La estructura articulada de la figura está sometida a una carga puntual **P**=20 kN en un punto que dista del nudo C un tercio de la longitud de la barra **CB**, y un momento **M**=30 kN.m en el punto medio de la barra articulada **BD**. Las barras **AD** y **CB** se cruzan sin cortarse y la rigidez a axil de todas las barras toma el mismo valor, siendo L/E=10^{-5} m/kN. El coeficiente de dilatación de las barras de la estructura es y el producto E·I=50·10^3 kN·m2 Se pide:

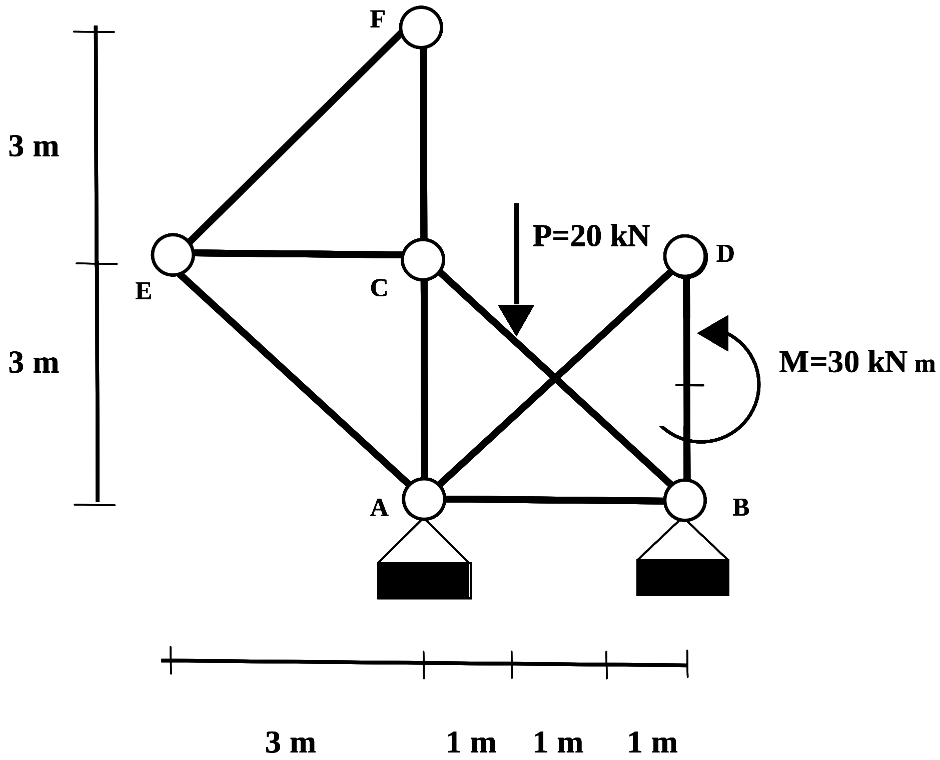
a) Grado de hiperestatismo interno y externo de la estructura.

b) Determinar las reacciones en los apoyos.

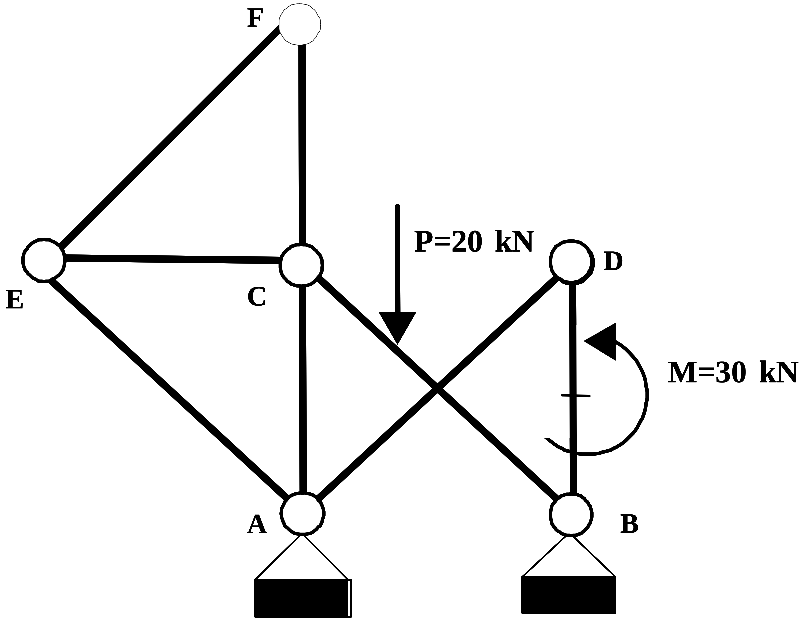
c) Si adicionalmente al estado de cargas anterior, actúa una carga térmica correspondiente a un incremento de temperatura constante de 30ºC en las barras **EF**, **FC, CE** y **AD** obtener las leyes de esfuerzos en todas las barras de la estructura.

