL=2N

N=qL/2

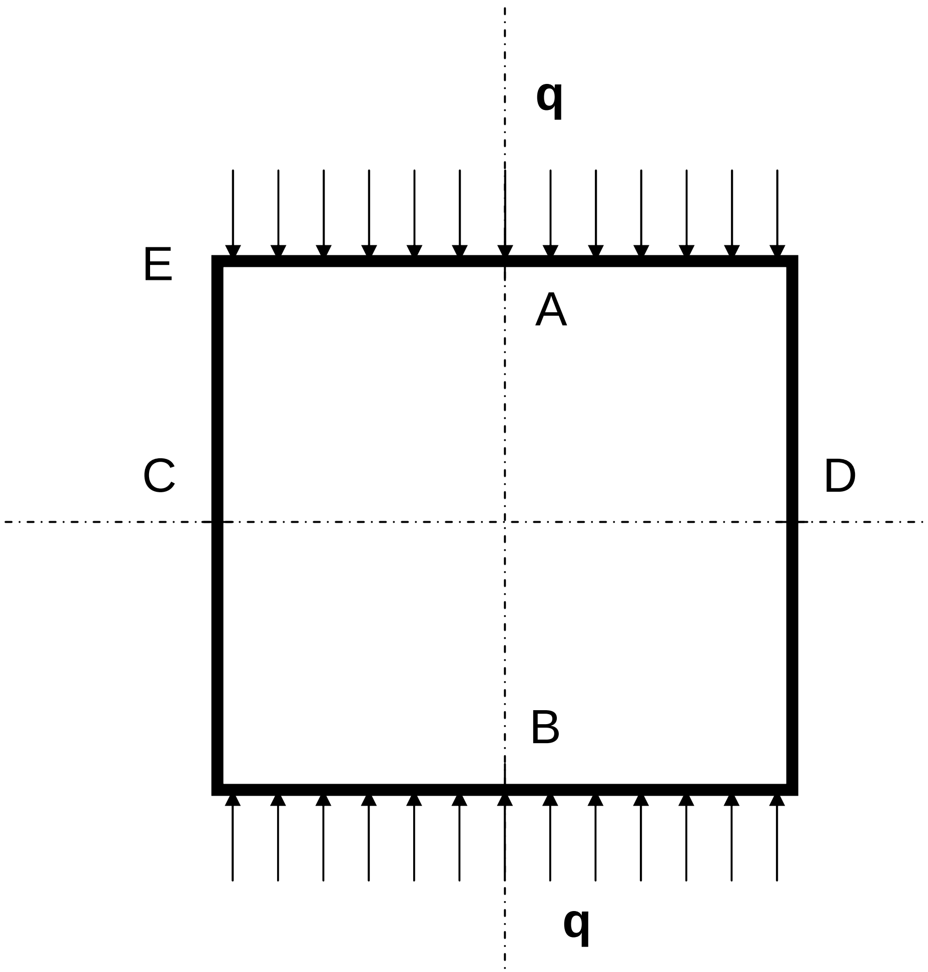

D**
M
N
=
=
D**
+
D**
N
+
D**
M

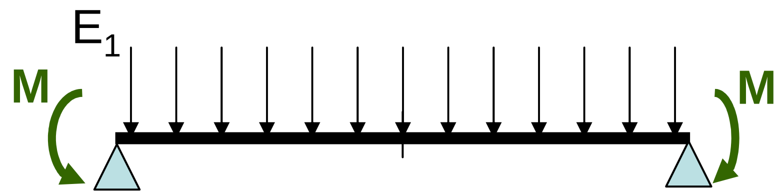


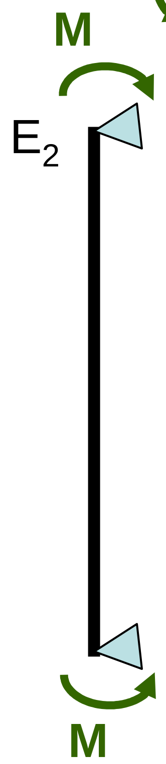
$$\theta_{D^{**}}(\mathbf{horario}) = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\frac{L}{2}\frac{qL^2}{8} - \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{NL}{2} + \frac{L}{2}M + \frac{L}{2}M\right] = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qL^3}{24} + ML\right] = 0$$

$$M = \frac{qL^2}{24}$$

¿Y si calculásemos la estructura como intraslacional?







