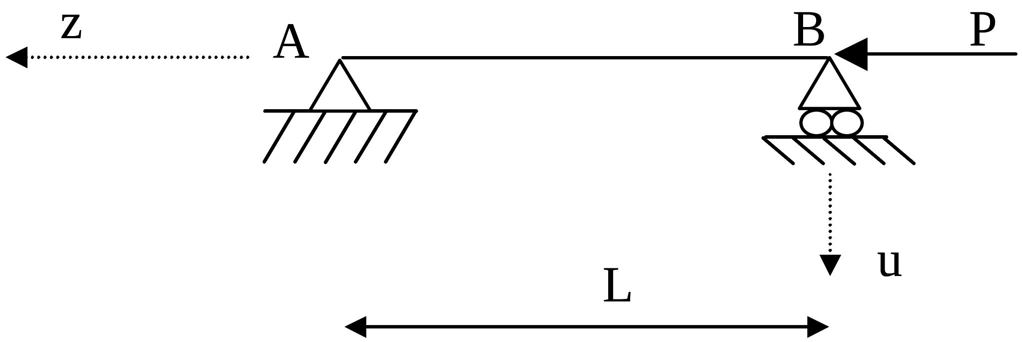
Un tubo de 50 mm de radio exterior y 5 mm de espesor, y de longitud *L*=5 m, se encuentra sometido a las ligaduras y carga que aparecen en la figura.



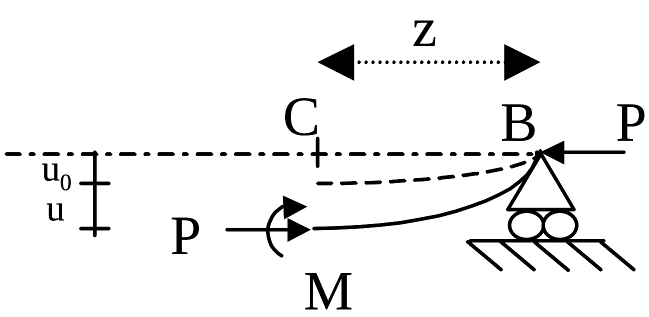
Por un error en su proceso de fabricación, el tubo no es perfectamente recto sino que tiene una forma definida por la función (referida a los ejes indicados en la figura):

$$u_0(z) = u_0 sen \frac{\pi z}{L}$$

donde u_0 es la milésima parte de la longitud *L* del tubo.

Cuando *P=50 kN*, determinar cuál es el coeficiente de seguridad, respecto de la carga que produciría la plastificación en algún punto del tubo, sabiendo que el material del tubo tiene un límite elástico σ_y de 220 MPa y un módulo de elasticidad *E* de 210 GPa.

Una sección genérica *C* de la pieza posee un desplazamiento según el eje *z* suma de otros dos: uno, *u0(z)*, debido al fallo del proceso de fabricación, y otro, *u(z)*, como consecuencia del pandeo lateral.
Aislando la porción *BC* de la pieza, se tiene:



por lo que, para que exista equilibrio, deberá verificarse que:

$$M = P\left[u_0(z) + u(z)\right]$$

Como, por otra parte, se cumple que:

$$M = -\frac{d^2u(z)}{dz^2} EI$$

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + \frac{P}{EI} u(z) = -\frac{P}{EI} u_0(z)$$

Definiendo *k* como: $$k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + k^2u(z) = -k^2u_0(z) = -k^2u_0\, sen\frac{\pi z}{l}$$

La solución de esta ecuación diferencial será suma de la solución general de la ecuación homogénea:

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + k^2u(z) = 0$$

$$u(z) = C_1 \cos kz + C_2 \operatorname{sen} kz$$

más una solución particular de la ecuación diferencial

$$u(z) = A \operatorname{sen}\frac{\pi z}{L} \qquad A = -\frac{k^2u_0}{k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}}$$

$$u(z) = C_1 \cos kz + C_2 \operatorname{sen} kz + A \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L}$$

Para obtener el valor de C_1 y C_2 impongamos las siguientes condiciones de contorno:
En $z=0$, $u=0$ que conduce a que $C_1=0$
En $z=L$, $u=0$ que conduce a:

$$C_2 \operatorname{sen} kL = 0$$

La solución $kL=np$, donde n es un número entero, no es válida en este caso pues la ecuación debe cumplirse para todos los valores de k. Por tanto, $C_2=0$.

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$u(z) = -\frac{k^2 u_0}{k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L}$$

La distribución de momentos flectores en el tubo es:

$$M(z) = -EIu''(z) = -\frac{EIk^2 u_0 \pi^2}{k^2 L^2 - \pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L}$$

que presenta el siguiente valor máximo cuando *z=L/2*:

$$M(L/2) = -\frac{P u_0 \pi^2}{\dfrac{PL^2}{EI} - \pi^2}$$

Si la pieza tubular hubiese sido perfectamente recta, la carga P_c que produciría el pandeo de la misma sería:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

por lo que la expresión del momento máximo quedaría:

$$M(L/2) = -\frac{P u_0}{\dfrac{P}{P_c} - 1}$$

Las tensiones máxima y mínima causadas por la acción combinada de la carga axil de compresión P y el momento flector máximo M(L/2) se pueden obtener como:

$$\sigma = -\frac{P}{A} \pm \frac{M\left(L/2\right)\cdot R}{I}$$

donde *R* es el radio exterior del tubo.

En estructuras metálicas, el cociente *I/R* suele conocerse como módulo resistente de la sección, representándose por la letra *W*.
Por tanto:

$$\sigma = -P\left[\frac{1}{A} \pm \frac{1}{\frac{P}{P_c}-1}\frac{u_0}{W}\right]$$

En nuestro caso:

P=50 kN
u_0*=0,005 m*
A=p(50^2*-45*^{2}*)=1492 mm2*
I=p/4.(50^4*-45*^{4}*)=1,688x10*^{6} *mm4*
W=I/50=33760 mm3
k=1,41x10^{-3}

$$\sigma = -33{,}5 \pm 14{,}4\ MPa$$

La plastificación (por compresión) de la fibra perimetral del tubo se producirá cuando:

$$-\sigma_y = -P\left[\frac{1}{A} \pm \frac{1}{\dfrac{P}{P_c} - 1}\frac{u_0}{W}\right]$$

que, operando (tomando el signo positivo dentro del corchete de la expresión), conduce a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$P^2 - \left(A\sigma_y + P_c A\sigma_y + \frac{P_c A u_0}{W}\right)P + \sigma_y P_c A = 0$$

que proporciona dos soluciones:

$$P_1 = 117{,}1\,kN$$

$$P_1 = 392{,}4\,kN$$

Tomando el valor más pequeño de ambos, el coeficiente de seguridad, γ, que poseemos al cargar la pieza con 50 kN, respecto a la situación en la que se produzca plastificación en algún punto del tubo, es:

$$\boxed{\gamma = \frac{117{,}1}{50} = 2{,}34}$$