d) Calcular el movimiento horizontal del punto **D** producido al actuar simultáneamente la carga **P**, el momento **M** y la carga térmica.

e) Calcular el movimiento horizontal del punto medio de la barra **BD** producido al actuar simultáneamente la carga **P**, el momento **M** y la carga térmica.



a)Grado de hiperestatismo: La barra AB no trabaja en las condiciones del problema ya que une dos apoyos simples.



GHE=CE-GDLE=4-3=1

GHI=3·2(2-1)+2·2(3-1)+1·2·(4-1)-3·7=-1

GH=GHI+GHE=0, La estructura es isostática

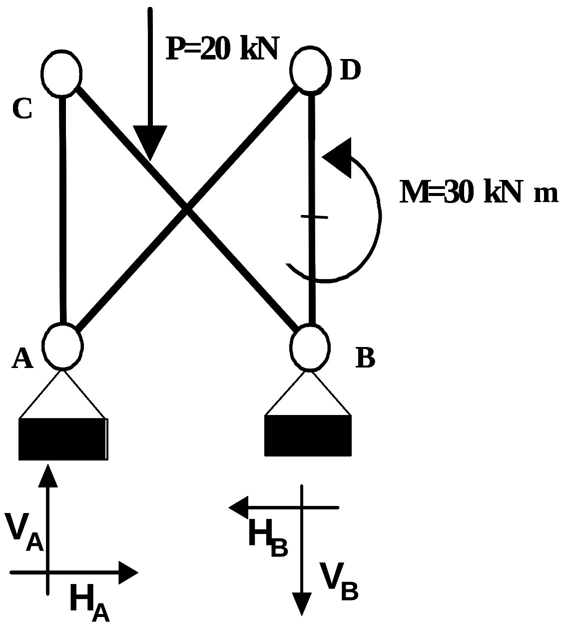
Además podemos comprobar

Número de barras: 8

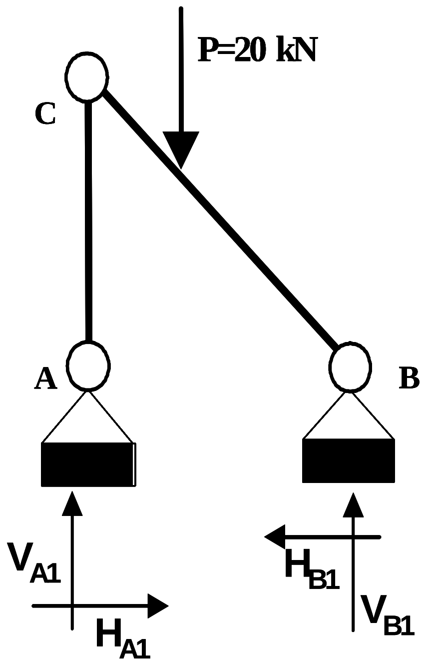
Número de nudos: 6 $\Rightarrow$ G.H. = b + c – 2 * n =0

