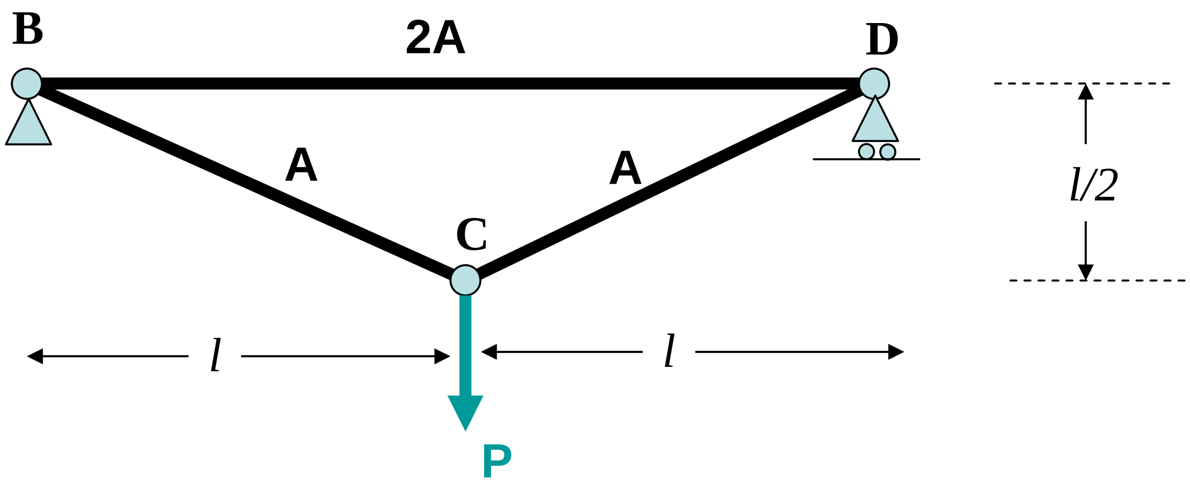
En el sistema articulado de la figura formado por tres barras de idéntico material y siendo las áreas de sus respectivas secciones transversales: A, para las barras BC y CD, y 2A para la barra BD, determinar, cuando, sobre él actúa la carga P:

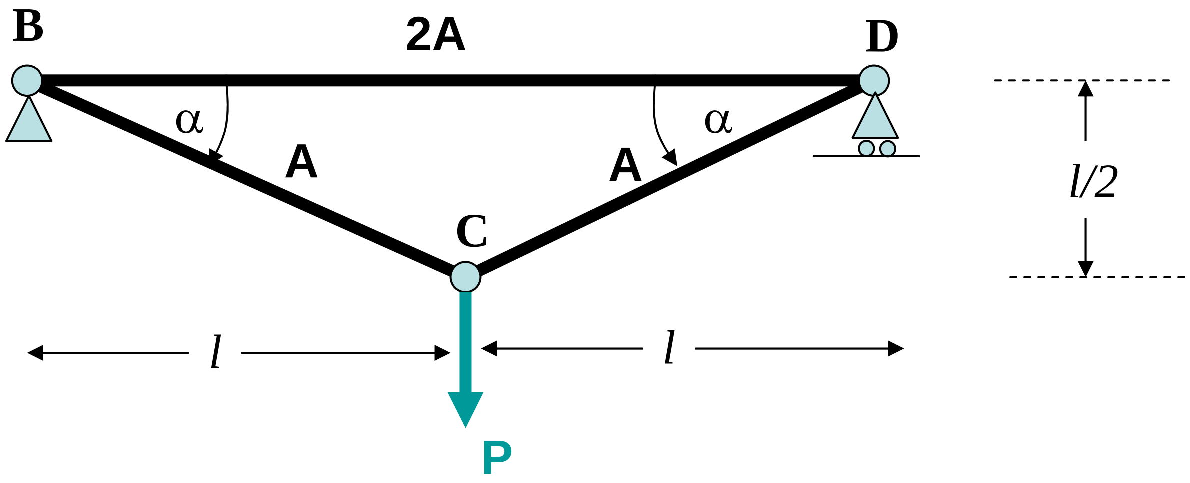
a.- Las fuerzas axiles a las que se encuentran sometidas cada una de las barras

b.- La energía elástica que almacena el sistema

c.- El desplazamiento vertical del nudo C y el horizontal del nudo D.



ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LA ESTRUCTURA ARTICULADA

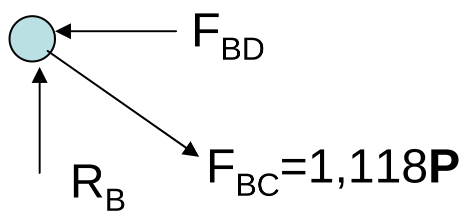


$$\alpha = \boldsymbol{arctan}\frac{\boldsymbol{l}/2}{\boldsymbol{l}} = 26{,}565$$

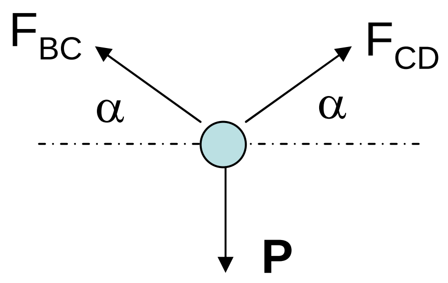
$$\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{CD} = \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{cos}\,\alpha} = 1{,}118\boldsymbol{l}$$

RESOLUCIÓN DE LA EXTRUCTURA POR EQUILIBRIO DE NUDOS:

NUDO B



NUDO C



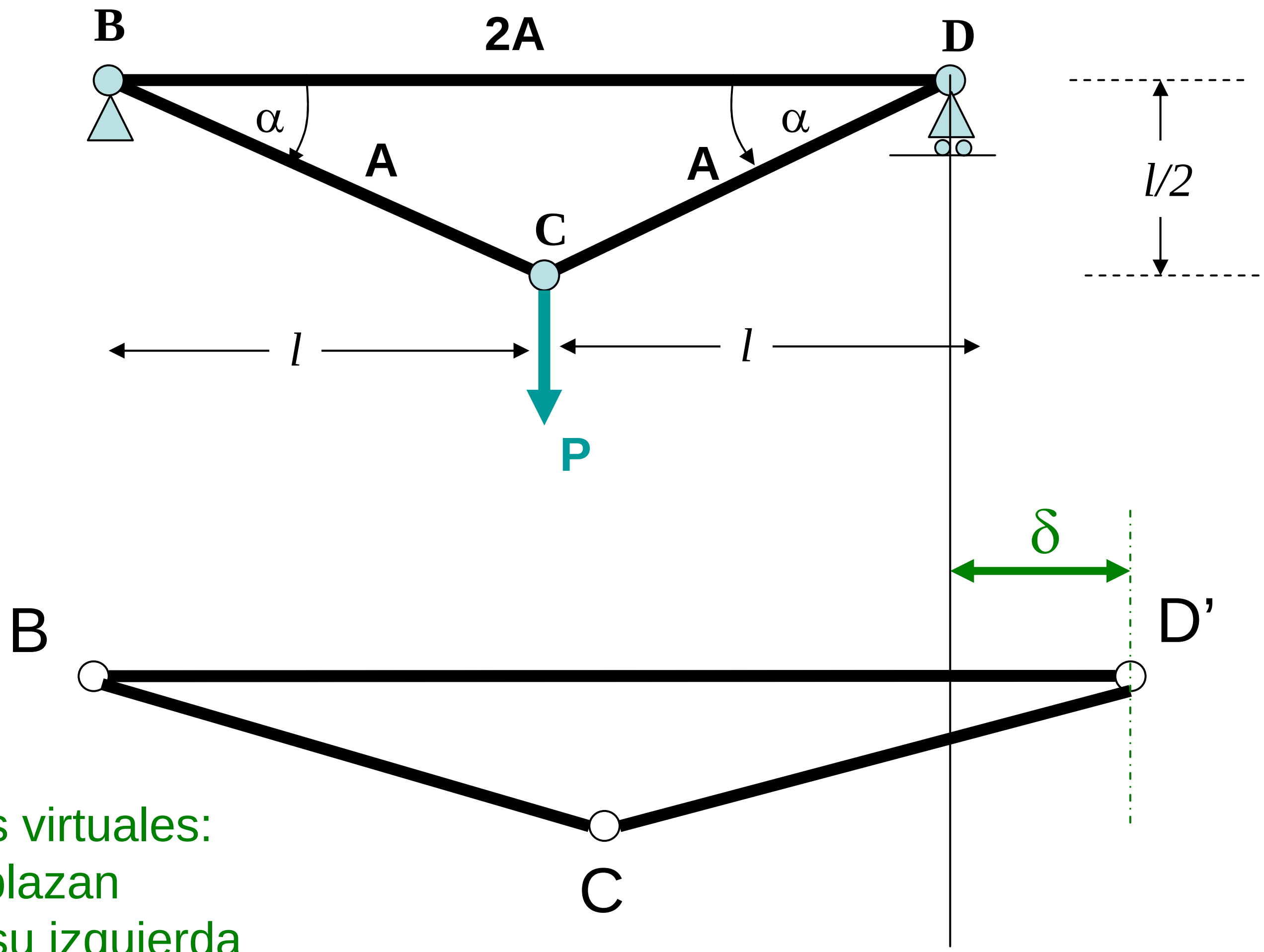
$$\boldsymbol{F_{BC}=F_{CD}} \text{ por simetría}$$

