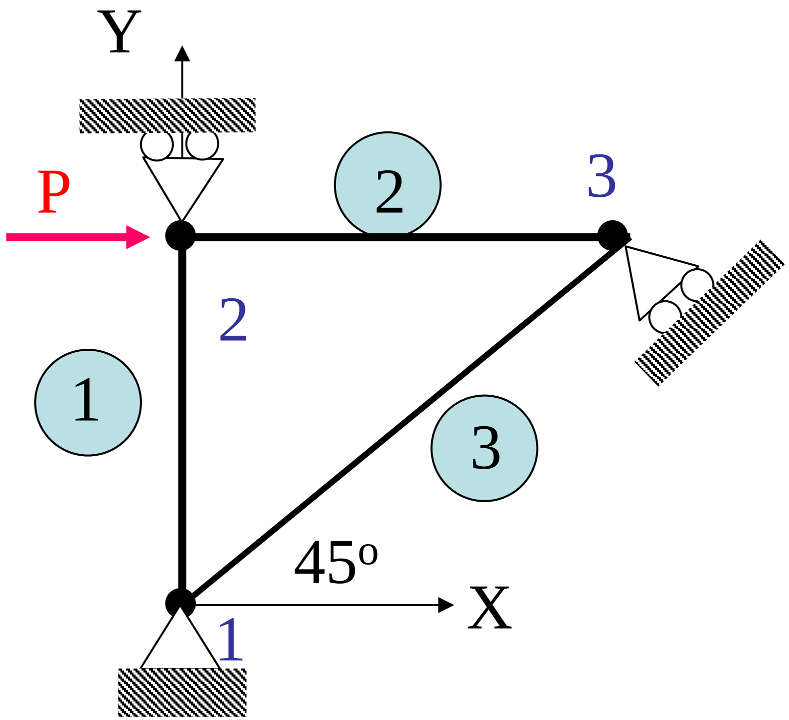
Determinar los desplazamientos y reacciones en la estructura articulada de la figura



$P = 1000$ kN,

L=longitud de los elementos 1 y 2 = 1m

$E = 210$ GPa

$A = 6 \times 10^{-4} m^2$ para los elementos 1 y 2

$= 6\sqrt{2} \times 10^{-4}\ m^2$ para el elemento 3

Solución

Paso 1: Tabla de conectividades

ELEMENTO	Nudo 1	Nudo 2
1	1	2
2	2	3
3	1	3

Tabla de coordenadas nodales

Nudo	x	y
1	0	0
2	0	L
3	L	L

Tabla de cosenos directores de cada barra

ELEMENTO	Longitud	$l = \frac{x_2 - x_1}{longitud}$	$m = \frac{y_2 - y_1}{longitud}$
1	L	0	1
2	L	1	0
3	$L\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

Paso 2: Matriz de rigidez de cada barra (coordenadas globales)

Matriz de rigidez del elemento 1

$$[K]^{(1)} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(210\times10^{9})(6\times10^{-4})}{1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \color{red}{u_{1X}} & \color{red}{u_{1Y}} & \color{red}{u_{2X}} & \color{red}{u_{2Y}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \color{red}{u_{1X}} \\ \color{red}{u_{1Y}} \\ \color{red}{u_{2X}} \\ \color{red}{u_{2Y}} \end{array}$$

Matriz de rigidez del elemento 2

$$
[K]^{(2)} = \frac{(210\times10^{9})(6\times10^{-4})}{1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} u_{2X} & u_{2Y} & u_{3X} & u_{3Y} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ u_{2X} \\ u_{2Y} \\ u_{3X} \\ u_{3Y} \end{array}
$$

Matriz de rigidez del elemento 3

$$
[K]^{(3)} = \frac{(210\times10^{9})(6\sqrt{2}\times10^{-4})}{\sqrt{2}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} u_{1X} & u_{1Y} & u_{3X} & u_{3Y} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ u_{1X} \\ u_{1Y} \\ u_{3X} \\ u_{3Y} \end{array}
$$

