La estructura de la figura está formada por el arco semicircular **AB** y la barra **BC** que se unen por medio de la rótula **B**. El punto **A** se encuentra empotrado y el punto **C** apoyado. La rigidez a flexión del arco y de la barra toma el valor **EI=**80 MN·m^2, el coeficiente de dilatación térmica de la estructura es igual a =10^{-4} ºC^{-1}, y el canto **c** de la barra **BC** toma el valor de 20 cm. Si la estructura está sometida a una carga puntual P=20 kN en la rótula **B** y a un incremento de temperatura y en la barra **BC,** y despreciando los desplazamientos por axil y cortante, se pide:

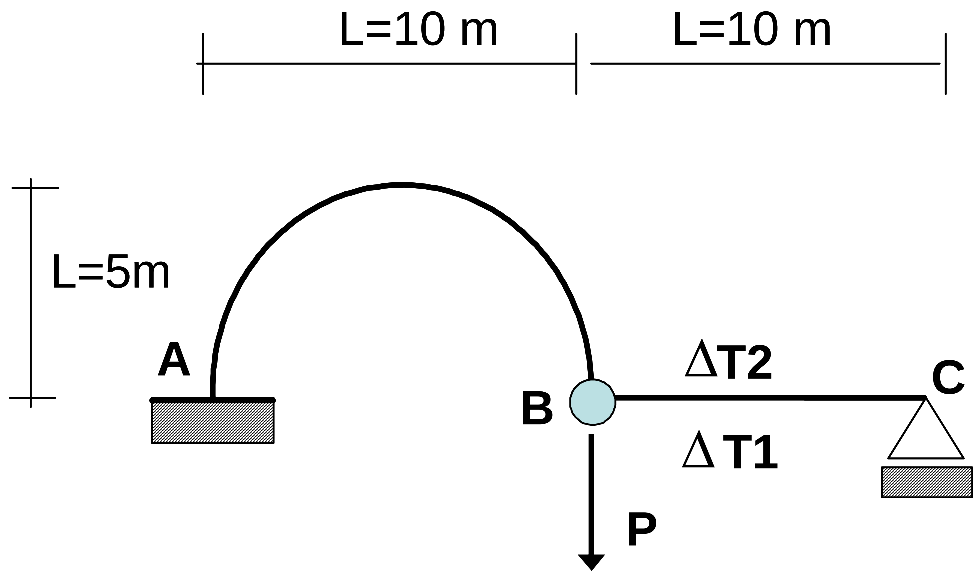
a) Grado de hiperestatismo de la estructura indicando la metodología a seguir en la resolución, incógnita/s hiperestática/s si las hubiera, y la/s ecuación/es de compatibilidad empleada/s si fueran necesarias.

b) Reacciones en los apoyos A y C.

c) Diagrama de flectores en la estructura.

d) Movimiento horizontal y vertical del punto B y giro en el apoyo C.

e) Para la misma estructura y carga térmica, si la carga P se incrementa en 5 kN, calcule el incremento en el desplazamiento horizontal del punto B respecto del calculado en el apartado d).

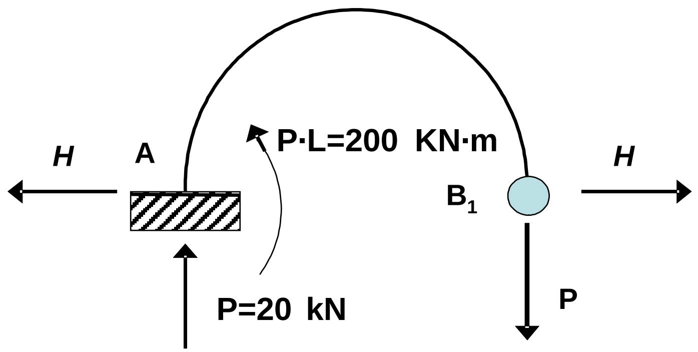


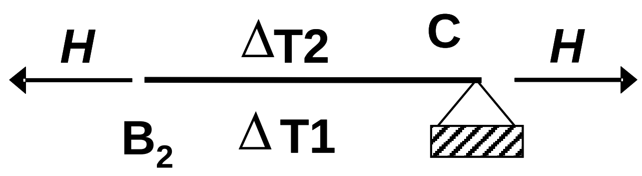
Grado de Hiperestatismo

GH=GHE+GHI =1 GHE=CE-GDLE=5-3=2;GHI=CI-GDLI=$1{\cdot}2{\cdot}(2-1)-3{\cdot}(2-1)=-1$

La incógnita hiperestática es la componente horizontal de la fuerza en la rótula , la vertical en la rótula es nula por ser nulo el momento en C. se determina imponiendo que:

$$\overleftarrow{u_{B1}} = \overleftarrow{u_{B2}} \qquad [1]$$





$$\overleftarrow{u_{B2}} = \frac{\alpha\cdot(\Delta T2+\Delta T1)\cdot L}{2} = 0{,}025m$$

Reacciones en los apoyos A y C.

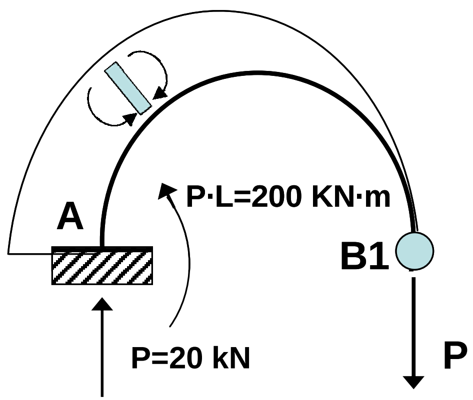
$$V_A = 20 \ kN$$

$$M_A = 200 \ kN \cdot m$$

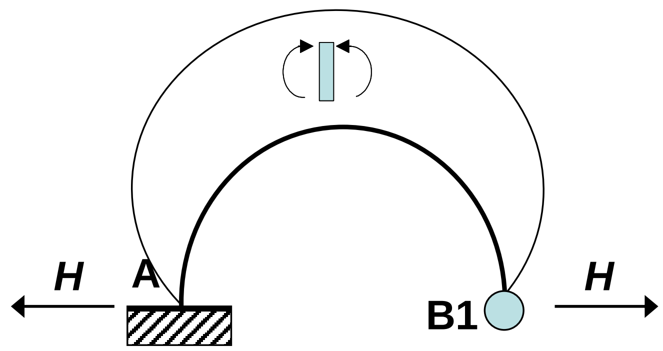
$$H_A = H_C = H$$

$$V_C = 0$$

Aplicando superposición de las cargas P y H en la parte izquierda:



Estado I

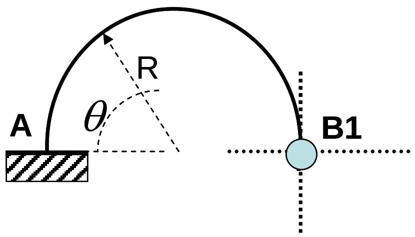


Estado II

$$M_I(\theta) = P \cdot L - P \cdot R(1 - \cos\theta)$$

$$M_{II}(\theta) = H \cdot R \cdot sen\theta)$$

Estado I



$$\overleftarrow{u_{B1}} = \frac{\int_0^{\pi} M_I(\theta)\cdot R^2 \cdot sen\theta \,\mathrm{d}\theta}{EI} = \frac{\int_0^{\pi} \left[P\cdot L - P\cdot R(1-\cos\theta)\right] R^2 \cdot sen\theta \,\mathrm{d}\theta}{EI} = \frac{2\cdot R^3 \cdot P}{EI}$$

$$\downarrow v_{B1} = \frac{\int_0^{\pi} M_I(\theta)\cdot R^2 \cdot (1+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta}{EI} = \frac{\int_0^{\pi} \left[P\cdot L - P\cdot R(1-\cos\theta)\right] R^2 (1+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta}{EI} =$$

$$= \frac{3\cdot R^3 \cdot P\cdot \pi}{2EI}$$

Estado II

$$\vec{u}_{B1} = \frac{\int_0^{\pi} M_{II}(\theta)\cdot R^2 \cdot sen\theta \, \mathrm{d}\theta}{EI} = \frac{\int_0^{\pi} \left[\mathrm{H}\cdot \mathrm{R}\cdot \mathrm{sen}\theta\right] R^2 \cdot sen\theta \, \mathrm{d}\theta}{EI} = \frac{\pi \cdot R^3 \cdot H}{2\cdot EI}$$

$$\overset{\uparrow}{v}_{B1} = \frac{\int_0^{\pi} M_{II}(\theta)\cdot R^2 \cdot (1+\cos\theta)\, \mathrm{d}\theta}{EI} = \frac{\int_0^{\pi} \left[H\cdot R\cdot sen(\theta)\right] R^2 (1+\cos\theta)\, \mathrm{d}\theta}{EI} = \frac{2\cdot R^3 \cdot H}{EI}$$

Aplicando compatibilidad:

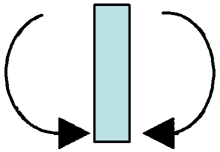
$$\overset{\leftarrow}{u}_{B1} = \overset{\leftarrow}{u}_{B2}$$

$$0{,}025 = \frac{2\cdot R^3 \cdot P}{EI} - \frac{\pi \cdot R^3 \cdot H}{2\cdot EI} \Rightarrow H = 15{,}28 \ kN$$

Y el desplazamiento vertical de B (Estado I+ Estado II):

$$\overset{\downarrow}{v}_{B1} = \frac{3\cdot R^3 \cdot P \cdot \pi}{2EI} - \frac{2\cdot R^3 \cdot H}{EI} = 0{,}099m$$

Diagrama de momentos flectores en la estructura.



$$M(\theta) = P\cdot L - P\cdot R(1-\cos\theta) - H\cdot R\cdot sen(\theta) =$$

$$= 200 - 100(1-\cos\theta) - 76{,}35\cdot sen(\theta)\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$M(0) = 200 kN\cdot m$$

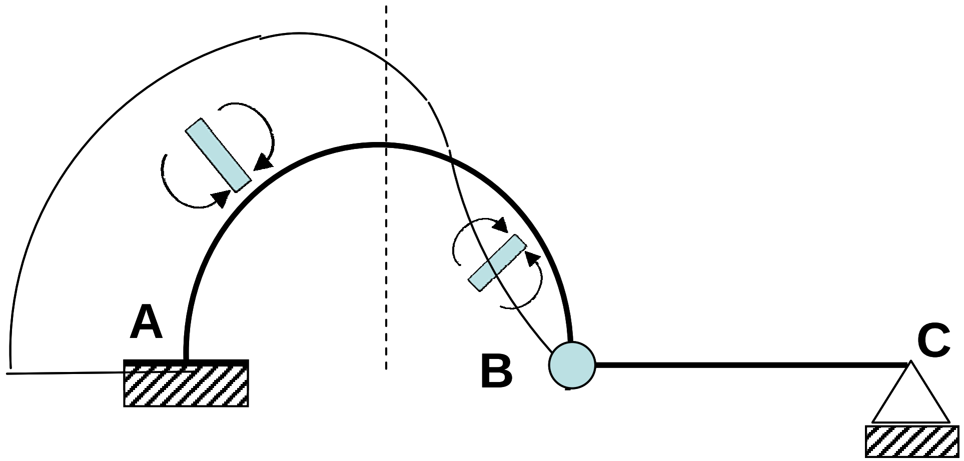
$$M(\pi/4) = 116{,}7 kN\cdot m$$

$$M(\pi/2) = 23{,}65 kN\cdot m$$

$$M(7\pi/12) = 0 kN\cdot m$$

$$M(4\pi/5) = -25{,}8 kN\cdot m$$

$$M(\pi) = 0 kN\cdot m$$



Giro en C.

$$\overset{\leftarrow}{u}_B = \frac{\alpha \cdot (\Delta T2 + \Delta T1) \cdot L}{2} = 0{,}025m$$

$$\overset{\downarrow}{v}_B = \frac{3 \cdot R^3 \cdot P \cdot \pi}{2EI} - \frac{2 \cdot R^3 \cdot H}{EI} = 0{,}099m$$

$$\overset{\downarrow}{v}_B = 0{,}099m = \overset{\leftarrow}{\theta}_c \cdot L + \int_0^L \frac{\alpha(\Delta T2 - \Delta T1)(L-x)dx}{c} = \overset{\leftarrow}{\theta}_c \cdot L + \frac{\alpha(\Delta T2 - \Delta T1)L^2}{2 \cdot c}$$

$$\overset{\rightarrow}{\theta}_c = 0{,}241\,\mathrm{rad}$$

Desplazamiento en B. Tal y como se expuso en el apartado a) el desplazamiento horizontal en B solo depende del valor de la carga térmica y no del valor de P. El incremento de desplazamiento es nulo.