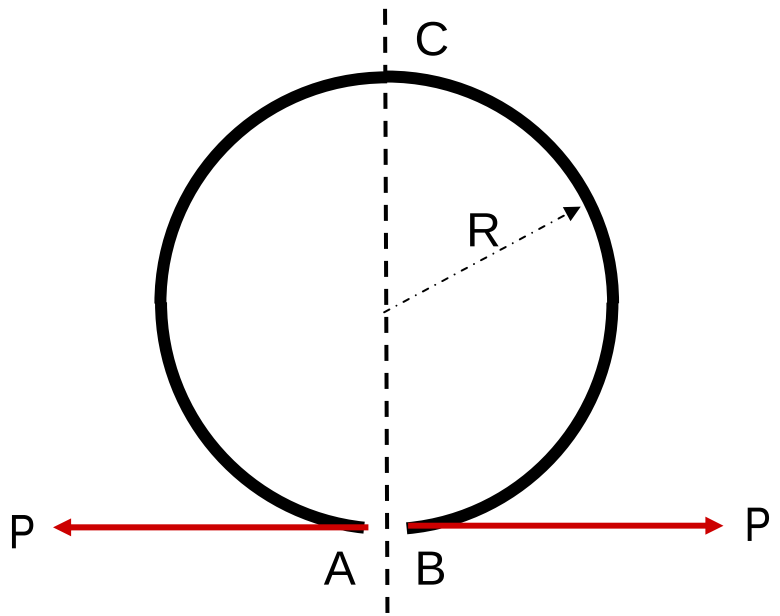
El anillo de la figura de radio R se encuentra abierto, tal como se muestra en la figura, de manera que la distancia entre sus secciones A y B es despreciable frente a R. Supuesto conocido el producto EI del anillo, Determinar:

a) la separación que se produce entre las secciones A y B cuando se aplican, en dichas secciones, las carga P que se representan en la figura.

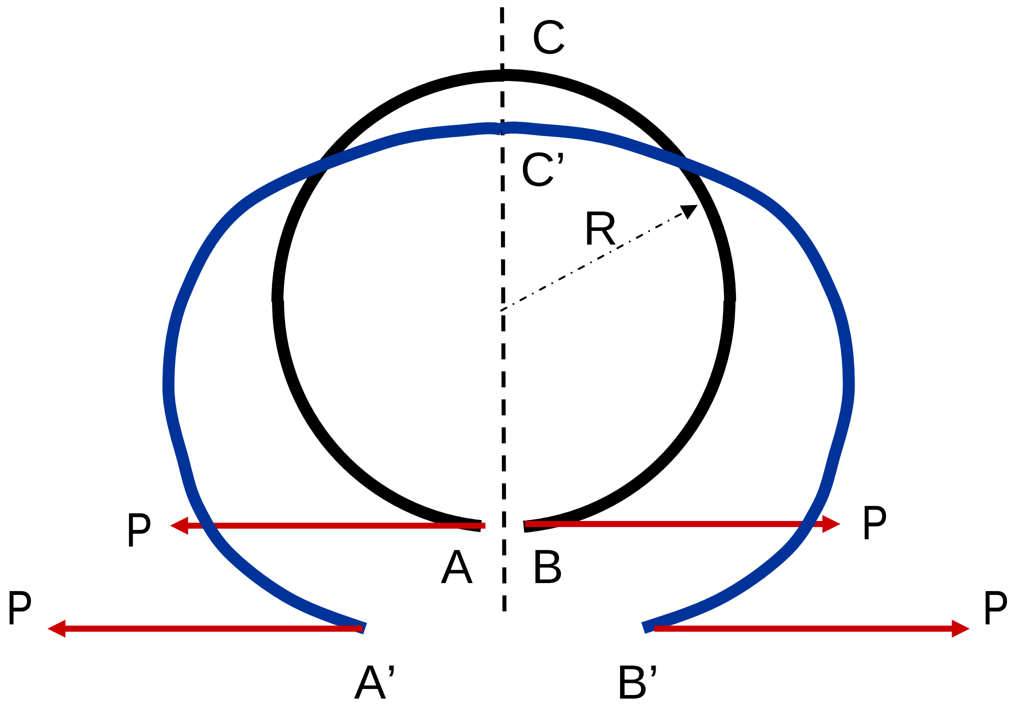
b) la variación del diámetro vertical que experimenta el anillo para el estado de carga anterior.