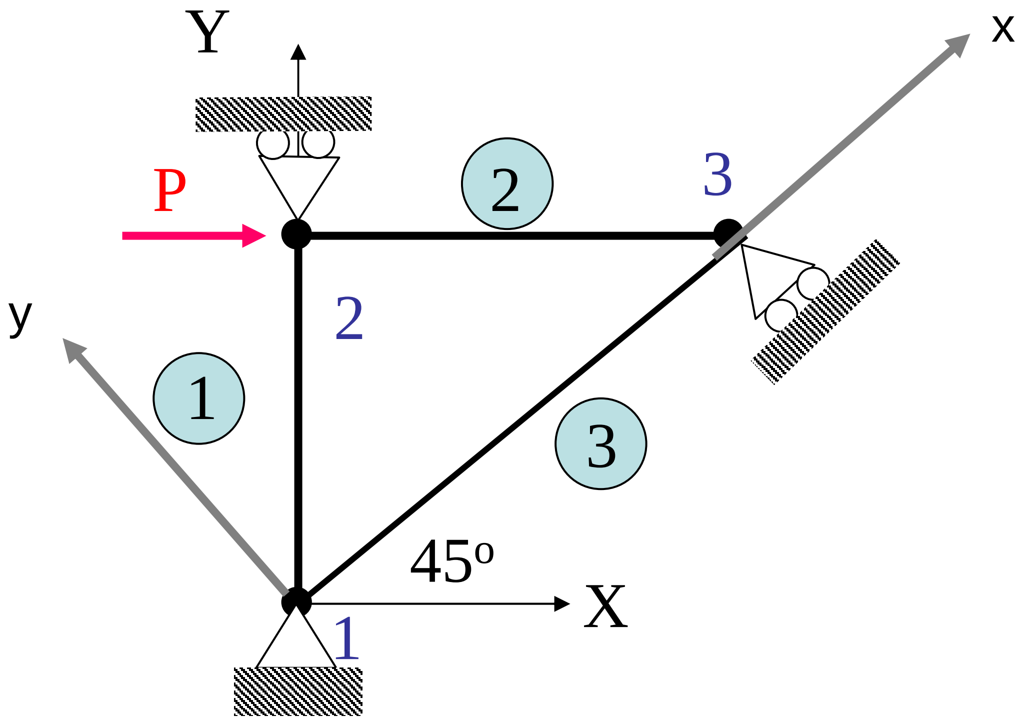
Paso 3: Ensamblaje: obtención de la matriz de rigidez global

$$[K] = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & -1 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{N/m}$$

$$\{F\} = [K]\{u\} \qquad \text{Ec(1)}$$

Paso 4: Incorporación de las condiciones de contorno

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{2X} \\ 0 \\ u_{3X} \\ u_{3Y} \end{Bmatrix}$$

