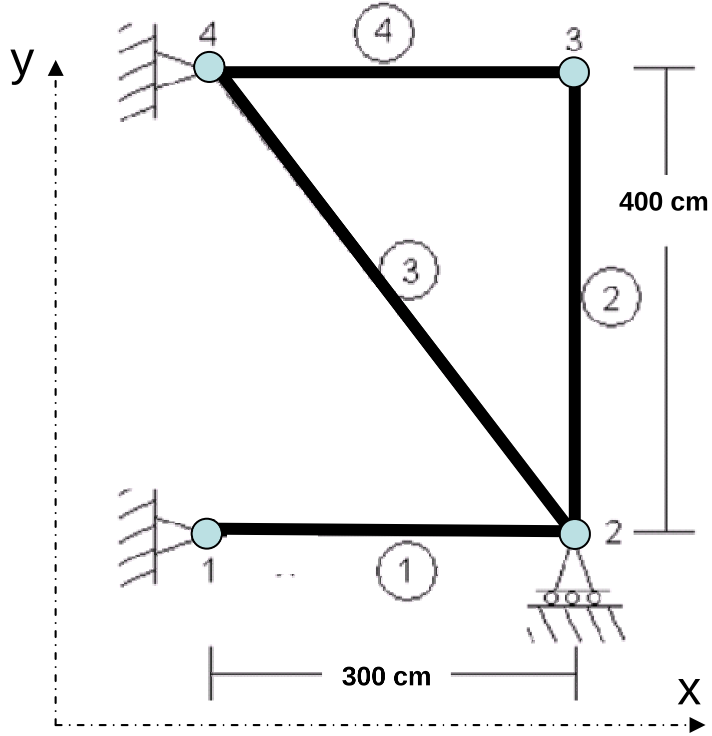
En la estructura articulada de la figura, se aplica, según la dirección X, una carga de 4000 N en el Nudo 2.

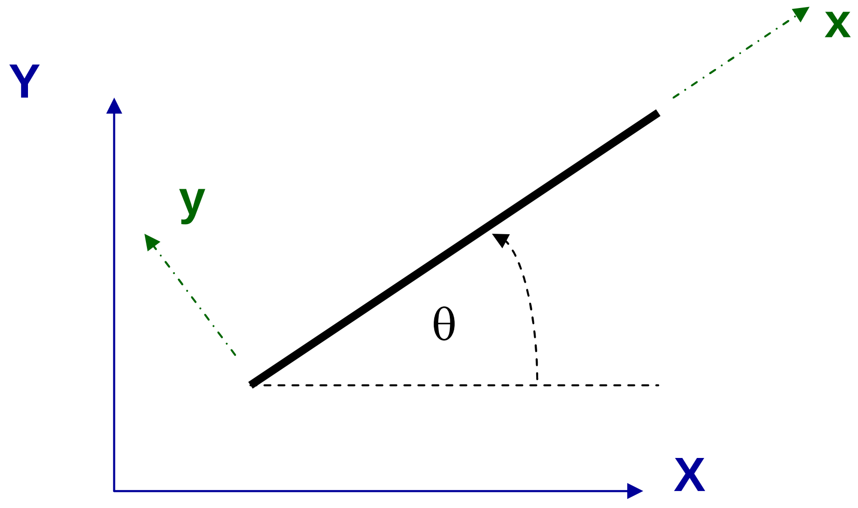
a) Determinar la matriz de rigidez de la estructura y los desplazamientos de los nudos
b) Evaluar las tensiones que aparecen en la barra 3
c) Determinar la reacción que aparece en el nudo 2
d) ¿Se reducirían los desplazamientos de la estructura si se colocase una barra adicional a la estructura conectando los nudos 1 y 3?
e) Si, además de la carga anterior, la barra 4 sufriera un incremento de temperatura de 40 ºC, ¿qué desplazamientos aparecerían en los nudos?
f) Obtener los desplazamientos en los nudos en el caso anterior suponiendo que la ligadura del nudo 4 permitiera el desplazamiento vertical de dicho nudo y que en el nudo 3 se coloca un resorte horizontal de constante k=EA/L, siendo L=6 m.




