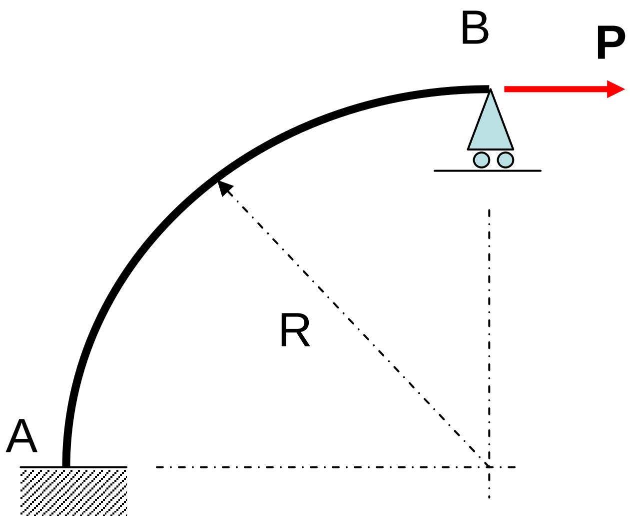
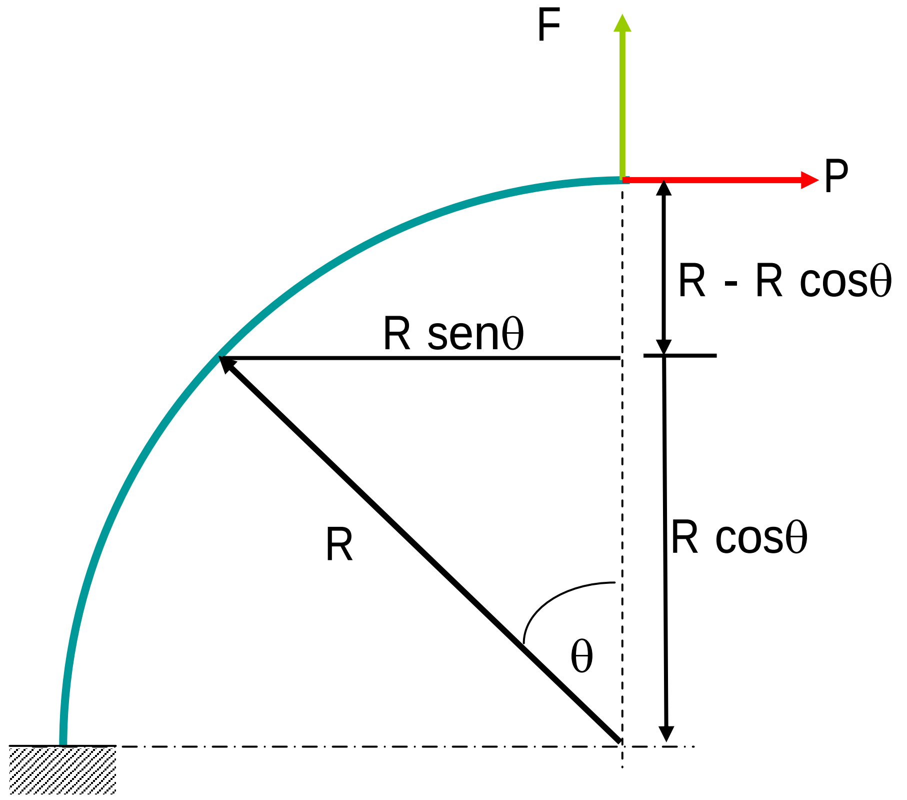
Sea una barra curva, que corresponde a un cuadrante circular de radio R=150 mm, y que posee una sección circular de 8 mm de diámetro. Su sección A se encuentra empotrada mientras que su sección B sólo puede desplazarse horizontalmente. Sobre la estructura actúa una fuerza P de 200 N tal como se indica en la figura y que se aplica gradualmente desde un valor nulo hasta su valor final de 200N. Determinar:

a) La reacción en B
b) El desplazamiento horizontal que experimenta B
c) Máxima tensión de flexión que aparece en la pieza

NOTA: Módulo de elasticidad del material: 200 GPa



Sustituimos el apoyo en B por la reacción vertical F y obtenemos el momento flector en una sección genérica definida por el ángulo θ



$$M(\theta) = P\,(R - R\cos\theta) - F\,R\,\mathrm{sen}\,\theta$$

La condición a imponer, para calcular F esque el desplazamiento vertical de B es nulo:

$$\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} M\frac{\delta M}{\delta F}R\,d\theta = 0$$

$$M(\theta) = P\,(R - R\cos\theta) - F\,R\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\delta M}{\delta F} = -R\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}\left[PR(1 - \cos\theta) - FR\,\mathrm{sen}\,\theta\right](-R\,\mathrm{sen}\theta)R\,d\theta = 0$$

$$\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}\left[-PR^3\mathrm{sen}\theta + PR^3\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{Cos}\,\theta + FR^3\mathrm{sen}^2\,\theta\right]d\theta = 0$$

$$\frac{R^3}{EI}\int_0^{\pi/2}\left[P(-\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{Cos}\,\theta) + F(\mathrm{sen}^2\,\theta)\right]d\theta = 0$$

