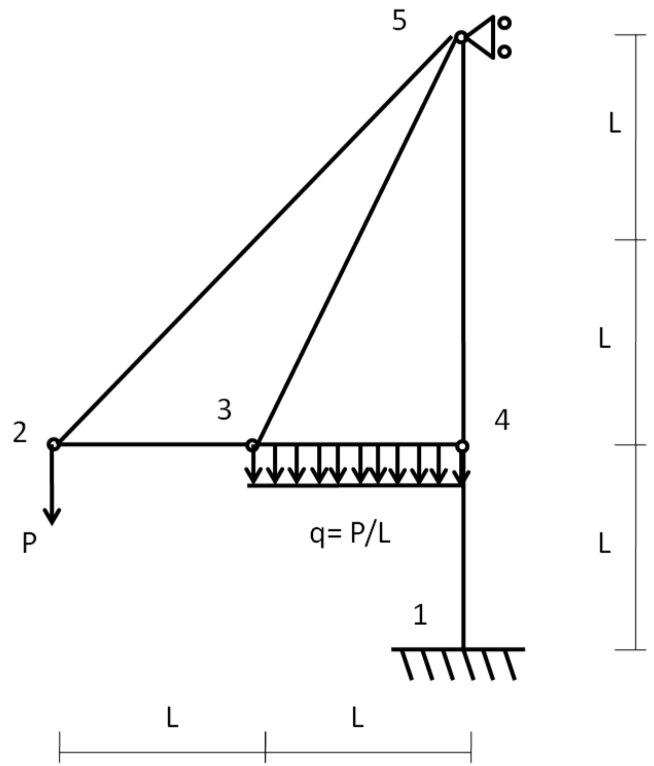
La estructura de la figura se encuentra empotrada en la sección **1** y apoyada en la sección **5**, tal como se indica en la figura. A su vez, los nudos **2, 3, 4** y **5** son articulaciones. La estructura está sometida a las acciones de una carga puntual vertical hacia abajo de valor **P** en el nudo **2**, y de una carga uniformemente distribuida en la barra **3-4**, de valor **q=P/L**. Se pide determinar:

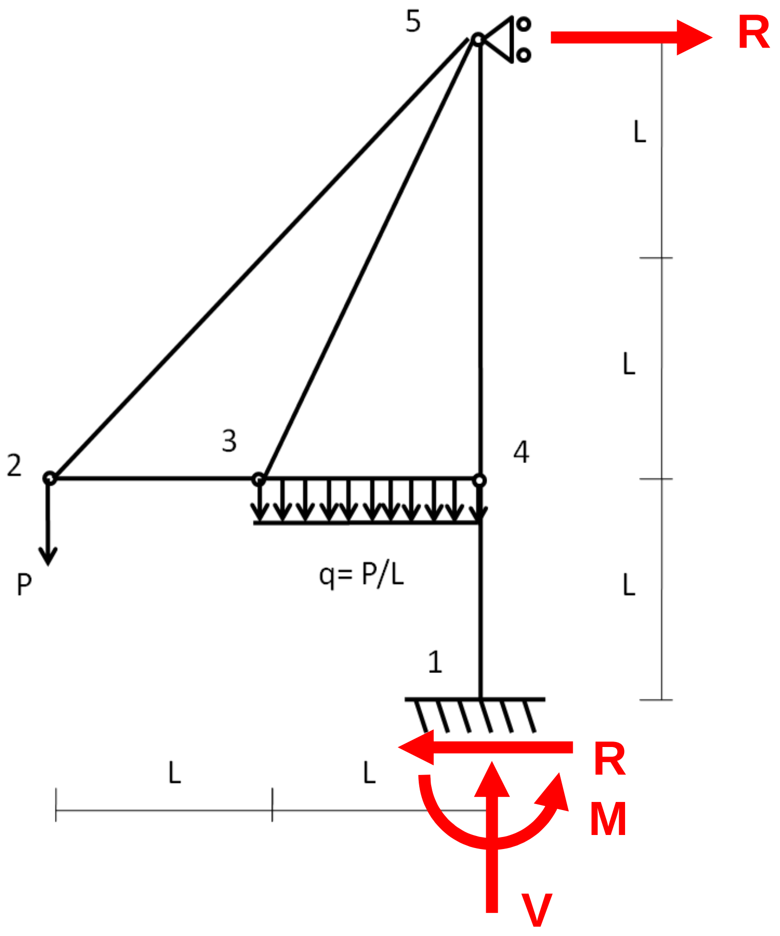
a) Valor de las reacciones en los nudos **1** y **5**.
b) Desplazamiento horizontal del nudo **4.**
c) Valor de los esfuerzos axiles en todas las barras.
d) Diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la barra **3-4**.
e) Valor del desplazamiento vertical del nudo **2**.