NOTA: $E=200$ GPa, $A=2{,}25\ cm^2$

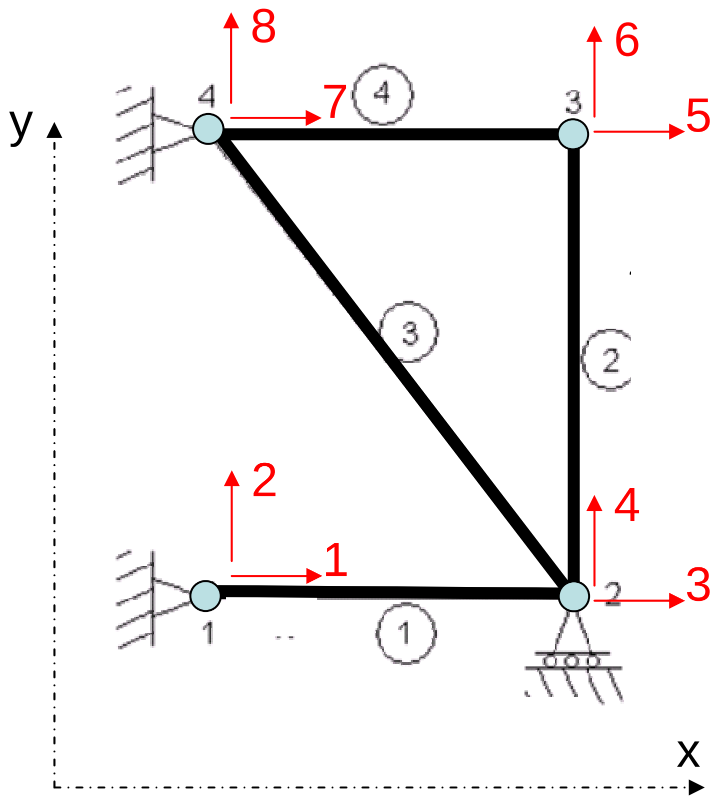
$\alpha=12 \cdot 10^{-6}\ ºC^{-1}$

a) Determinar la matriz de rigidez de la estructura y los desplazamientos de los nudos



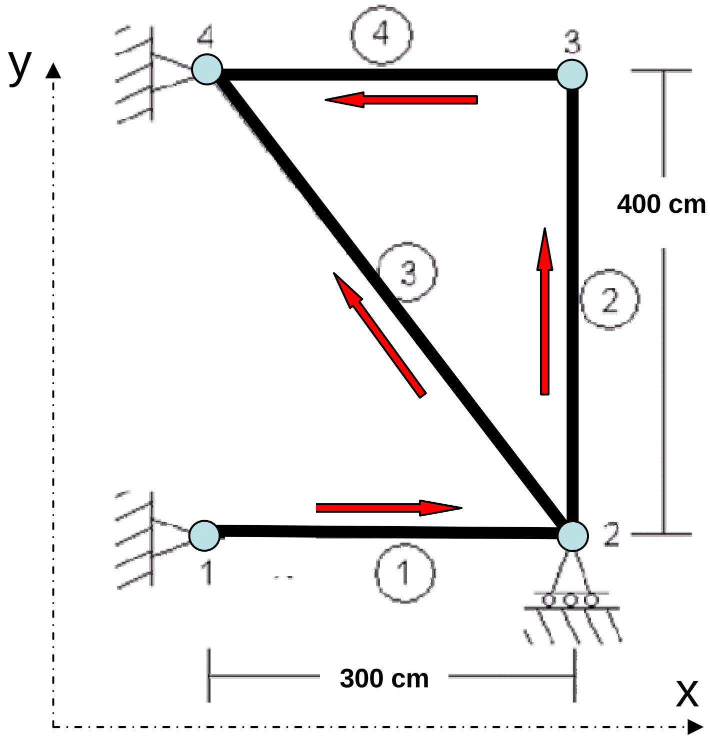

$$[K_e] = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

## GDL’s de la estructura:



# Incidencias de las barras:

Barra 1: del nudo 1 al nudo 2
Barra 2: del nudo 2 al nudo 3
Barra 3: del nudo 2 al nudo 4
Barra 4: del nudo 3 al nudo 4