Número de Coacciones: 4

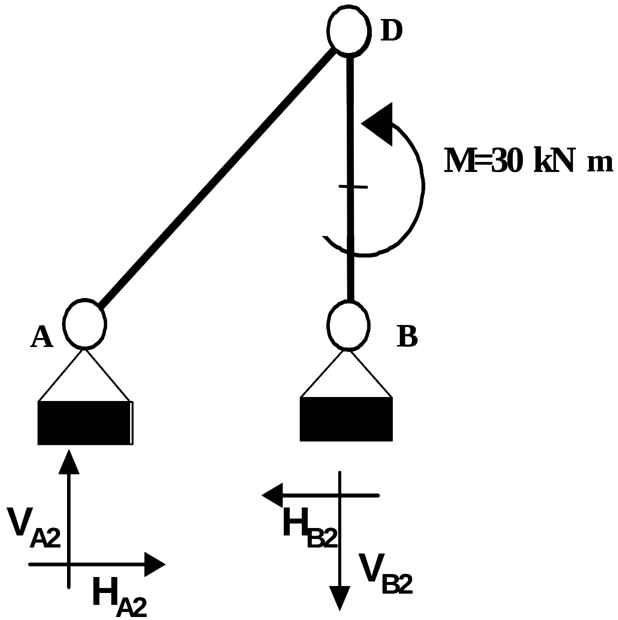
b) Reacciones en apoyos: Las barras EF, EC, FC y EA no trabajan siendo nulos los esfuerzos en ellas, luego la estructura inicial se reduce a la **estructura 0**, que se puede descomponer en la suma de las estructuras isostáticas: **estructura 1** y **estructura 2.**