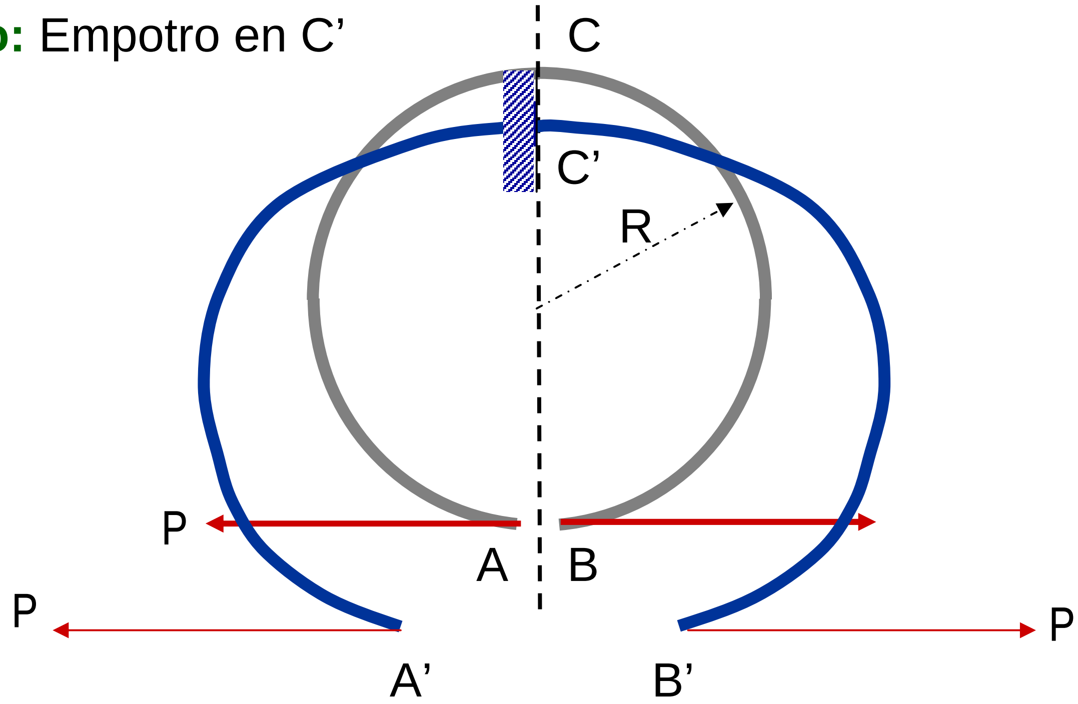
NOTA: $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1-\cos\theta)^2\cdot d\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1-\cos\theta)\cdot sen\theta\cdot d\theta=2$

Por simetría, la sección C se desplaza a C' sufriendo un desplazamiento vertical sin giro

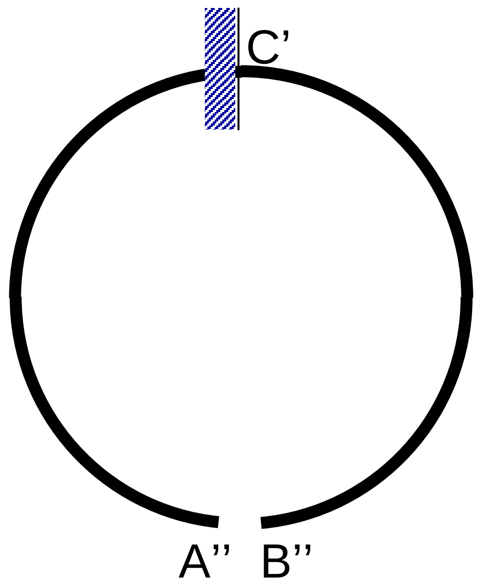
Primer paso: Deformo la estructura, teniendo en cuenta que la sección C pasa a C' desplazándose solamente en vertical y sin girar (por simetría de la estructura)



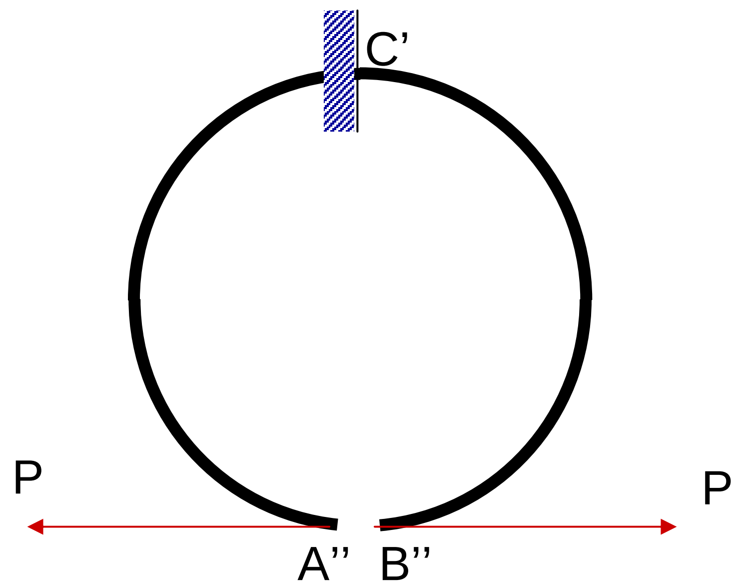
Segundo paso: Empotro en C’



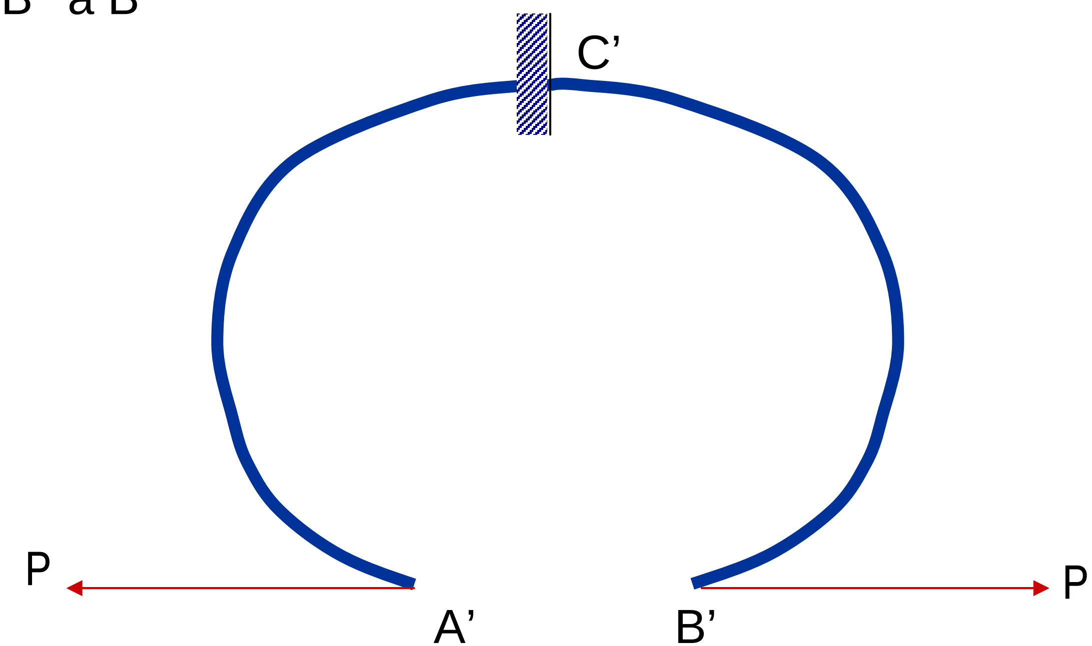
y retiramos todas las cargas que actúen la estructura