BARRA 1:

$L := 3 \qquad teta := 0$

$c := \cos(teta) \qquad s := \sin(teta)$

$$k := \frac{E \cdot A}{L}$$

$$K1 := k \cdot \begin{pmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ c \cdot s & s^2 & -c \cdot s & -s^2 \\ -c^2 & -c \cdot s & c^2 & c \cdot s \\ -c \cdot s & -s^2 & c \cdot s & s^2 \end{pmatrix}$$

$$K1 = \begin{pmatrix} 1.5 \times 10^7 & 0 & -1.5 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5 \times 10^7 & 0 & 1.5 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

BARRA 2:

$$L := 4 \qquad teta := \frac{\pi}{2}$$

$$c := \cos(teta) \qquad s := \sin(teta)$$

$$k := \frac{E \cdot A}{L} \qquad K2 := k \cdot \begin{pmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ c \cdot s & s^2 & -c \cdot s & -s^2 \\ -c^2 & -c \cdot s & c^2 & c \cdot s \\ -c \cdot s & -s^2 & c \cdot s & s^2 \end{pmatrix}$$

$$K2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.125 \times 10^7 & 0 & -1.125 \times 10^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.125 \times 10^7 & 0 & 1.125 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

BARRA 3:

$L := 5$ $\quad$ $teta := 2.214297442$

$c := \cos(teta)$ $\quad$ $s := \sin(teta)$

$$k := \frac{E \cdot A}{L}$$

$$K3 := k \cdot \begin{pmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ c \cdot s & s^2 & -c \cdot s & -s^2 \\ -c^2 & -c \cdot s & c^2 & c \cdot s \\ -c \cdot s & -s^2 & c \cdot s & s^2 \end{pmatrix}$$

$$K3 = \begin{pmatrix} 3.24 \times 10^6 & -4.32 \times 10^6 & -3.24 \times 10^6 & 4.32 \times 10^6 \\ -4.32 \times 10^6 & 5.76 \times 10^6 & 4.32 \times 10^6 & -5.76 \times 10^6 \\ -3.24 \times 10^6 & 4.32 \times 10^6 & 3.24 \times 10^6 & -4.32 \times 10^6 \\ 4.32 \times 10^6 & -5.76 \times 10^6 & -4.32 \times 10^6 & 5.76 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

BARRA 4:

$L := 3 \qquad teta := \pi$

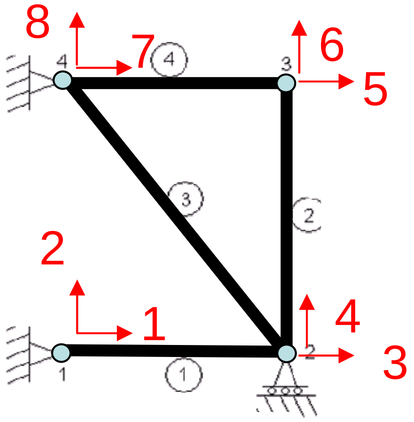
$c := \cos(teta) \qquad s := \sin(teta)$

$$k := \frac{E \cdot A}{L} \qquad K4 := k \cdot \begin{pmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ c \cdot s & s^2 & -c \cdot s & -s^2 \\ -c^2 & -c \cdot s & c^2 & c \cdot s \\ -c \cdot s & -s^2 & c \cdot s & s^2 \end{pmatrix}$$

$$K4 = \begin{pmatrix} 1.5 \times 10^7 & 0 & -1.5 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5 \times 10^7 & 0 & 1.5 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez ensamblada:

$$
K := \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccc}
K1_{1,1} & K1_{1,2} & K1_{1,3} & K1_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K1_{2,1} & K1_{2,2} & K1_{2,3} & K1_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K1_{3,1} & K1_{3,2} & K1_{3,3} + K2_{1,1} + K3_{1,1} & K1_{3,4} + K2_{1,2} + K3_{1,2} & K2_{1,3} & K2_{1,4} & K3_{1,3} & K3_{1,4} \\
K1_{4,1} & K1_{4,2} & K1_{4,3} + K2_{2,1} + K3_{2,1} & K1_{4,4} + K2_{2,2} + K3_{2,2} & K2_{2,3} & K2_{2,4} & K3_{2,3} & K3_{2,4} \\
0 & 0 & K2_{3,1} & K2_{3,2} & K2_{3,3} + K4_{1,1} & K2_{3,4} + K4_{1,2} & K4_{1,3} & K4_{1,4} \\
0 & 0 & K2_{4,1} & K2_{4,2} & K2_{4,3} + K4_{2,1} & K2_{4,4} + K4_{2,2} & K4_{2,3} & K4_{2,4} \\
0 & 0 & K3_{3,1} & K3_{3,2} & K4_{3,1} & K4_{3,2} & K3_{3,3} & K3_{3,4} \\
0 & 0 & K3_{4,1} & K3_{4,2} & K4_{4,1} & K4_{4,2} & K3_{4,3} & K3_{4,4}
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
$$




Matrix de rigidez reducida:

$$
K := \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccc}
K1_{1,1} & K1_{1,2} & K1_{1,3} & K1_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K1_{2,1} & K1_{2,2} & K1_{2,3} & K1_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K1_{3,1} & K1_{3,2} & K1_{3,3} + K2_{1,1} + K3_{1,1} & K1_{3,4} + K2_{1,2} + K3_{1,2} & K2_{1,3} & K2_{1,4} & K3_{1,3} & K3_{1,4} \\
K1_{4,1} & K1_{4,2} & K1_{4,3} + K2_{2,1} + K3_{2,1} & K1_{4,4} + K2_{2,2} + K3_{2,2} & K2_{2,3} & K2_{2,4} & K3_{2,3} & K3_{2,4} \\
0 & 0 & K2_{3,1} & K2_{3,2} & K2_{3,3} + K4_{1,1} & K2_{3,4} + K4_{1,2} & K4_{1,3} & K4_{1,4} \\
0 & 0 & K2_{4,1} & K2_{4,2} & K2_{4,3} + K4_{2,1} & K2_{4,4} + K4_{2,2} & K4_{2,3} & K4_{2,4} \\
0 & 0 & K3_{3,1} & K3_{3,2} & K4_{3,1} & K4_{3,2} & K3_{3,3} & K3_{3,4} \\
0 & 0 & K3_{4,1} & K3_{4,2} & K4_{4,1} & K4_{4,2} & K3_{4,3} & K3_{4,4}
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
$$

$$\mathrm{Kred} := \begin{pmatrix} K1_{3,3} + K2_{1,1} + K3_{1,1} & K2_{1,3} & K2_{1,4} \\ K2_{3,1} & K2_{3,3} + K4_{1,1} & K2_{3,4} + K4_{1,2} \\ K2_{4,1} & K2_{4,3} + K4_{2,1} & K2_{4,4} + K4_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Kr} = \begin{pmatrix} 1.824 \times 10^{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 \times 10^{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1.125 \times 10^{7} \end{pmatrix}$$

$$f := \begin{pmatrix} 4000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u := \mathrm{Kred}^{-1} \cdot f \qquad u = \begin{pmatrix} 2.193 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Del resultado que hemos obtenido, se deduce que los desplazamientos experimentados por los gdl’s 5 y 6 (nudo 3 de la estructura) son nulos. Este resultado es coherente con el hecho de que las barras 2 y 4 no están sometidas a ningún esfuerzo axil ya que no son colineales y confluyen en un nudo que no tiene ninguna carga exterior aplicada. Son, por tanto, barras libres de tensión en este problema.

b) Evaluar las tensiones que aparecen en la barra 3

$$\{u'\}_{ejes\ locales} = [T]^T \{u\}_{ejes\ globales}$$

$$[T]^T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$[T]^T = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ -0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u'_{x1} \\ u'_{y1} \\ u'_{x2} \\ u'_{y2} \end{Bmatrix}_{Barra\,3} = [T]^T \begin{pmatrix} 2.193\,10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.316\times 10^{-4} \\ -1.754\times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{x2} \\ S'_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{x1} \\ u'_{y1} \\ u'_{x2} \\ u'_{y2} \end{Bmatrix}$$

Matriz de rigidez de la barra 3 en ejes locales:

$$\mathrm{Kprim3} = \begin{pmatrix} 9\times 10^{6} & 0 & -9\times 10^{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9\times 10^{6} & 0 & 9\times 10^{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S'_{x1} \\ S'_{y1} \\ S'_{x2} \\ S'_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 9\times 10^{6} & 0 & -9\times 10^{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9\times 10^{6} & 0 & 9\times 10^{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.316\times 10^{-4} \\ -1.754\times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.184\times 10^{3} \\ 0 \\ 1.184\times 10^{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, la barra 3 se encuentra sometida a un esfuerzo de tracción de 1184 N, por lo que la tensión en dicha barra será:

$$\sigma_3 = \frac{1184}{2{,}25\cdot 10^{-4}} = 5{,}26\ MPa$$

## c) Determinar la reacción que aparece en el nudo 2 ($(R_Y)_2$)

$$
K := \begin{pmatrix}
K1_{1,1} & K1_{1,2} & K1_{1,3} & K1_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K1_{2,1} & K1_{2,2} & K1_{2,3} & K1_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K1_{3,1} & K1_{3,2} & K1_{3,3}+K2_{1,1}+K3_{1,1} & K1_{3,4}+K2_{1,2}+K3_{1,2} & K2_{1,3} & K2_{1,4} & K3_{1,3} & K3_{1,4} \\
K1_{4,1} & K1_{4,2} & K1_{4,3}+K2_{2,1}+K3_{2,1} & K1_{4,4}+K2_{2,2}+K3_{2,2} & K2_{2,3} & K2_{2,4} & K3_{2,3} & K3_{2,4} \\
0 & 0 & K2_{3,1} & K2_{3,2} & K2_{3,3}+K4_{1,1} & K2_{3,4}+K4_{1,2} & K4_{1,3} & K4_{1,4} \\
0 & 0 & K2_{4,1} & K2_{4,2} & K2_{4,3}+K4_{2,1} & K2_{4,4}+K4_{2,2} & K4_{2,3} & K4_{2,4} \\
0 & 0 & K3_{3,1} & K3_{3,2} & K4_{3,1} & K4_{3,2} & K3_{3,3} & K3_{3,4} \\
0 & 0 & K3_{4,1} & K3_{4,2} & K4_{4,1} & K4_{4,2} & K3_{4,3} & K3_{4,4}
\end{pmatrix}
$$

$$
\{\boldsymbol{f}\} = \begin{Bmatrix} (\boldsymbol{R}_X)_1 \\ (\boldsymbol{R}_Y)_1 \\ 4000 \\ (\boldsymbol{R}_Y)_2 \\ 0 \\ 0 \\ (\boldsymbol{R}_X)_4 \\ (\boldsymbol{R}_Y)_4 \end{Bmatrix}
\qquad
\{\boldsymbol{u}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}193\cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

$$
(\boldsymbol{R}_Y)_2 = \left[\boldsymbol{K}1_{4,3} + \boldsymbol{K}2_{2,1} + \boldsymbol{K}3_{2,1}\right]\cdot 2{,}193\cdot 10^{-4} =
$$

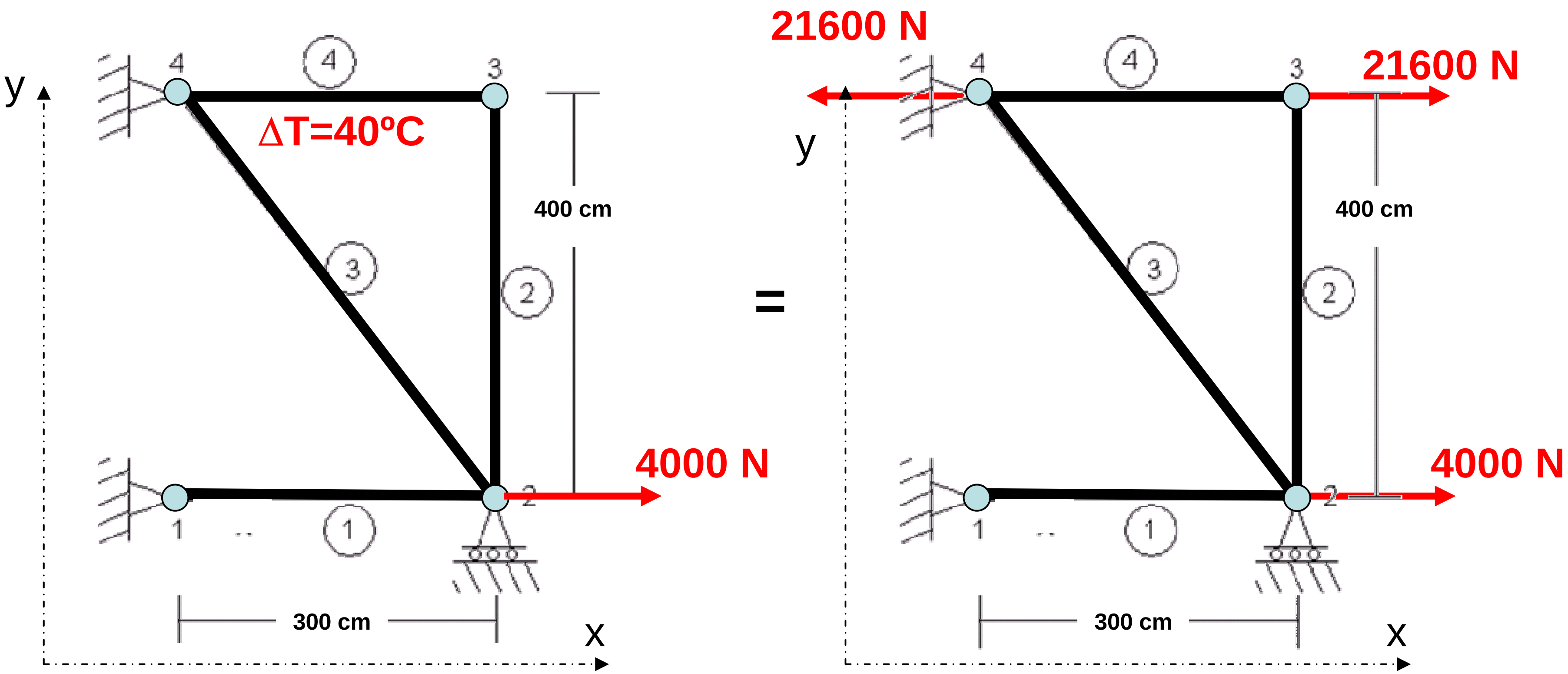
$$
= -4{,}32\cdot 10^{6} \times 2{,}193\cdot 10^{-4} = -947{,}376\,\boldsymbol{N}
$$

La reacción vertical en el nudo 2 tiene un valor de 947,376 N y va dirigida hacia abajo (sentido negativo del eje Y global)

d) ¿Se reducirían los desplazamientos de la estructura si se colocase una barra adicional a la estructura conectando los nudos 1 y 3?

Puesto que el nudo 3 no experimenta ningún tipo de desplazamiento y el nudo 1 tampoco por ser una apoyo, una barra que uniere 1 con 3 no trabajaría y, por tanto, no reduciría los desplazamientos en los nudos de la estructura

e) Si, además de la carga anterior, la barra 4 sufriera un incremento de temperatura de 40 ºC, ¿qué desplazamientos aparecerían en los nudos?




$\alpha$=12*10$^{-6}$ ºC-1

E = 30 × 10$^{6}$ psi

A = 1.5 in$^{2}$ for each member

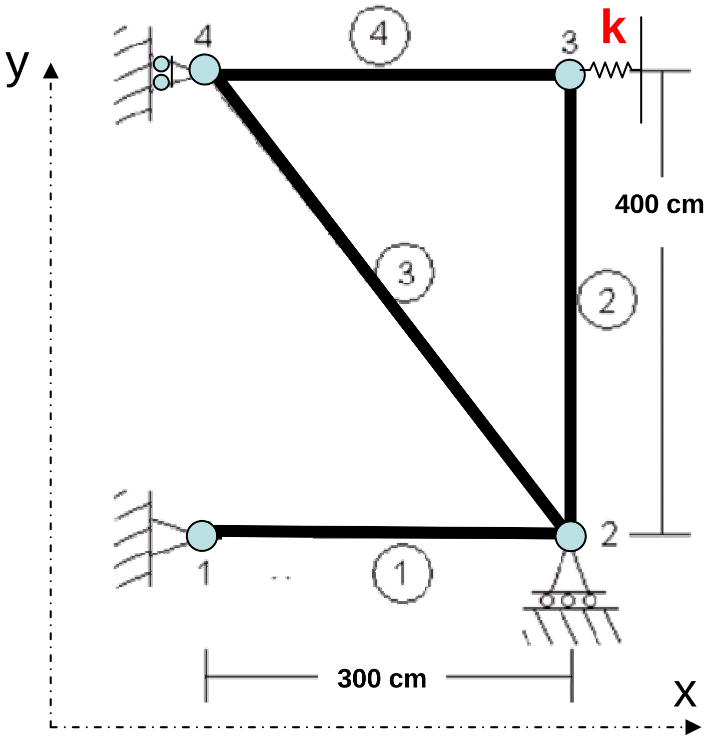
Fig. 2

$$F = EA\alpha\Delta T = 200\cdot10^{9}\cdot2{,}25\cdot10^{-4}\cdot12\cdot10^{-6}\cdot40 = 21600N$$

$$u := Kred^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4000 \\ 21600 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.193 \times 10^{-4} \\ 1.44 \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

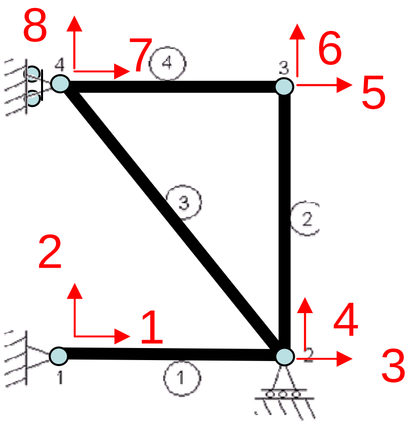
Nótese que aparecería un desplazamiento horizontal en el nudo 3 que, en este problema, que coincide con el desplazamiento debido a la dilatación lineal de la barra 4

f) Obtener los desplazamientos en los nudos en el caso anterior suponiendo que la ligadura del nudo 4 permitiera el desplazamiento vertical de dicho nudo y que en el nudo 3 se coloca un resorte horizontal de constante k=EA/L, siendo L=6 m.



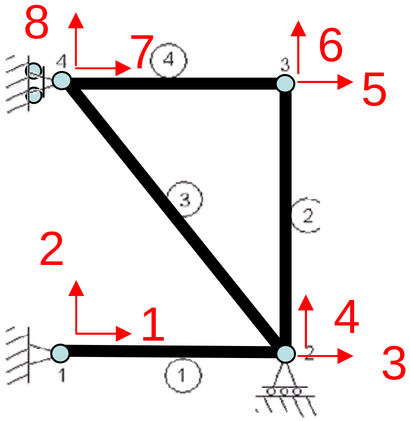

$k=200*10^9 .\ 2{,}25*10^{-4}/6=75*10^5$ N/m

Nueva matriz de rigidez (Nótese que el resorte actúa en el gdl 5):