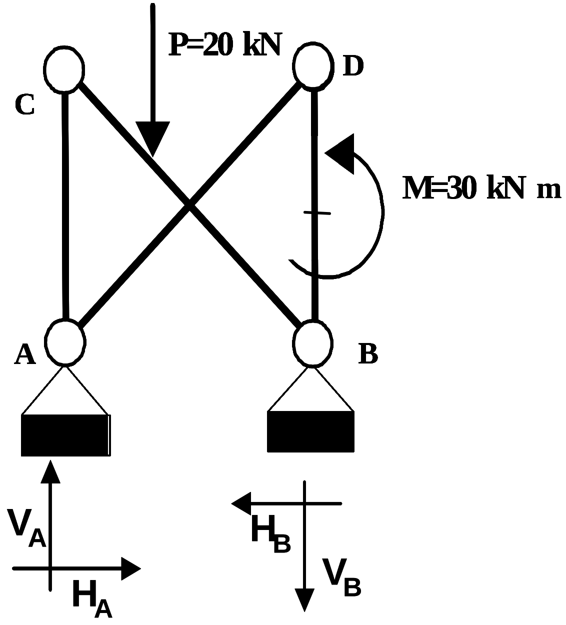
Estructura 0



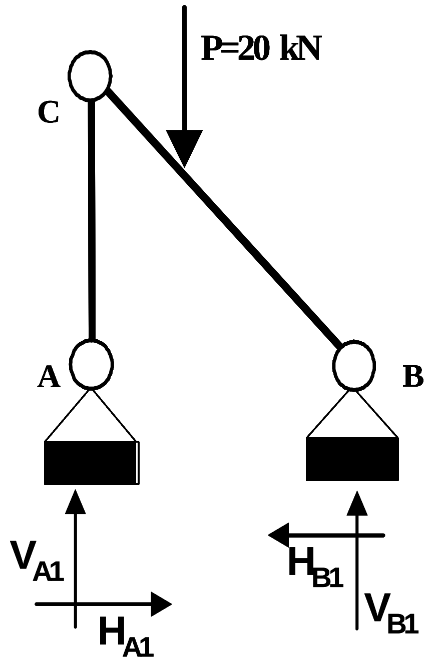
Estructura 1



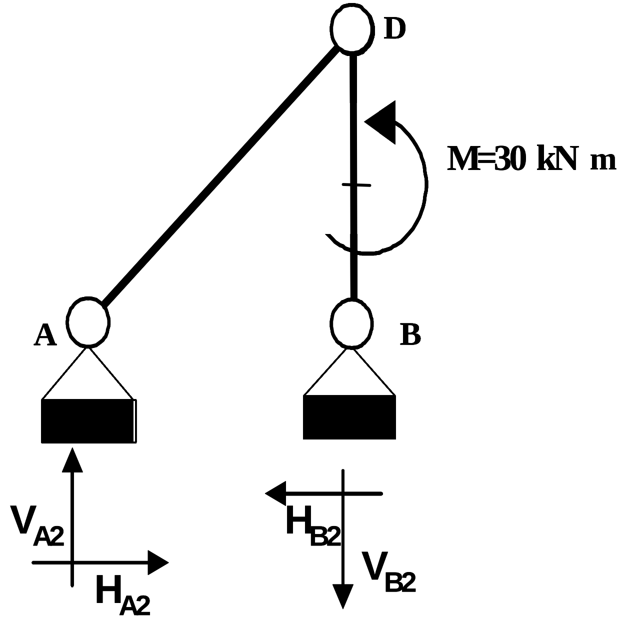
Estructura 2



Estructura 0



Estructura 1



Estructura 2

Estructura 1

$\Sigma F_h=0 \Rightarrow H_{A1} = H_{B1}$;
$\Sigma F_v=0 \Rightarrow V_{A1} + V_{B1} = P$;
$\Sigma M_A=0 \Rightarrow V_{B1} = P/3$;
Equilibrio nudo A $\Rightarrow H_{A1} = 0$
De donde se obtiene:
$V_{A1} = 2P/3$;
$V_{B1} = P/3$;
$H_{A1} = 0$;
$H_{B1} = 0$;

Estructura 2

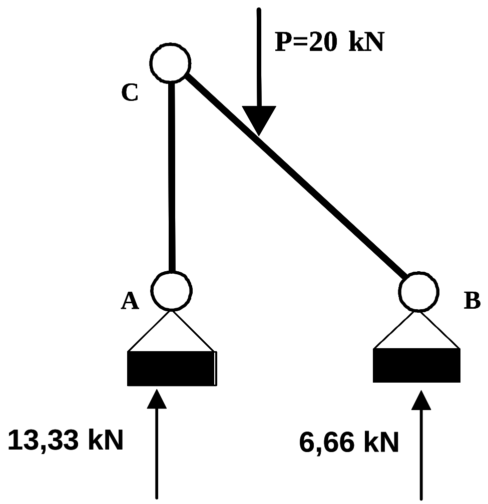
$\Sigma F_h=0 \Rightarrow H_{A2} = H_{B2}$;
$\Sigma F_v=0 \Rightarrow V_{A2} = V_{B2}$;
$\Sigma M_A=0 \Rightarrow V_{B2} = M/3$;
Equilibrio nudo A $\Rightarrow H_{A2} = V_{A2}$
De donde se obtiene:
$V_{A2} = M/3$;
$V_{B2} = M/3$;
$H_{A2} = M/3$;
$H_{B2} = M/3$;