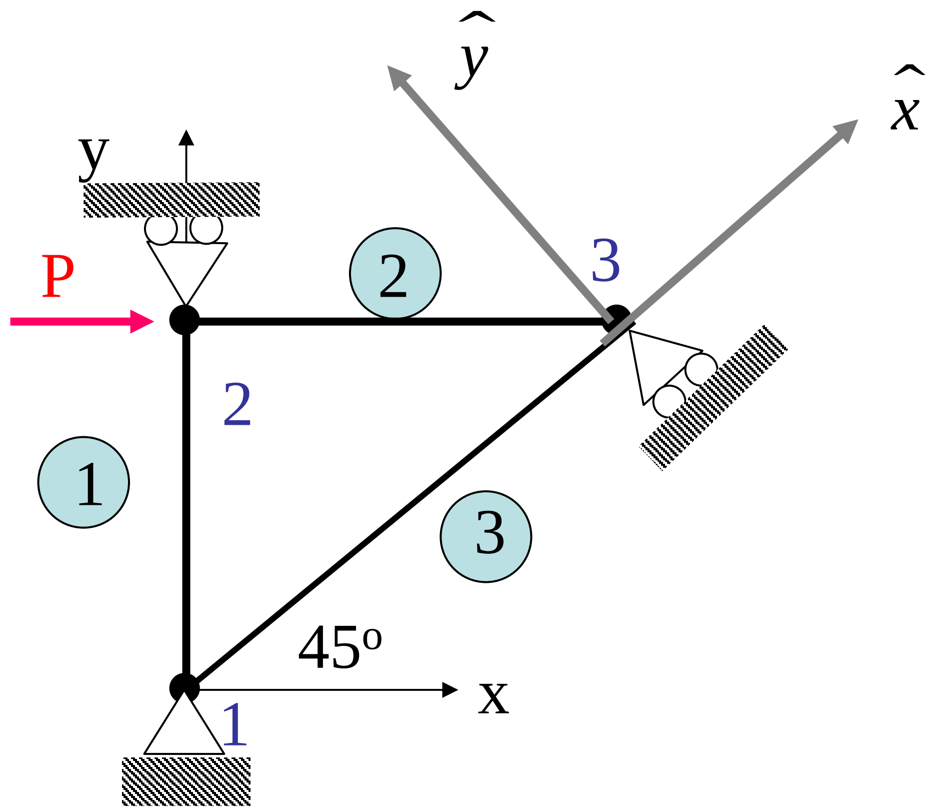


Adicionalmente:

$\boxed{u_y = 0}$ en el sistema de coordenadas locales del elemento 3

¿Cómo introducimos esta condición en ejes globales?

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ P \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$



Adicionalmente:

$\boxed{F_{3x} = 0}$ en el sistema de referencia local del elemento 3

¿Cómo introducimos esta condición en ejes globales?

Using coordinate transformations

$$\begin{Bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3X} \\ u_{3Y} \end{Bmatrix} \quad l = m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3X} \\ u_{3Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_{3X} + u_{3Y}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_{3Y} - u_{3X}\right) \end{Bmatrix}$$

$$u_{3y} = 0$$

$$\Rightarrow u_{3y'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_{3Y} - u_{3X}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(u_{3Y} - u_{3X}\right) = 0 \qquad \text{Ec (2)}$$

Similarly for the forces at node 3

$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} \quad l = m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(F_{3X} + F_{3Y}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(F_{3Y} - F_{3X}\right) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{F_{3x} = 0}$$

$$\Rightarrow F_{3y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(F_{3X} + F_{3Y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(F_{3X} + F_{3Y}\right) = 0 \qquad \text{Ec (3)}$$

Por tanto, tenemos las siguientes ecuaciones que se satisfacen simultáneamente:

$$\{F\} = [K]\{u\} \qquad \text{Ec (1)}$$

$$\left(u_{3Y} - u_{3X}\right) = 0 \qquad \text{Ec (2)}$$

$$\left(F_{3X} + F_{3Y}\right) = 0 \qquad \text{Ec (3)}$$

Introduciendo las condiciones de contorno, la Ec (1) se transforma en:

$$1260 \times 10^{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2X} \\ u_{3X} \\ u_{3Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

¡Tenemos cinco ecuaciones con cinco incógnitas!

Escribiendo estas ecuaciones explícitamente:

$$1260 \times 10^5 \left(u_{2Y} - u_{3X}\right) = P \qquad \text{Ec (4)}$$

$$1260 \times 10^5 (-u_{2X} + 1.5 u_{3X} + 0.5 u_{3Y}) = F_{3X} \qquad \text{Ec (5)}$$

$$1260 \times 10^5 (0.5 u_{3X} + 0.5 u_{3Y}) = F_{3Y} \qquad \text{Ec (6)}$$

Sumando las Ecs. (5) y (6):

$$1260 \times 10^5 (-u_{2X} + 2 u_{3X} + u_{3Y}) = F_{3X} + F_{3Y} = 0 \quad \text{usando Ec (3)}$$

$$\Rightarrow 1260 \times 10^5 (-u_{2X} + u_{3X}) = 0 \quad \text{usando Ec(2)}$$

$$\Rightarrow u_{2X} = 3 u_{3X} \quad \text{Ec (7)}$$

Introduciendo ésta en Ec (4)

$$\Rightarrow 1260 \times 10^5 (3 u_{3X} - u_{3X}) = P$$

$$\Rightarrow 2520 \times 10^5 u_{3X} = 10^6$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Rightarrow \quad u_{3X} = 0.003968\,m\\ &u_{2X} = 3\,u_{3X} = 0.0119\,m\end{aligned}}$$

Las reacciones son:

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{1Y} \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^{5} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2X} \\ u_{3X} \\ u_{3Y} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -500 \\ -500 \\ 0 \\ -500 \\ 500 \end{Bmatrix} kN$$