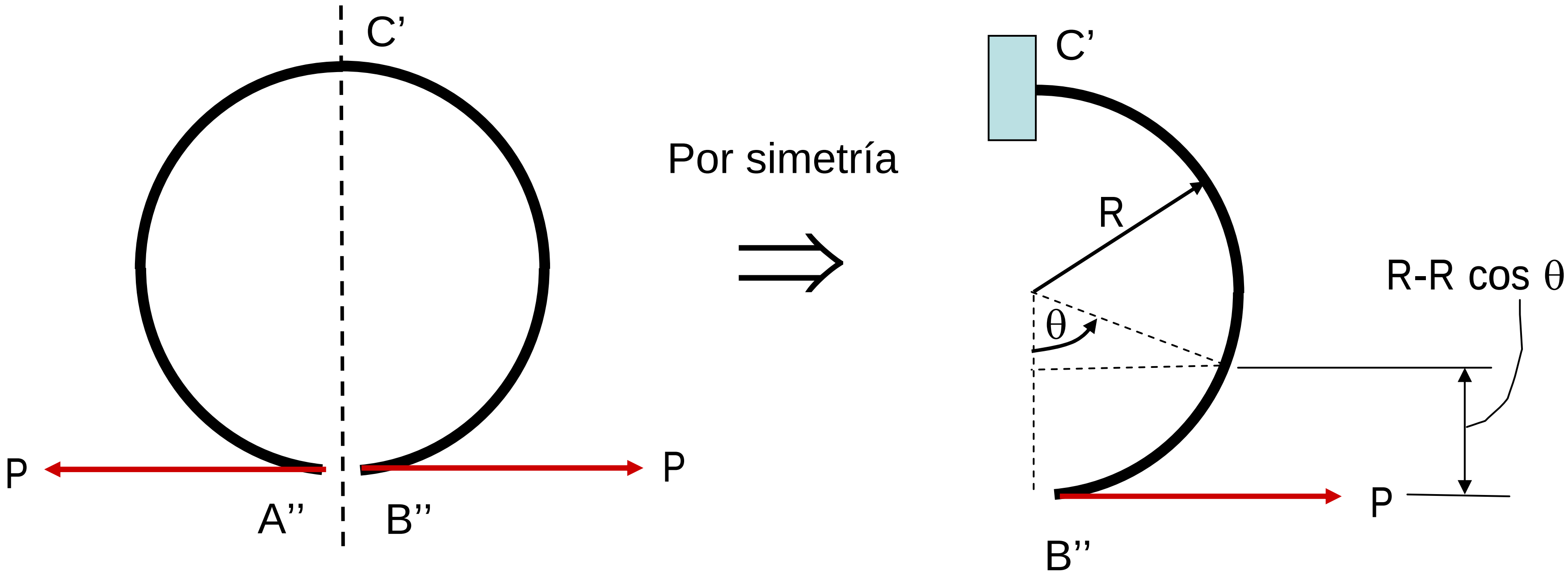


Tercer paso: Si sobre la estructura A’’C’B’’, volviéramos a colocar las cargas actuantes,



A’’ pasaría a A’ y B’’ a B’’





$$M(\theta) = P\,(R - R\cos\theta) = PR\,(1 - \cos\theta)$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{B''} = \frac{1}{\boldsymbol{EI}}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \boldsymbol{M}\cdot\frac{\boldsymbol{dM}}{\boldsymbol{dP}}\cdot \boldsymbol{R}d\theta$$

M(θ) = P (R – R cos θ) = PR (1 – cos θ)

$$\frac{dM}{dP} = R\left(1 - \boldsymbol{cos}\,\theta\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{B}''} = \frac{1}{\boldsymbol{EI}}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \boldsymbol{M} \cdot \frac{\boldsymbol{dM}}{\boldsymbol{dP}} \cdot \boldsymbol{Rd}\theta = \frac{1}{\boldsymbol{EI}}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \boldsymbol{PR}\left(1-\cos\theta\right)\cdot \boldsymbol{R}\left(1-\cos\theta\right)\cdot \boldsymbol{Rd}\theta =$$