$$\theta_{E_1} = \theta_{E_2}$$

$$\theta_{E_1}\,\textbf{(horario)} = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{ML}{2EI}$$

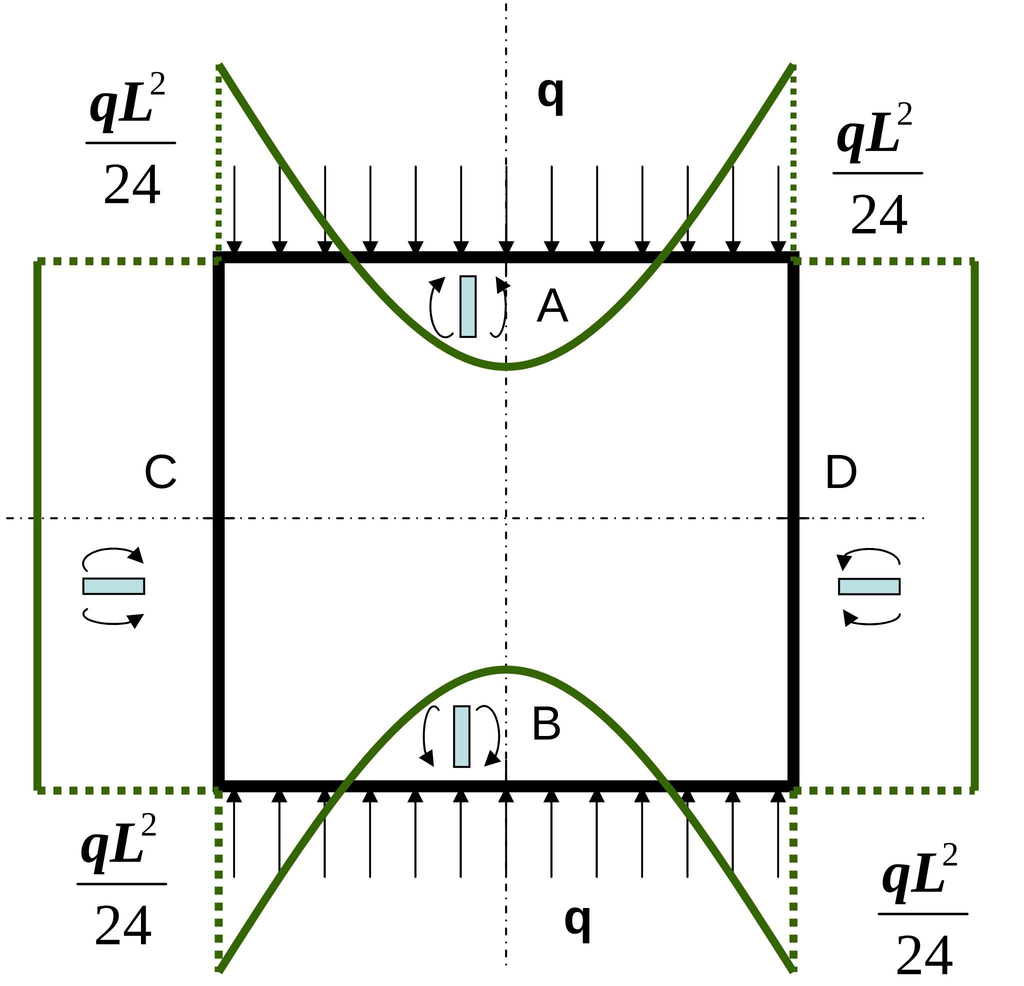
$$\theta_{E_2}\,\textbf{(horario)} = -\frac{ML}{2EI}$$