Nota: En la barra 1-4, despréciense los movimientos inducidos por los esfuerzos axil y cortante frente a los que se producen por flexión.

Supónganse que todas las barras poseen la misma sección transversal y que los valores EA y EI son conocidos.



a) La estructura es isostática y aparecen las siguientes reacciones:



Equilibrio de fuerzas verticales: V=2P

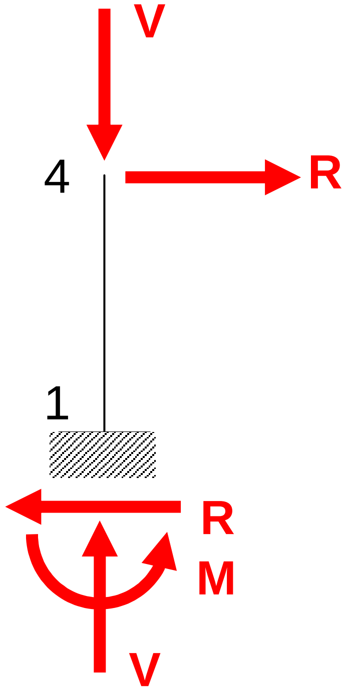
Equilibrio de fuerzas horizontales: se cumple

Equilibrio de momentos en 1: -R.3L+P.L/2+P.2L+M=0

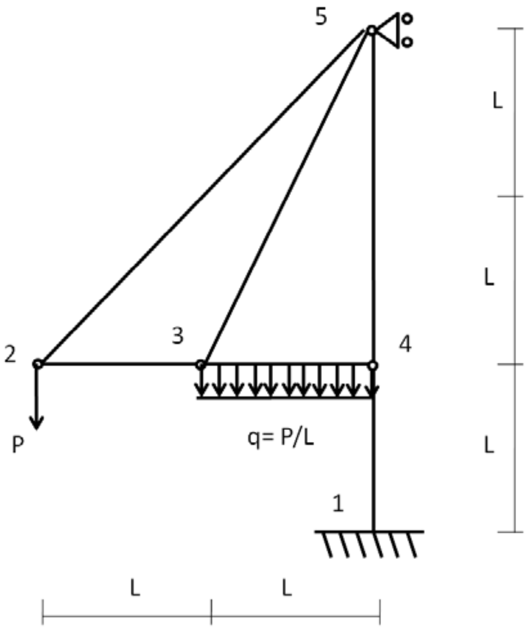
Momentos en 4 de la las reacciones en el empotramiento: M=R.L

R=5/4 P y M=5/4 P.L

b) Desplazamiento horizontal del nudo 4:

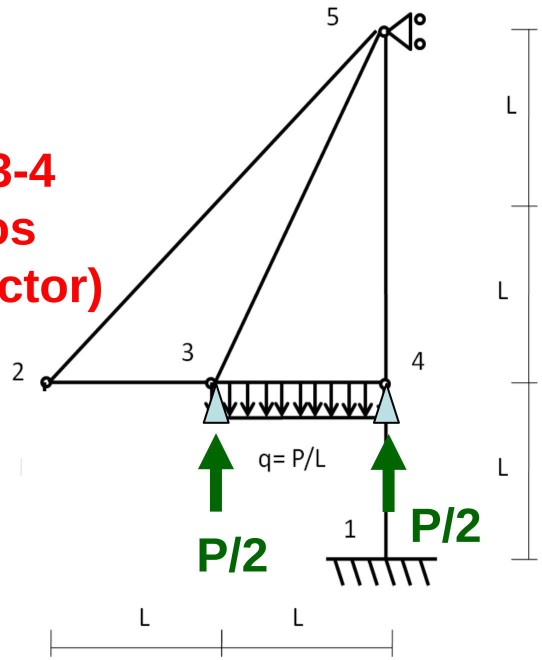


$$\vec{u}_4 = \frac{RL^3}{3EI} = \frac{5PL^3}{12EI}$$



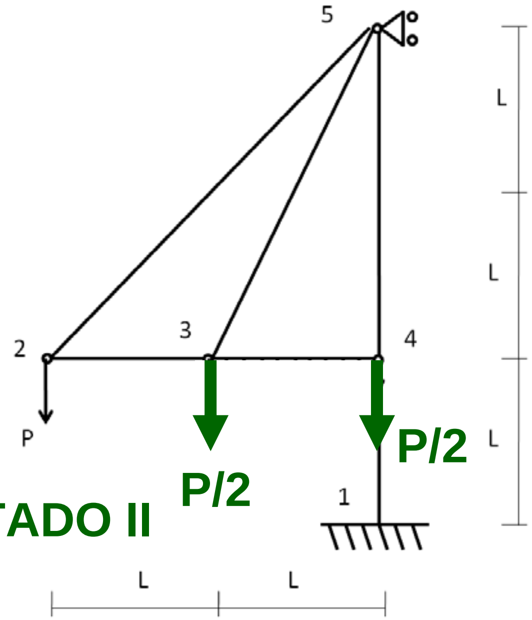
=

Sólo la barra 3-4 sufre esfuerzos (cortante y flector)

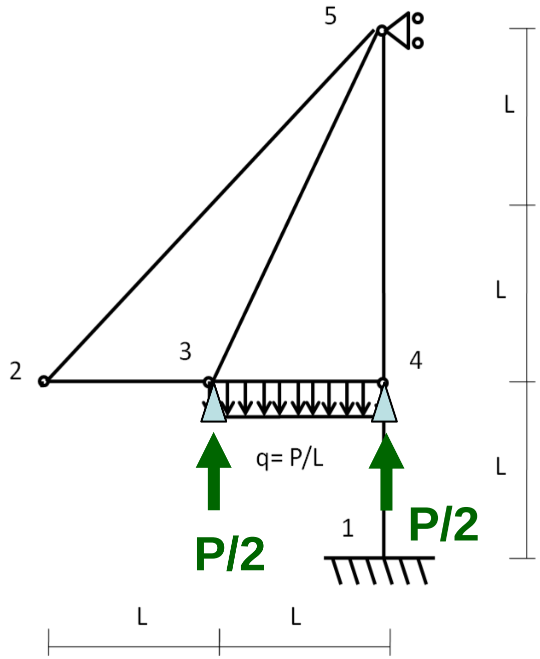


ESTADO I

+



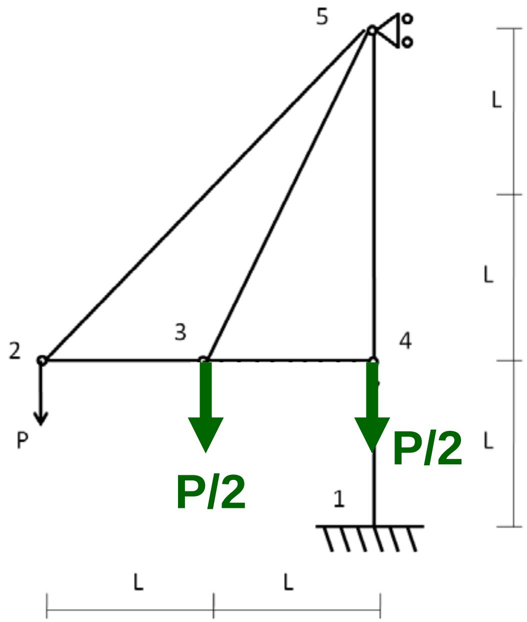
ESTADO II



ESTADO I

Sólo la barra 3-4 sufre esfuerzos (cortante y flector)
Ninguna otra barra de la estructura sufre esfuerzos
Los nudos de la estructura no sufren ningún desplazamiento

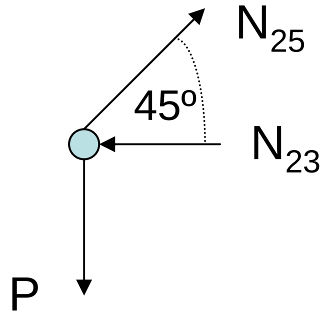
Resolución del estado II



ESTADO II

c) Valor de los esfuerzos axiles en todas las barras

Nudo 2:



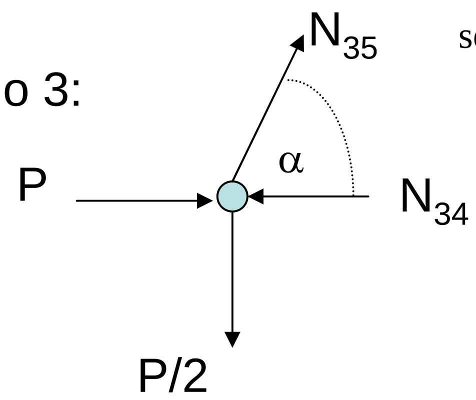
$$\left.\begin{array}{l} N_{25}.\text{sen } 45º = P \\ N_{23} = N_{25}.\cos 45º \end{array}\right\}$$

$$N_{25} = \frac{2P}{\sqrt{2}}(\textit{tracción})$$

$$N_{23} = P(\textit{compresión})$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Nudo 3:

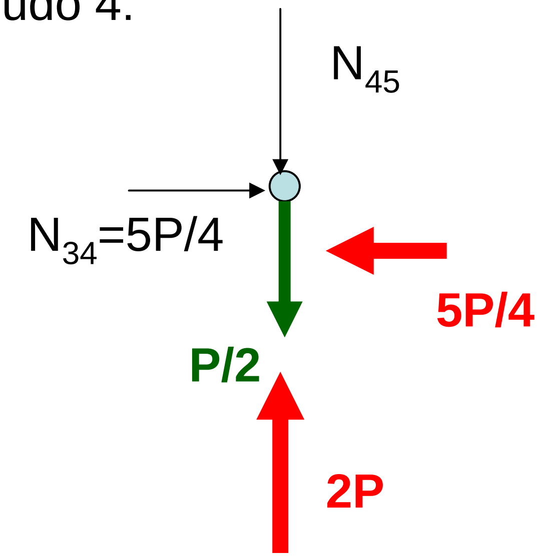


$$\left.\begin{array}{l} N_{35}.\text{sen }\alpha = P/2 \\ N_{34} = P + N_{35}.\cos\alpha \end{array}\right\}$$

$$N_{35} = \frac{\sqrt{5}P}{4}(\textit{tracción})$$

$$N_{34} = P + \frac{\sqrt{5}}{4}P\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{4}P(\textit{compresión})$$

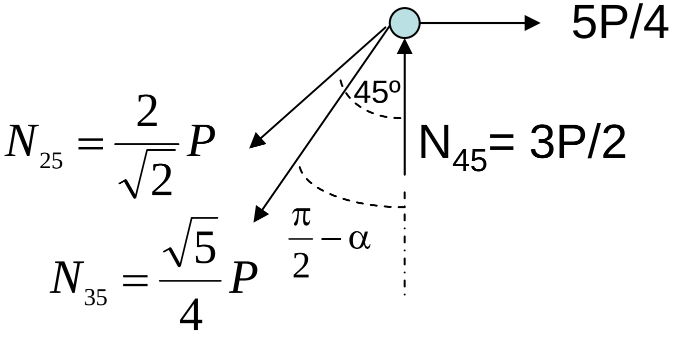
Nudo 4:



N_{45}=3P/2 (compresión)

Comprobación del equilibrio en el nudo 5:

Nudo 5:



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \boldsymbol{cos}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