$$2\boldsymbol{F_{CD}sen}\alpha = \boldsymbol{P}$$

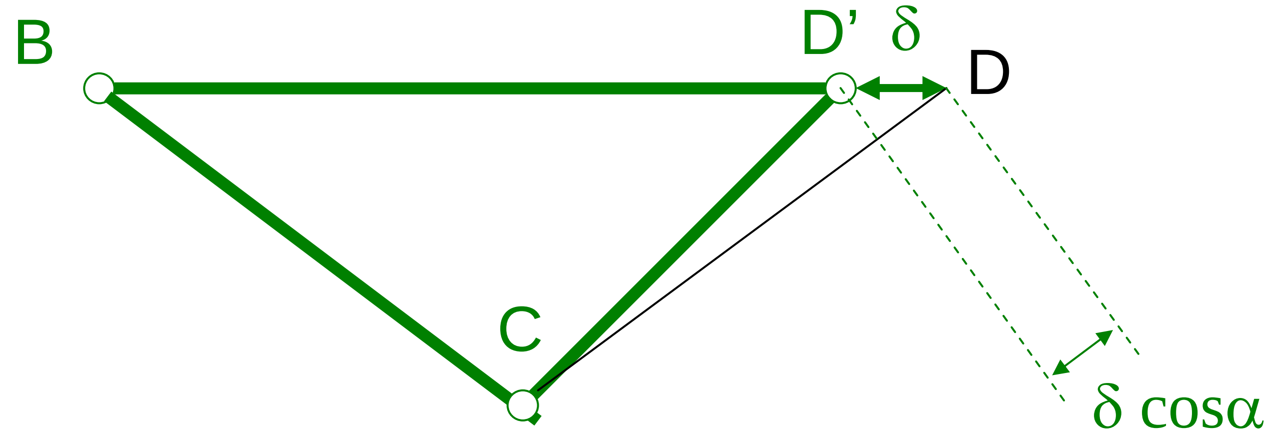
$$\boldsymbol{F_{CD}} = 1{,}118\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F_{BC}}$$

$$\boldsymbol{F_{BD}} = 1{,}118\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{cos}\,\alpha = \boldsymbol{P}$$

RESOLUCIÓN DE LA EXTRUCTURA POR EL P.T.V.:



Desplazamientos virtuales:
B y C no se desplazan
D lo hace hacia su izquierda
una magnitud δ



$$\varepsilon_{CD}^{\delta} = \frac{\delta \cos\alpha}{l'} \qquad \varepsilon_{BD}^{\delta} = \frac{\delta}{2l}$$