$$\theta_{E_1} = \theta_{E_2}$$

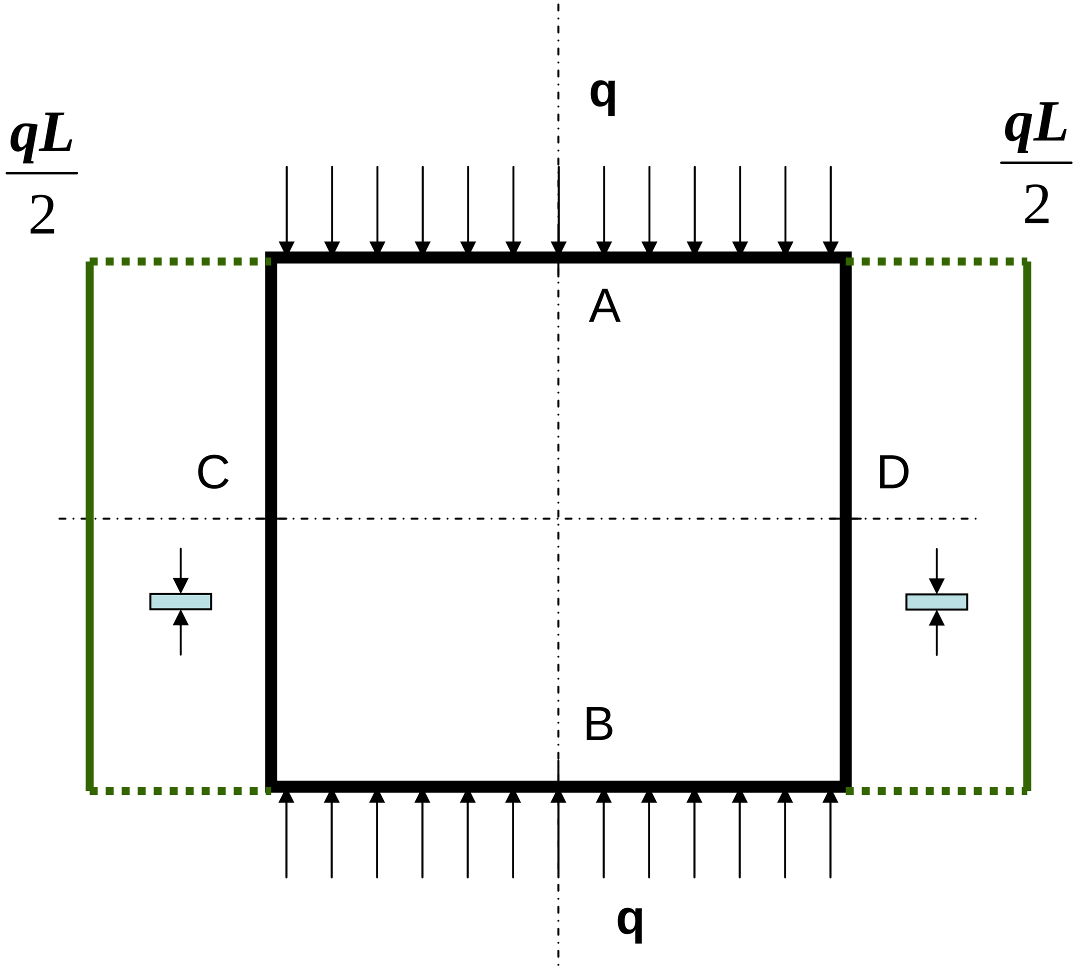
$$M = \frac{qL^2}{24}$$

Moraleja: si la estructura es intranslacional, lo mejor es resolverla dividiéndola en vigas e igualando giros, aunque se trate de un marco, como sucede en este problema

Ley de momentos flectores:



Ley de esfuerzos axiles:



Ley de esfuerzos cortantes: