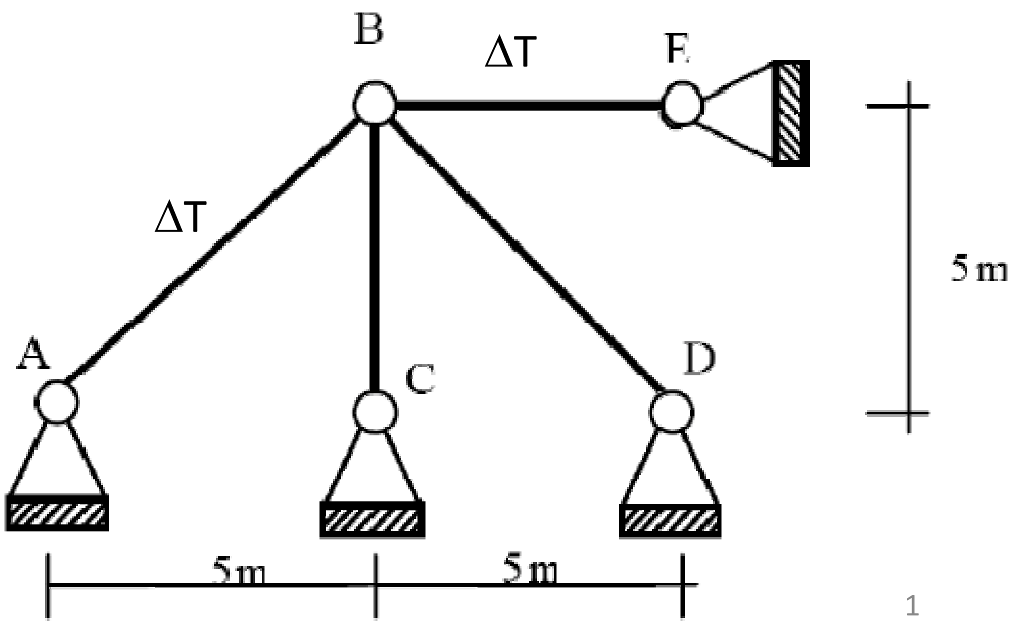
La estructura articulada plana de la figura esta solicitada por un incremento de temperatura en las barras AB y BE de 30oC. Para todas las barras la sección es cuadrada de lado 5 cm , el modulo de elasticidad es E=200 GPa y el coeficiente de dilatación toma el valor $\alpha=10^{-5}$ ºC^{-1}.

Utilizando técnicas matriciales, se pide obtener:

a) Expresión de la matriz de rigidez de la barra AB en coordenadas locales.
b) Expresión simbólica de la matriz de rigidez global de la estructura indicando los términos ensamblados.
c) Movimientos del punto B.
d) Reacciones en los apoyos.
e) Esfuerzos en todas las barras.



MATRIZ DE CAMBIO DE EJES GLOBALES A LOCALES

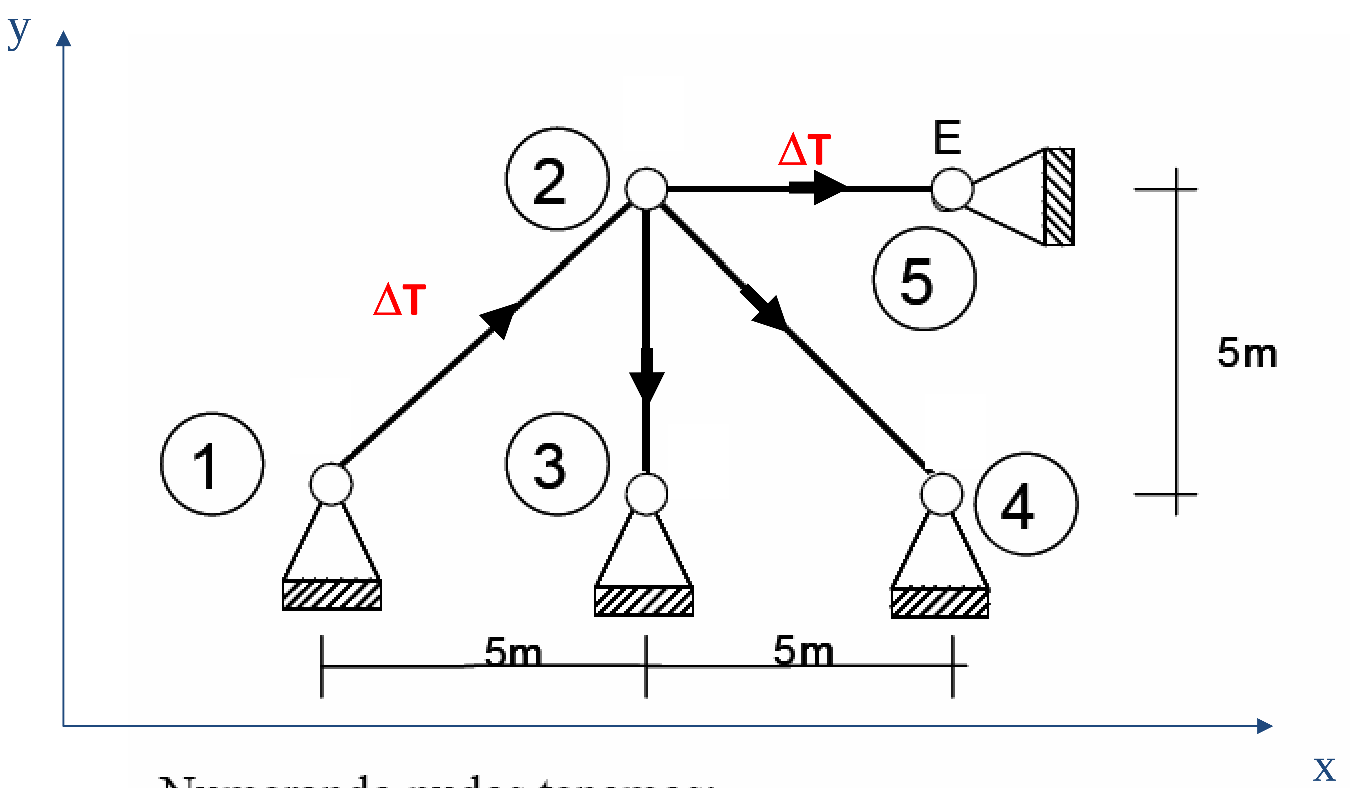
$$k = \frac{EA}{L}$$

$$\begin{array}{ccc} & K_{11} & K_{12} \\ \left[K^e\right]_{ejes\ globales} = k & \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array}\right]} \\ & K_{21} & K_{22} \end{array}$$

a) Expresión de la matriz de rigidez de la barra AB en coordenadas locales.

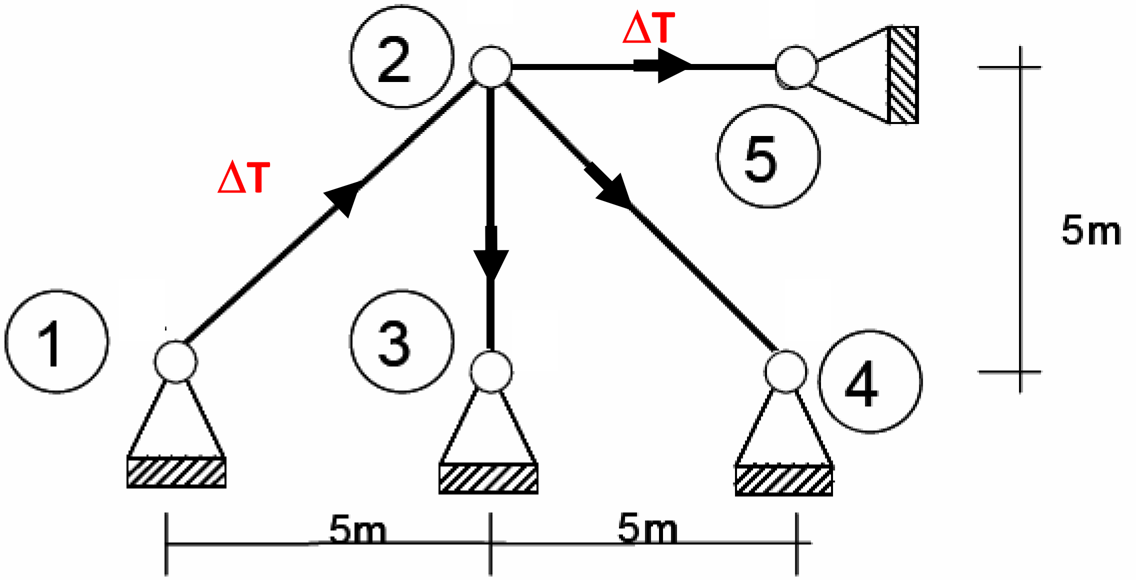
$$K_{11} = K_{22} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos\alpha \cdot sen\,\alpha \\ \cos\alpha \cdot sen\,\alpha & sen^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{-E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos\alpha \cdot sen\,\alpha \\ \cos\alpha \cdot sen\,\alpha & sen^2\alpha \end{bmatrix}$$

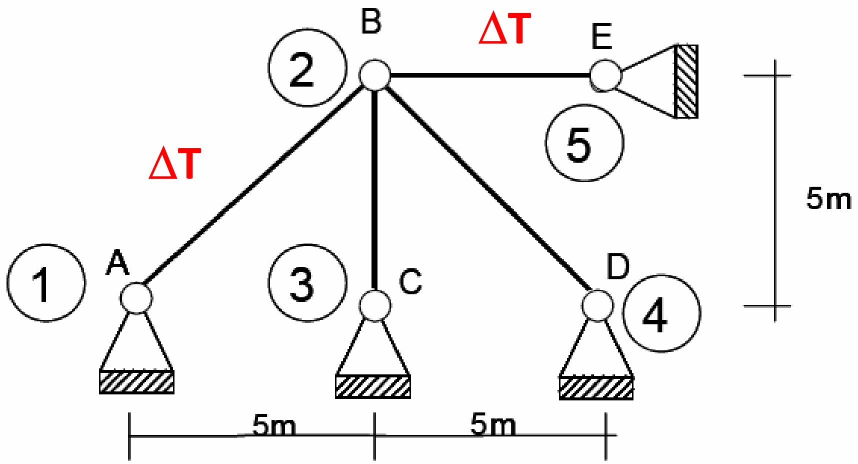


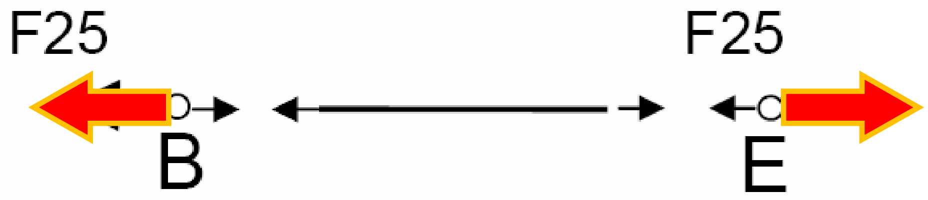
Numerando nudos tenemos:

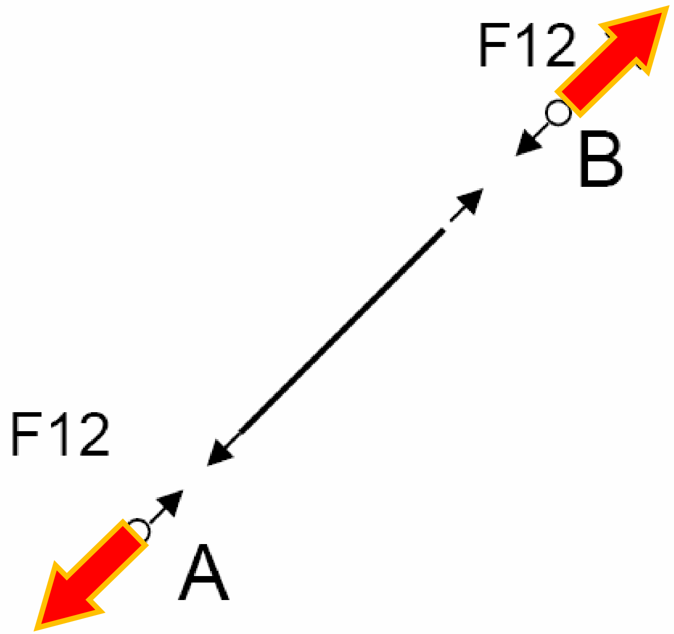
$$\alpha_{12} = 45^{o}\ ;\alpha_{23} = -90^{o}\ ;\alpha_{24} = -45^{o}\ ;\alpha_{25} = 0^{o}$$



$$
\begin{array}{l}
\text{Nudos} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
K= \begin{bmatrix}
(K_{11})_{12} & (K_{12})_{12} & 0 & 0 & 0 \\
(K_{21})_{12} & (K_{22})_{12}+(K_{11})_{23}+(K_{11})_{24}+(K_{11})_{25} & (K_{12})_{23} & (K_{12})_{24} & (K_{12})_{25} \\
0 & (K_{21})_{23} & (K_{22})_{23} & 0 & 0 \\
0 & (K_{21})_{24} & 0 & (K_{22})_{24} & 0 \\
0 & (K_{21})_{25} & 0 & 0 & (K_{22})_{25}
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
$$