Trabajo fuerzas actuantes: $\delta W_{ext}=0$

Trabajo fuerzas internas:

$$\delta W_{\mathbf{int}} = \sigma_{CD}\varepsilon_{CD}^{\delta}\cdot Al' + \sigma_{BD}\varepsilon_{BD}^{\delta}\cdot(2A\cdot 2l) = \sigma_{CD}\frac{\delta \cos\alpha}{l'}\cdot Al' + \sigma_{BD}\frac{\delta}{2l}(2A\cdot 2l) =$$

$$= \frac{F_{CD}}{A}\frac{\delta \cos\alpha}{l'}\cdot Al' + \frac{F_{BD}}{2A}\frac{\delta}{2l}(2A\cdot 2l) = F_{CD}\cdot\delta \cos\alpha + F_{BD}\cdot\delta$$

$$\delta W_{ext} = \delta W_{\mathbf{int}} \quad \Rightarrow \quad 0 = F_{CD}\cdot\delta \cos\alpha + F_{BD}\cdot\delta \quad \forall\delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_{CD}\cdot\cos\alpha + F_{BD} = 0$$

$$\boldsymbol{U} = \sum \frac{\boldsymbol{F}_i^{\,2} \boldsymbol{L}_i}{2\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{U}_{BD} + \boldsymbol{U}_{BC} + \boldsymbol{U}_{CD} = \frac{\boldsymbol{P}^2 \cdot 2\boldsymbol{l}}{2(2\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}} + 2\frac{(1{,}118\boldsymbol{P})^2(1{,}118\boldsymbol{l})}{2\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}} = \frac{1{,}898\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}}$$

$$\boxed{U = W}$$

NUDO C:

$$\frac{1}{2}Pd = \frac{1{,}898P^2 l}{AE} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3{,}796Pl}{AE}$$

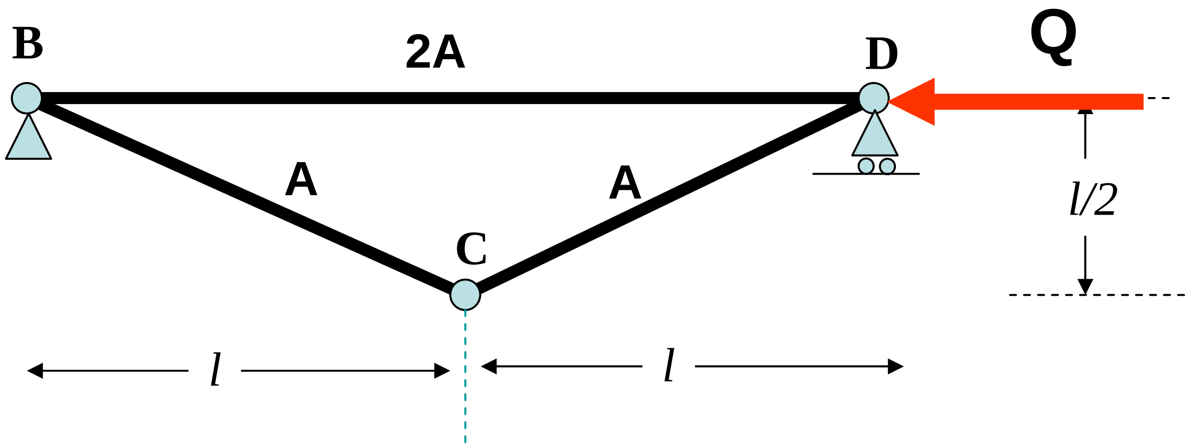
NUDO D:

$$\overleftarrow{u} = \varepsilon_{BD} \cdot (2l) = \frac{P/2A}{E} = \frac{P \cdot (2l)}{2EA} = \frac{P \cdot l}{EA}$$