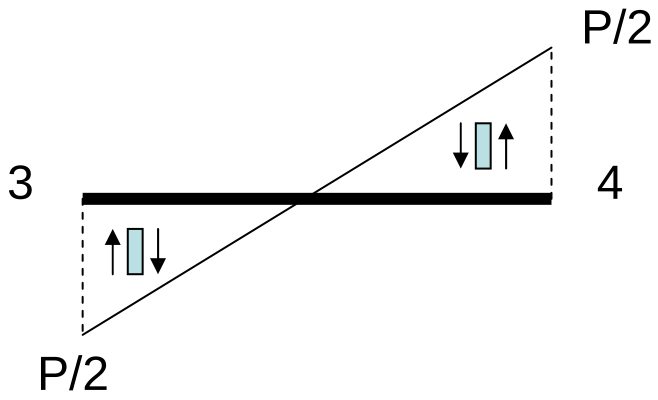
Equilibrio horizontal

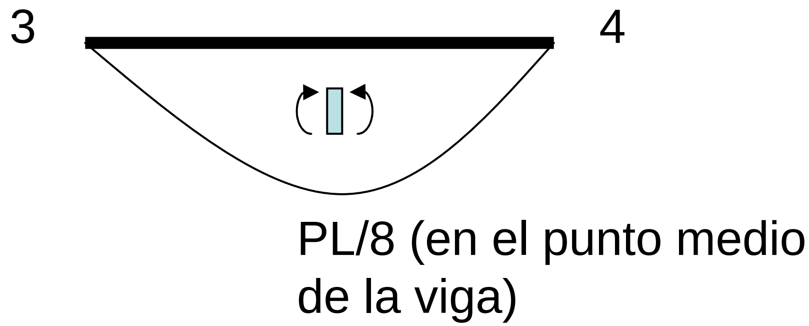
$$\frac{2P}{\sqrt{2}} sen45 + \frac{\sqrt{5}P}{4} \boldsymbol{cos}\,\alpha = P + \frac{P}{4} = \frac{5P}{4}$$

Equilibrio vertical

$$\frac{2P}{\sqrt{2}} \boldsymbol{cos}\,45 + \frac{\sqrt{5}P}{4} sen\alpha = P + \frac{\sqrt{5}P}{4}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3P}{2}$$

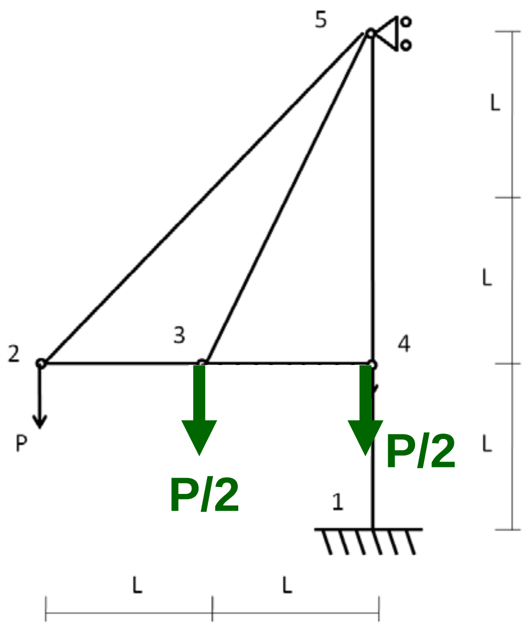
d) Diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la barra **3-4**.





e) Valor del desplazamiento vertical del nudo **2**

Aplicamos el teorema de Castigliano al Estado II:

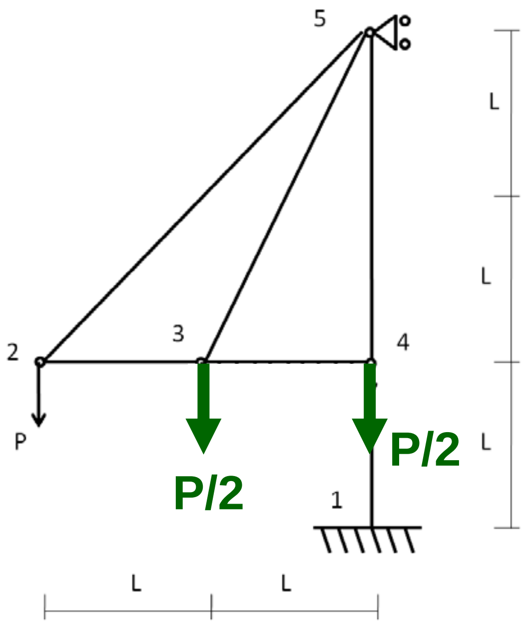


ESTADO II

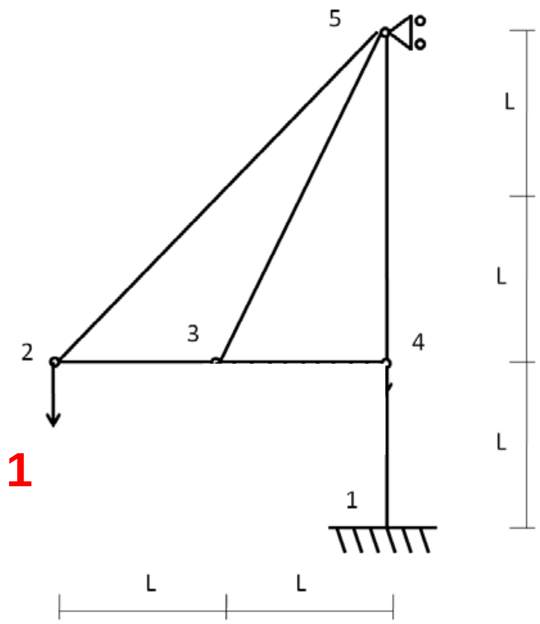
Los esfuerzos axiles sólo producen energía interna en las barras de la estructura articulada. En la barra 1-4 sólo produce energía interna los momentos flectores (en el enunciado nos dicen que, en esta última barra despreciemos los efectos de los esfuerzos axiles y cortantes).

e) Valor del desplazamiento vertical del nudo **2**

Aplicamos el teorema de Castigliano al Estado II:

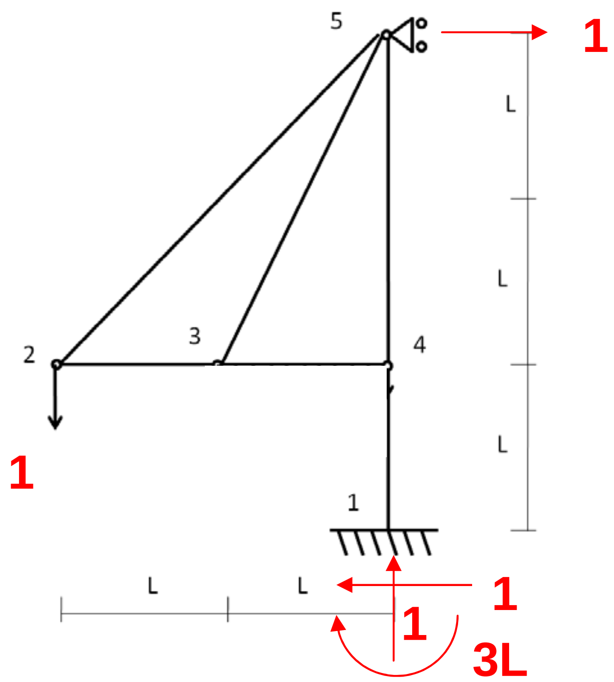


ESTADO II



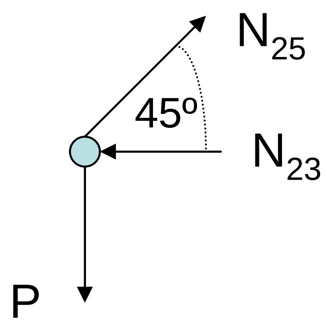
ESTADO III (carga unidad en 2)

El Estado II ya lo tenemos resuelto, pero tenemos que resolver el Estado III



ESTADO III (carga unidad en 2)

Nudo 2:

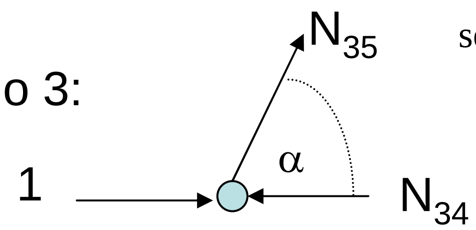


$$\left.\begin{aligned} &N_{25}.\text{sen } 45^{o}=1 \\ &N_{23}=N_{25}.\cos 45^{o} \end{aligned}\right\}$$

$$N_{25}=\frac{2}{\sqrt{2}}\,(\textit{tracción})$$

$$N_{23}=1\,(\textit{compresión})$$

Nudo 3:



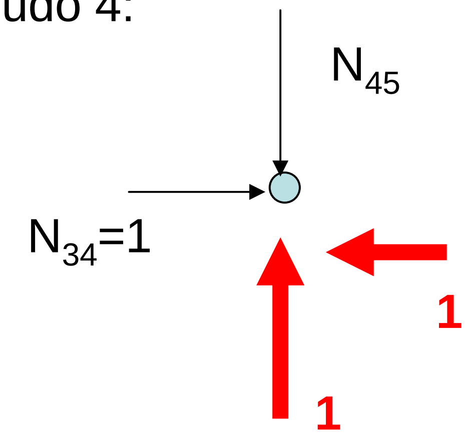
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\left.\begin{array}{l} N_{35}.\text{sen } \alpha = 0 \\ N_{34} = 1 \end{array}\right\}$$

$N_{35} = 0$

$N_{34} = 1\,(\textit{compresión})$

Nudo 4:

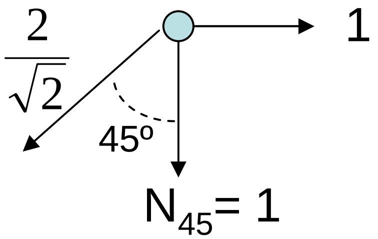


N_{45}=1 (compresión)

Comprobación del equilibrio en el nudo 5:

Nudo 5:

$N_{25} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

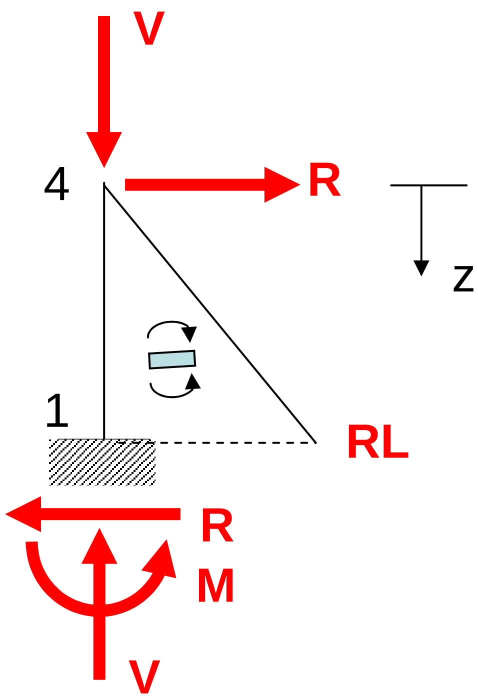


$$\left.\begin{array}{l} N_{25}.\text{sen } 45 = 1 \\ N_{45} = N_{25}.\cos 45 \end{array}\right\}$$

Barra	N^{II}	N^{III}	L	$N^{II}N^{III}L$
2-5	$2P/\sqrt{2}$	$2/\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}L$	$4\sqrt{2}PL$
2-3	-P	-1	L	PL
3-5	$\sqrt{5}P/4$	0	$\sqrt{5}L$	0
3-4	-5P/4	-1	L	5PL/4
4-5	-3P/2	-1	2L	3PL

$$\sum N^{II} \cdot N^{III} \cdot L = 10{,}907PL$$

Pero, además, tenemos que tener en cuenta la barra 1-4 que, aunque consideramos que no sufre deformaciones por axil y cortante, si que las sufre flexión. Por tanto, esta barra almacena energía elástica y la tenemos que tener en cuenta al aplicar el teorema de Castigliano.



Estado II: R=5P/4

M^{II}=5Pz/4

Estado III: R=1

M^{III}=1.z

$$\int_{z=0}^{z=L} M^{II} M^{III} dz = \int_{z=0}^{z=L} 5Pz^2/4dz = 5PL^3/12$$

$$\sum N^{II} \cdot N^{III} \cdot L = 10{,}907PL$$

$$\int_{z=0}^{z=L} M^{II} M^{III} dz = \int_{z=0}^{z=L} 5Pz^2 / 4dz = 5PL^3 / 12$$

Por tanto:

$$v_2 \downarrow = \frac{1}{EA} \sum N^{II} N^{III} L + \frac{1}{EI} \int_0^L M^{II} M^{III} dz = \frac{10{,}907PL}{EA} + \frac{5PL^3}{12EI}$$