Fuerzas de barras sobre nudos

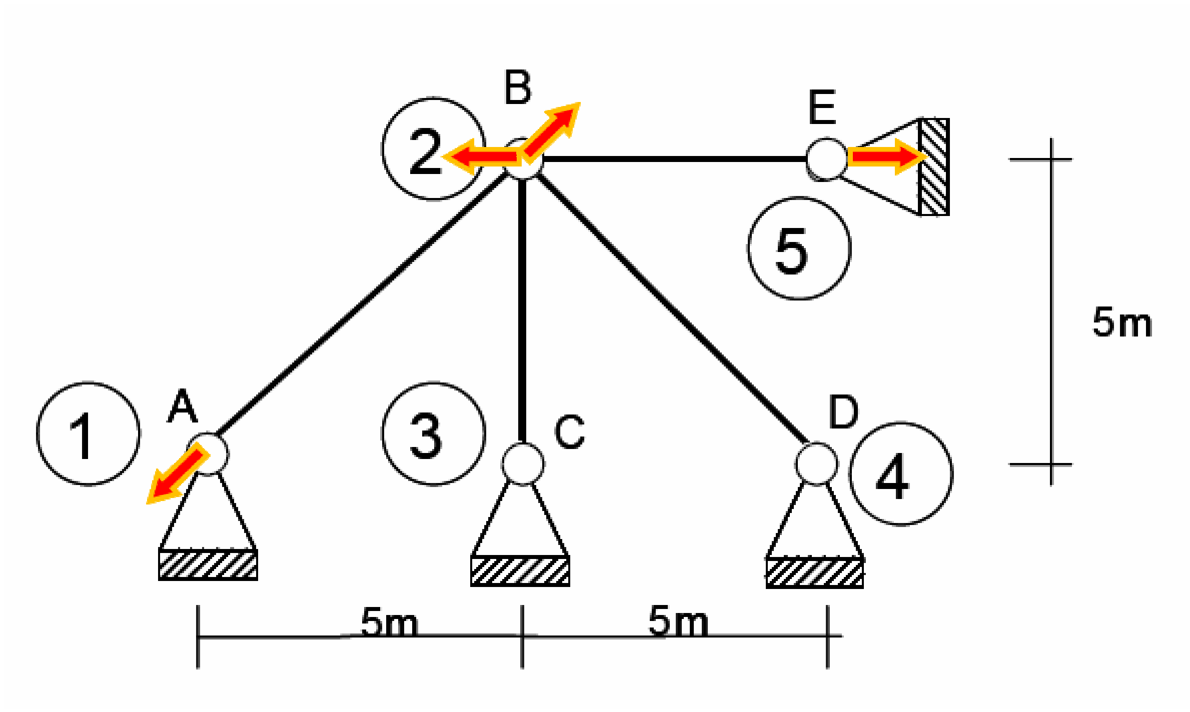
$$F12 = EA \cdot \alpha \cdot \Delta T =$$

$$= 500 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-5} \cdot 30 = 150 kN$$

$$EA = 500 \cdot 10^{3}\, kN$$

F25=150 kN

Hay que proyectarla
según los ejes globales
x e y



$$f_i = \begin{Bmatrix} R_{1x} - 106.1 \\ R_{1y} - 106.1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \\ R_{5x} - 150 \\ R_{5y} - 0 \end{Bmatrix}$$

$$
\begin{Bmatrix} R_{1x}-106.1 \\ R_{1y}-106.1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \\ R_{5x}-150 \\ R_{5y}-0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{11})_{12} & (K_{12})_{12} & 0 & 0 & 0 \\ (K_{21})_{12} & \boxed{(K_{22})_{12}+(K_{11})_{23}+(K_{11})_{24}+(K_{11})_{25}} & (K_{12})_{23} & (K_{12})_{24} & (K_{12})_{25} \\ 0 & (K_{21})_{23} & (K_{22})_{23} & 0 & 0 \\ 0 & (K_{21})_{24} & 0 & (K_{22})_{24} & 0 \\ 0 & (K_{21})_{25} & 0 & 0 & (K_{22})_{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

Eliminando las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad nulos queda:

$$
\begin{Bmatrix} F2x \\ F2y \end{Bmatrix} = \left[\left[(K_{22})_{12}+(K_{11})_{23}+(K_{11})_{24}+(K_{11})_{25}\right] \quad \left[(K_{12})_{24}\right]\right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{Bmatrix} -43{,}93 \\ 106{,}1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}707\cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 1{,}707\cdot 10^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \text{ de donde } \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.57\cdot 10^{-4}\,m \\ 6.21\cdot 10^{-4}\,m \end{Bmatrix}
$$

d) Reacciones en los apoyos y esfuerzos en barra:

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} - 106.1 \\ R_{1y} - 106.1 \end{Bmatrix} = \left[(K_{12})_{12} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{-500 \cdot 10^3}{\sqrt{50}} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} -2.57 \\ 6.21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12.87 + 106.1 \\ -12.87 + 106.1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R3x \\ R3y \end{Bmatrix} = \left[(K_{21})_{23} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0kN \\ -62.1kN \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R4x \\ R4y \end{Bmatrix} = \left[(K_{21})_{24} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31.04kN \\ -31.04kN \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{5x} + 150 \\ R_{5y} + 0 \end{Bmatrix} = \left[(K_{21})_{25} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -124.3kN \\ 0 \end{Bmatrix}$$