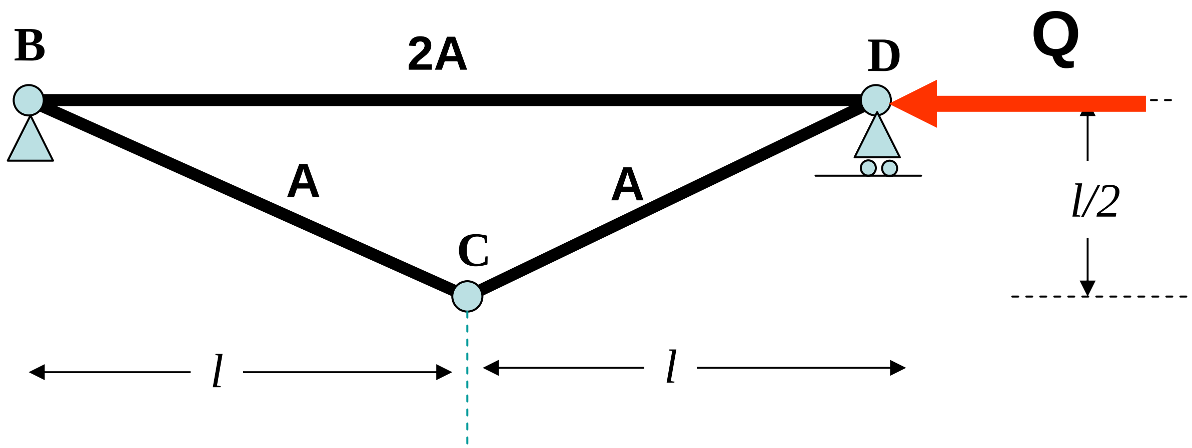
PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO:

$$d = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1{,}898 \cdot 2Pl}{AE} = \frac{3{,}796Pl}{AE}$$

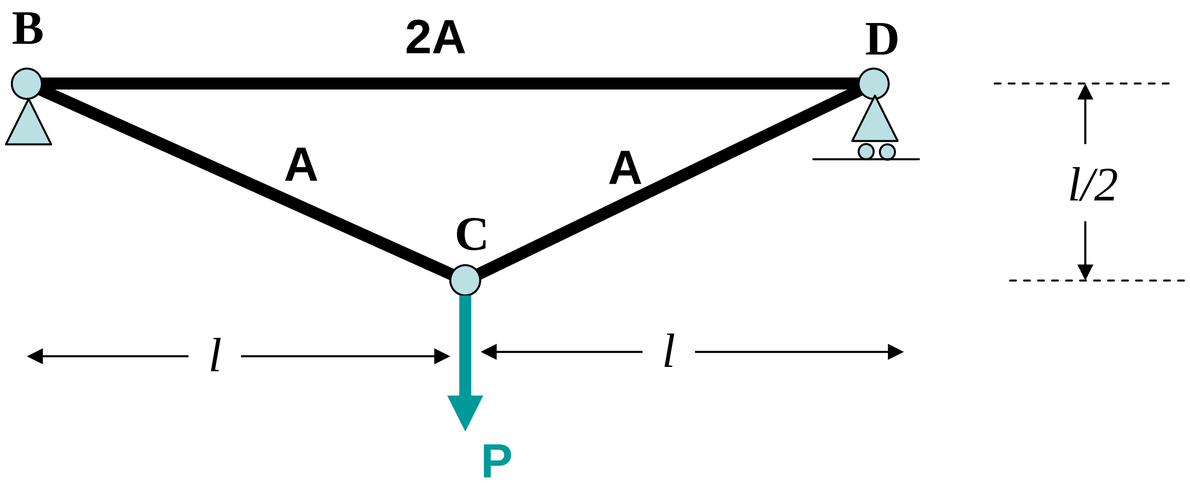
Determinar, aplicando el teorema de reciprocidad y para la estructura articulada del problema anterior el desplazamiento vertical del punto C cuando actúa la carga Q que se observa en la figura:



SISTEMA I



SISTEMA II



$$P \cdot d_C^I(\downarrow) = Q \cdot u_D^{II}(\leftarrow)$$

$$\overleftarrow{u}_D^{II} = \frac{P \cdot l}{EA}$$

$$d_C^I(\downarrow) = \frac{Q}{P} \cdot u_D^{II}(\leftarrow) = \frac{Q \cdot l}{EA}$$