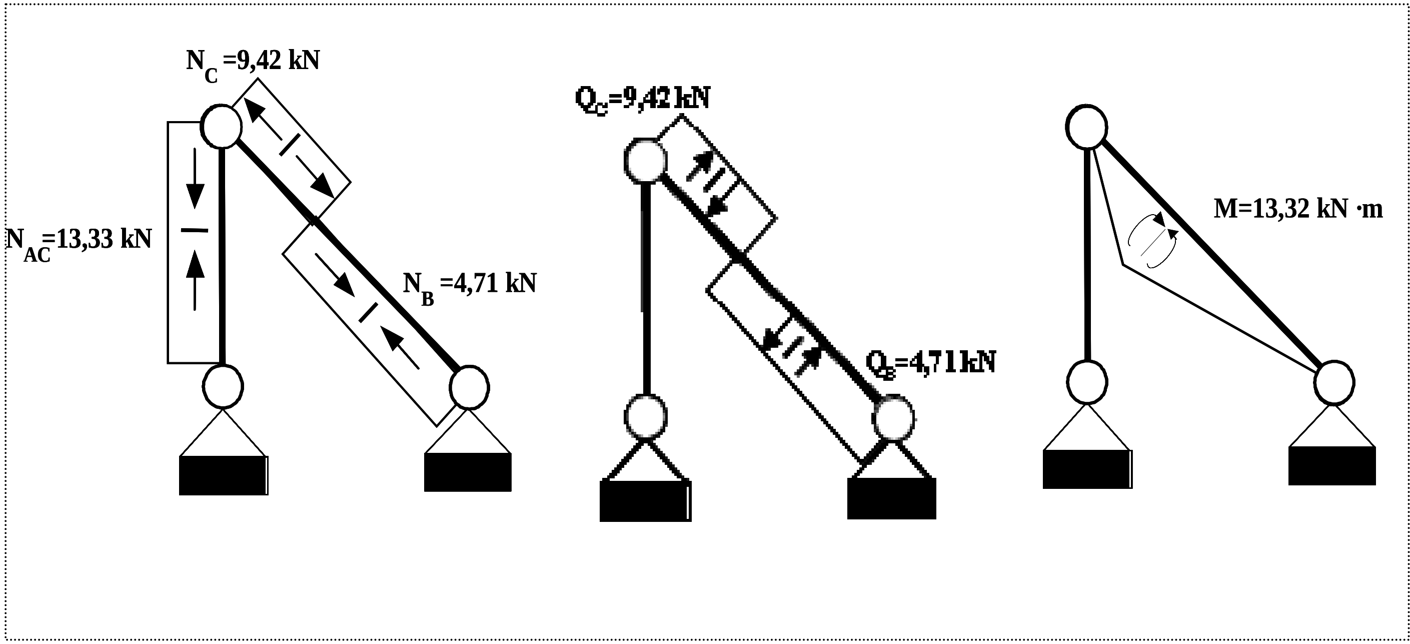
Estructura 0

$H_A = H_{A1} + H_{A2} = M/3 = 10$ kN
$V_A = V_{A1} + V_{A2} = 2P/3 + M/3 = 23,33$ kN
$H_B = H_{B1} + H_{B2} = M/3 = 10$ kN
$V_B = -V_{B1} + V_{B2} = -P/3 + M/3 = 3,33$ kN

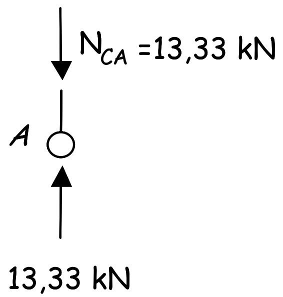
c) Esfuerzos en todas las barras. La estructura es isostática y las cargas térmicas no producen esfuerzos. Debemos solo considerar las cargas de la estructura 0. La estructuras 1 y 2 son independientes entre sí.