$$
K := \begin{pmatrix}
K1_{1,1} & K1_{1,2} & K1_{1,3} & K1_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K1_{2,1} & K1_{2,2} & K1_{2,3} & K1_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K1_{3,1} & K1_{3,2} & K1_{3,3} + K2_{1,1} + K3_{1,1} & K1_{3,4} + K2_{1,2} + K3_{1,2} & K2_{1,3} & K2_{1,4} & K3_{1,3} & K3_{1,4} \\
K1_{4,1} & K1_{4,2} & K1_{4,3} + K2_{2,1} + K3_{2,1} & K1_{4,4} + K2_{2,2} + K3_{2,2} & K2_{2,3} & K2_{2,4} & K3_{2,3} & K3_{2,4} \\
0 & 0 & K2_{3,1} & K2_{3,2} & K2_{3,3} + K4_{1,1} + k & K2_{3,4} + K4_{1,2} & K4_{1,3} & K4_{1,4} \\
0 & 0 & K2_{4,1} & K2_{4,2} & K2_{4,3} + K4_{2,1} & K2_{4,4} + K4_{2,2} & K4_{2,3} & K4_{2,4} \\
0 & 0 & K3_{3,1} & K3_{3,2} & K4_{3,1} & K4_{3,2} & K3_{3,3} & K3_{3,4} \\
0 & 0 & K3_{4,1} & K3_{4,2} & K4_{4,1} & K4_{4,2} & K3_{4,3} & K3_{4,4}
\end{pmatrix}
$$

Obtención de la matriz de rigidez reducida:




$$K := \begin{pmatrix}
K1_{1,1} & K1_{1,2} & K1_{1,3} & K1_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K1_{2,1} & K1_{2,2} & K1_{2,3} & K1_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K1_{3,1} & K1_{3,2} & K1_{3,3} + K2_{1,1} + K3_{1,1} & K1_{3,4} + K2_{1,2} + K3_{1,2} & K2_{1,3} & K2_{1,4} & K3_{1,3} & K3_{1,4} \\
K1_{4,1} & K1_{4,2} & K1_{4,3} + K2_{2,1} + K3_{2,1} & K1_{4,4} + K2_{2,2} + K3_{2,2} & K2_{2,3} & K2_{2,4} & K3_{2,3} & K3_{2,4} \\
0 & 0 & K2_{3,1} & K2_{3,2} & K2_{3,3} + K4_{1,1} \; \mathbf{+k} & K2_{3,4} + K4_{1,2} & K4_{1,3} & K4_{1,4} \\
0 & 0 & K2_{4,1} & K2_{4,2} & K2_{4,3} + K4_{2,1} & K2_{4,4} + K4_{2,2} & K4_{2,3} & K4_{2,4} \\
0 & 0 & K3_{3,1} & K3_{3,2} & K4_{3,1} & K4_{3,2} & K3_{3,3} & K3_{3,4} \\
0 & 0 & K3_{4,1} & K3_{4,2} & K4_{4,1} & K4_{4,2} & K3_{4,3} & K3_{4,4}
\end{pmatrix}$$

$$Kred = \begin{pmatrix} 1.824\times 10^{7} & 0 & -6.888\times 10^{-10} & 4.32\times 10^{6} \\ 0 & 2.25\times 10^{7} & -1.148\times 10^{-9} & 1.837\times 10^{-9} \\ -6.888\times 10^{-10} & -1.148\times 10^{-9} & 1.125\times 10^{7} & 0 \\ 4.32\times 10^{6} & 1.837\times 10^{-9} & 0 & 5.76\times 10^{6} \end{pmatrix}$$

Desplazamientos en los GDL's

$$u := Kred^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4000 \\ 21600 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2.667\times 10^{-4} \\ 9.6\times 10^{-4} \\ 0 \\ -2\times 10^{-4} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{GDL 3} \\ \text{GDL 5} \\ \text{GDL 6} \\ \text{GDL 8} \end{array} \end{array}$$