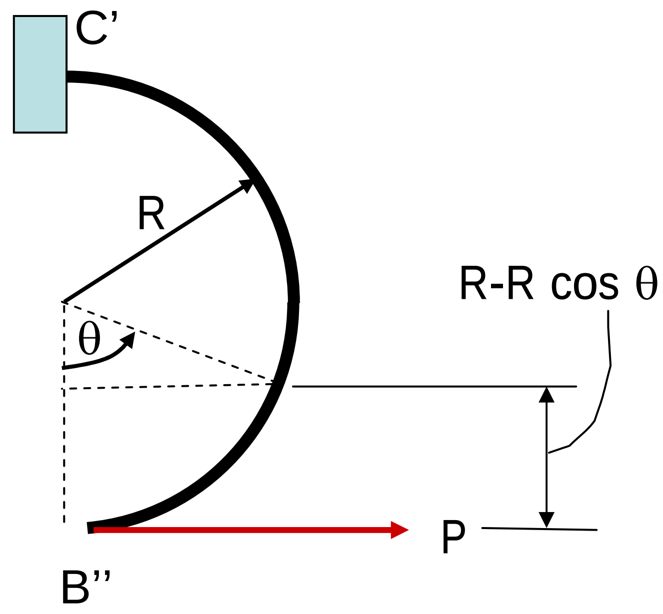
$$= \frac{\boldsymbol{PR}^3}{\boldsymbol{EI}}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(1-\cos\theta\right)^2 \cdot \boldsymbol{d}\theta = \frac{3\pi\boldsymbol{PR}^3}{2\boldsymbol{EI}}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{B}''} = \frac{3\pi\boldsymbol{PR}^3}{2\boldsymbol{EI}}}$$

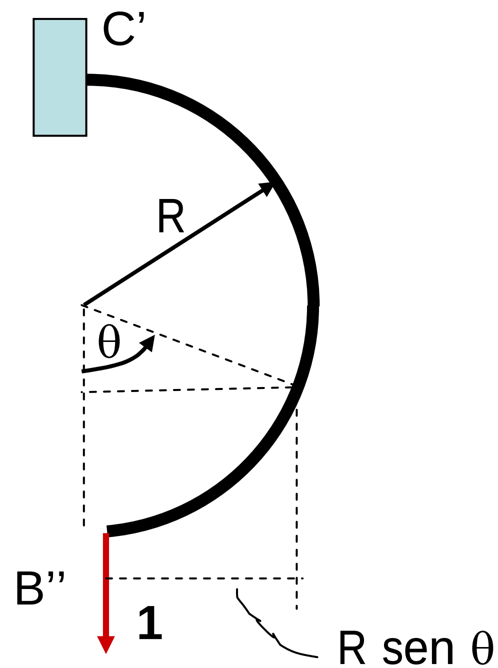
La separación d que experimentan las secciones A y B será:

$$\boxed{\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{B}''} = \frac{3\pi\boldsymbol{PR}^3}{\boldsymbol{EI}}}$$

Variación del diámetro vertical



Estado real



Estado auxiliar

$$M^0 = PR\,(1 - \cos\theta)$$

$$M^I = R\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$v_{B''} \downarrow = \frac{1}{EI}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} M^0 \cdot M^I \cdot R d\theta = \frac{1}{EI}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} PR(1-\cos\theta)\cdot R sen\theta \cdot R d\theta =$$

$$= \frac{PR^3}{EI}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (1-\cos\theta)\cdot sen\theta \cdot d\theta = \frac{2PR^3}{EI}$$

$$\boxed{v_{B''} \downarrow = \frac{2PR^3}{EI}}$$

La variación del diámetro vertical coincidirá con $v_{B''}$