$$\frac{R^3}{EI}\left[P\left(\cos\theta-\frac{\cos 2\theta}{4}\right)+F\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\text{sen } 2\theta}{4}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$\frac{R^3}{EI}\left\{\left[P\left(\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\cos\pi}{4}\right)+F\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\text{sen }\pi}{4}\right)\right]-\right.$$

$$\left.\left[P\left(\cos 0-\frac{\cos 0}{4}\right)+F\left(\frac{0}{2}-\frac{\text{sen } 0}{4}\right)\right]\right\}=0$$

$$\frac{R^3}{EI}\left\{\left[P\left(0+\frac{1}{4}\right)+F\left(\frac{\pi}{4}-\frac{0}{4}\right)\right]-\left[P\left(1-\frac{1}{4}\right)+F\left(\frac{0}{2}-\frac{0}{4}\right)\right]\right\}=0$$

$$\frac{R^3}{EI}\left\{\left[\frac{1}{4}P+\frac{\pi}{4}F\right]-\left[\frac{3}{4}P+0\right]\right\}=0$$

$$\frac{R^3}{EI}\left[-\frac{1}{2}P+\frac{\pi}{4}F\right]=0$$

$R^3/EI \neq 0$

$$\therefore\left[-\frac{1}{2}P+\frac{\pi}{4}F\right]=0 \qquad \frac{\pi}{4}F=\frac{P}{2}$$

$$F=\frac{P}{2}\times\frac{4}{\pi}$$

$$F=\frac{2P}{\pi}$$

Desplazamiento horizontal de B:

$$\vec{u}_B = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} M \frac{\delta M}{\delta P} R\, d\theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = R - R\cos\theta$$

$$\vec{u}_B = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}\left[PR(1 - \cos\theta) - FR\operatorname{sen}\theta\right](R - R\cos\theta)R d\theta$$

$$\vec{u}_B = \frac{R^3}{EI}\int_0^{\pi/2}\left[P - 2P\cos\theta + P\cos^2\theta - F\operatorname{sen}\theta + F\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]d\theta$$

$$\vec{u}_B = \frac{R^3}{EI}\left[P\theta - 2P\operatorname{sen}\theta + P\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right) + F\cos\theta - F\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$\vec{u}_B = \frac{R^3}{EI}\left[P\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4} + 0\right) + F\left(0 + \frac{1}{4}\right) - \left\{P(0 - 0 + 0 + 0) + F\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right\}\right]$$

$$\vec{u}_B = \frac{R^3}{EI}\left[P\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right) + \frac{1}{4}F - \frac{3}{4}F\right]$$

Pero: $F = 2P/\pi$

$$\therefore \vec{u}_B = \frac{R^3}{EI}\left[P\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right) + \frac{1}{4} \times \frac{2P}{\pi} - \frac{3}{4} \times \frac{2P}{\pi}\right]$$

$$\vec{u}_B = \frac{PR^3}{EI}\left[\frac{3\pi}{4} - 2 - \frac{1}{\pi}\right]$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{200 \times 0{,}15^3}}{\mathbf{200 \times 10^9 \times 0{,}201 \times 10^{-9}}}\left[\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{4}} - \mathbf{2} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi}}\right] =$$

$$= \mathbf{0{,}0084 \times 0{,}0379 = 0{,}1592 \times 10^{-3}\ m} = \underline{\underline{\mathbf{0{,}1592\ mm}}}$$

La máxima tensión de flexión se determina a partir del máximo momento flector que se produzca:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} y_{max}}{I}$$

Para determinar el máximo momento flector 'M':

$$M_{AB} = PR\,(1 - \cos\theta) - F\,R \operatorname{sen}\theta$$

Cuando $\theta = 0$

$$M_0 = PR\,(1 - \cos 0) - F\,R \operatorname{sen} 0 = \underline{0}$$

Cuando $\theta = \pi/2$

$$M_{\pi/2} = PR\,(1 - \cos \pi/2\,) - F\,R \operatorname{sen} \pi/2$$

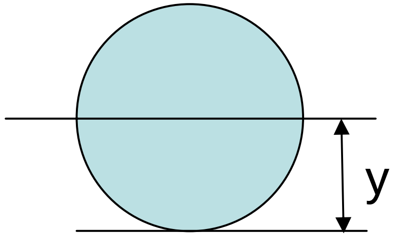
$$= PR\,(1 - 0) - F\,R = PR - FR$$

$$M_{\pi/2} = PR - (2P/\pi)R = \underline{10{,}9\ \text{Nm}}$$

Para determinar ‘I’:

$$I = \pi \times 0{,}004^4/4 = 0{,}20106 \times 10^{-9}\ m^4$$

Para determinar ‘y_{max}’.



D = 0,008 m

$$y = D/2 = 0{,}008/2 = 0{,}004\ m$$

$$\therefore \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{max}} = \frac{\mathbf{M}_{\mathbf{max}}\mathbf{y}_{\mathbf{max}}}{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{10{,}9 \times 0{,}004}}{\mathbf{0{,}20106 \times 10^{-9}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{max}} = \underline{\underline{216{,}85\ \mathbf{MPa}}}$$

TABLA DE INTEGRALES

$$\int \operatorname{sen} a\,\theta = -\frac{\cos a\,\theta}{a}$$

$$\int \cos a\,\theta = -\frac{\operatorname{sen} a\,\theta}{a}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}$$

$$\int \cos^2 \theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}$$

$$\int \operatorname{sen} \theta \cos \theta = -\frac{\cos 2\theta}{4}$$