Estructura 1

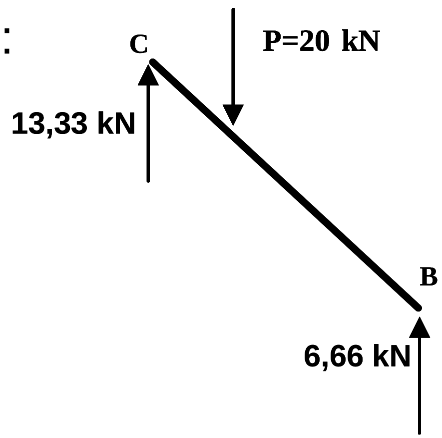




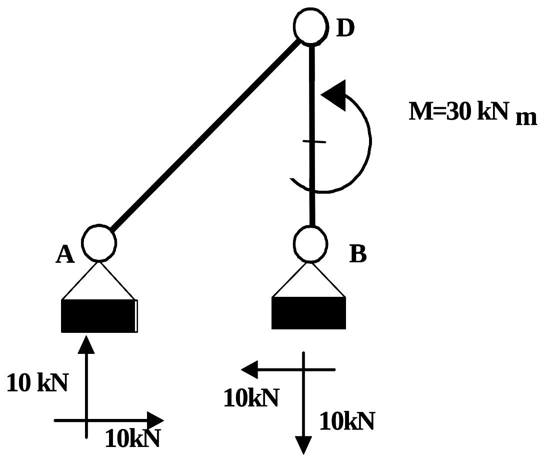
Equilibrio nudo A

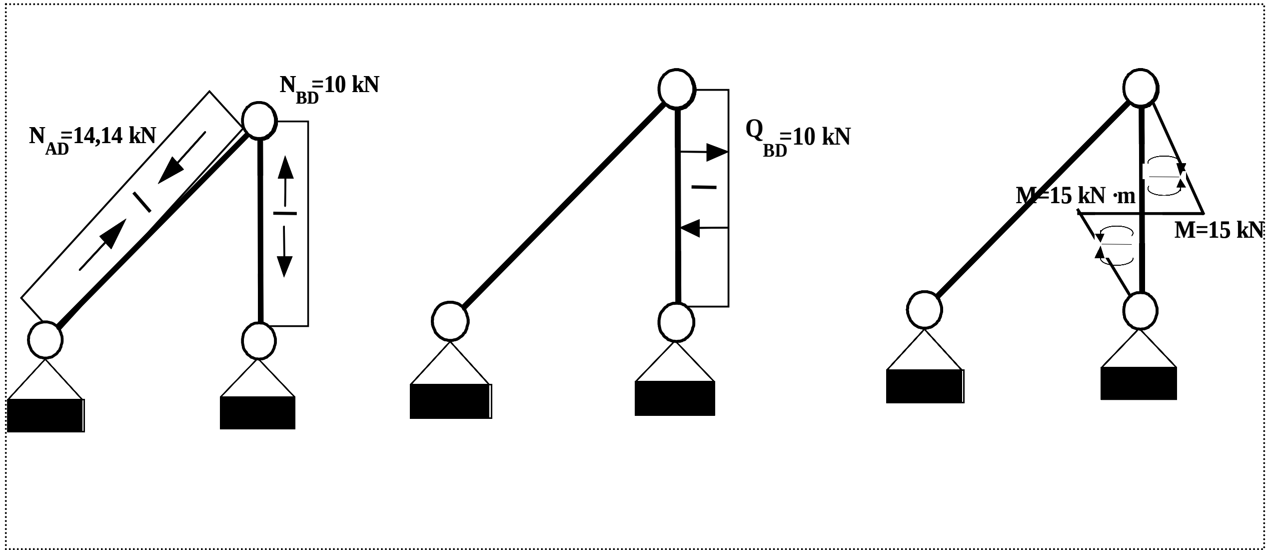


Equilibrio barra BC:



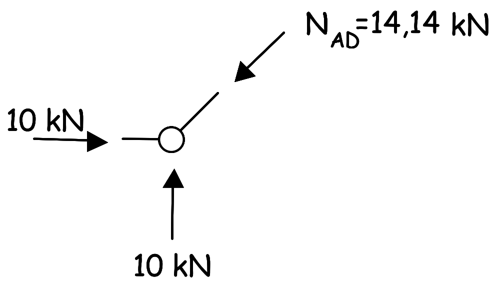
Estructura 2

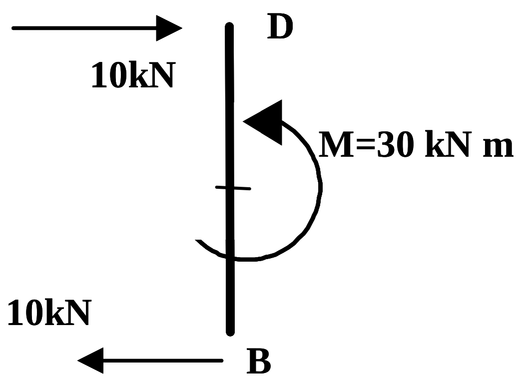




Equilibrio nudo A

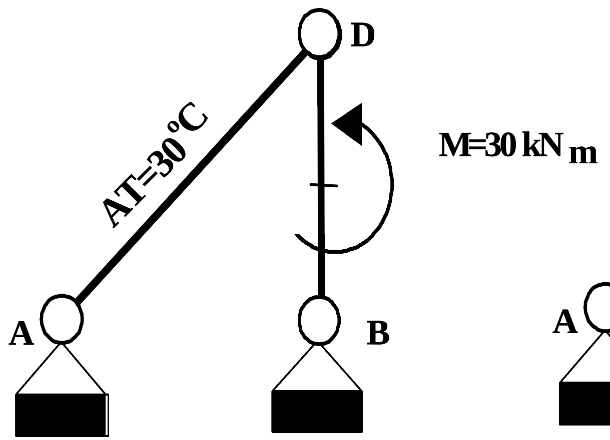
Equilibrio barra BD



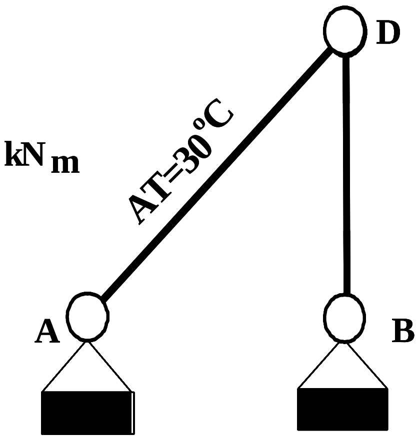


d) Cálculo del movimiento horizontal del punto D.

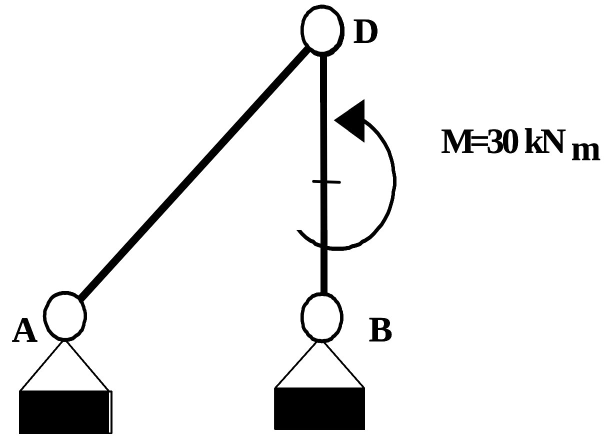
Debemos considerar **la estructura 3** que se puede descomponer en la suma de las estructuras **estructura 4** y **estructura 5.**



Estructura 3

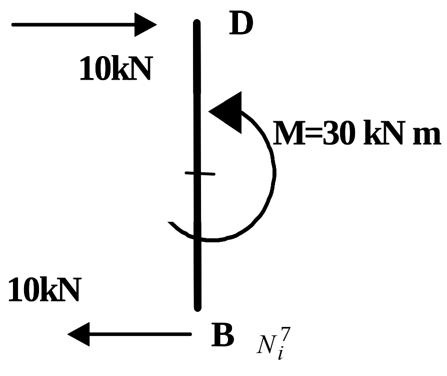


Estructura 4

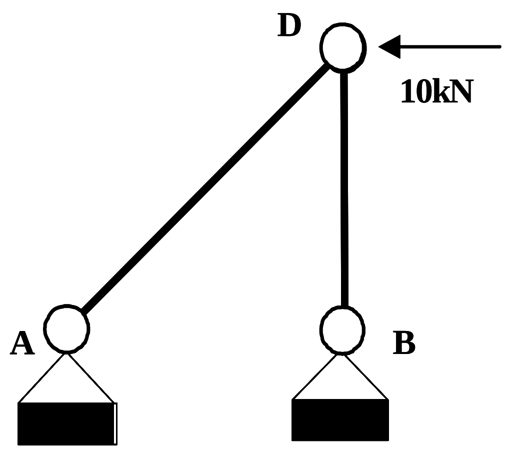


Estructura 5

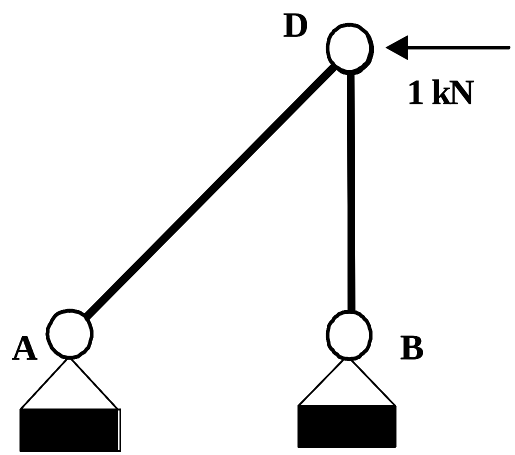
A su vez, llevando las cargas a las nudos de la estructura 5, ésta se descompone en la suma de las **estructuras 6 y 7**



Estructura 6



Estructura 7



Estructura I

Calculando los axiles de los estructuras 7 y I :

Barra	N_i^7	N_i^I
AD	-20/√2	-2/√2
BD	10	1

De donde:

$$\overleftarrow{u}_D = \sum N_i^7 N_i^I \frac{L_i}{EA_i} + \sum N_i^I \delta_i^T = \sum N_i^7 N_i^I \frac{L_i}{EA_i} + N_{AD}^I \delta_{AD}^T = -1{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{m} \qquad \overrightarrow{u}_D = 1{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

e) Cálculo del movimiento horizontal del punto medio de la barra DB

Dado que la estructura 6 es anttimétrica, el movimiento perpendicular a la directriz de esta barra es nulo y puesto que además el punto B es fijo, se tiene que:

$$\vec{u}_{M_{DB}} = 0{,}5 \cdot \vec{u}_D = 0{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$