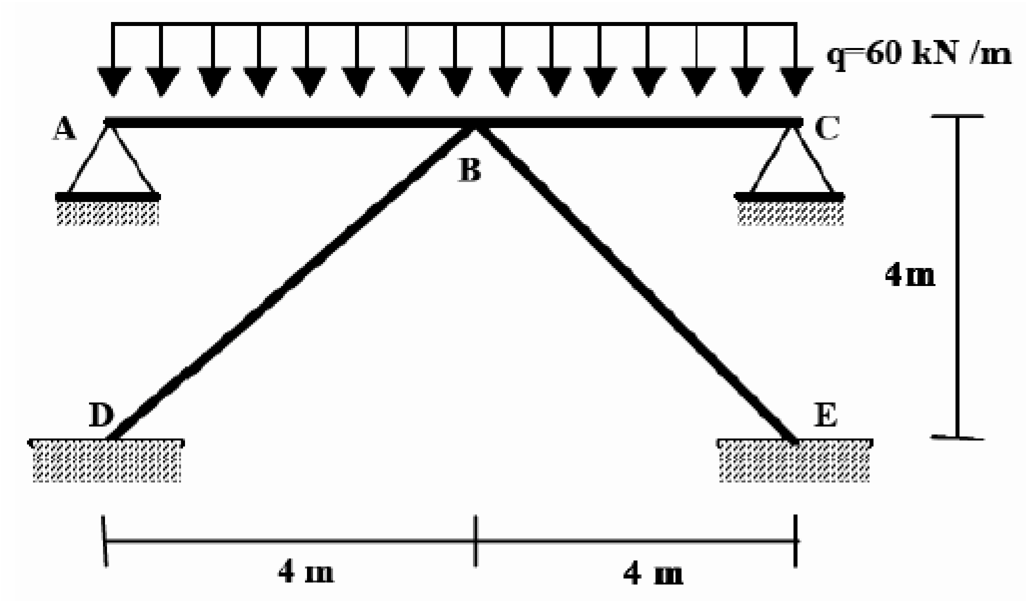
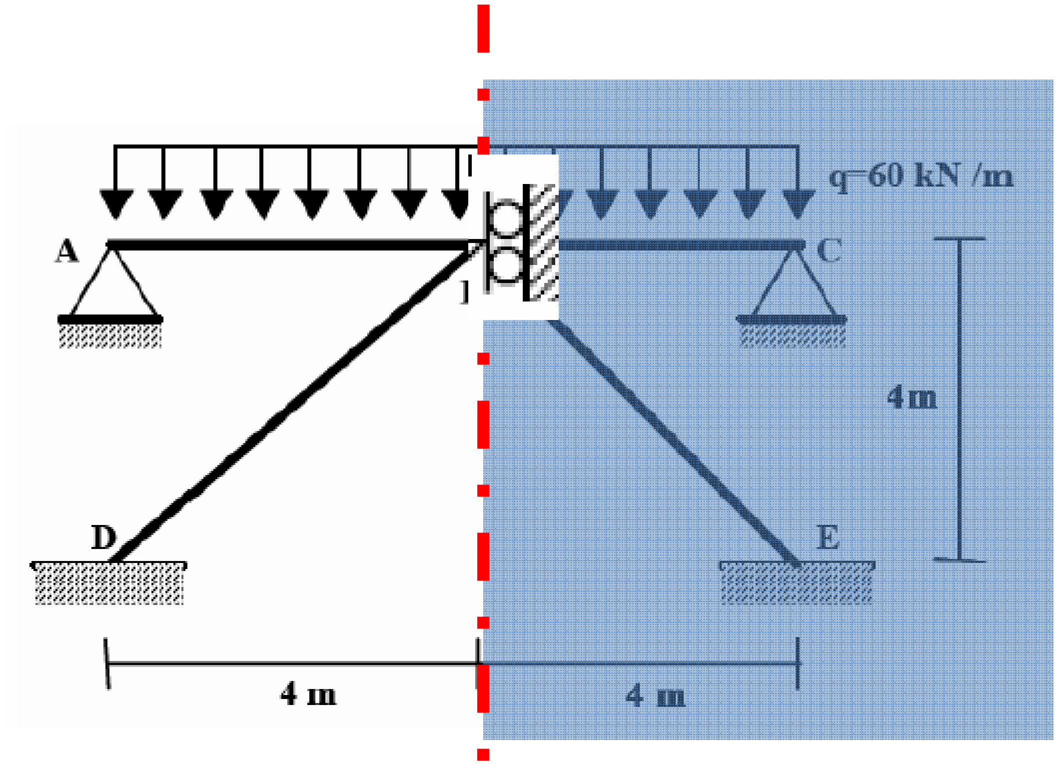
La estructura reticulada de la figura esta formada por barras de sección rectangular de 40 cm de ancho y 60 cm de canto y modulo de elasticidad E=20000 MPa. Teniendo en cuenta que sobre las barras AB y BC actúa una carga uniforme q=60 kN/m se pide obtener:

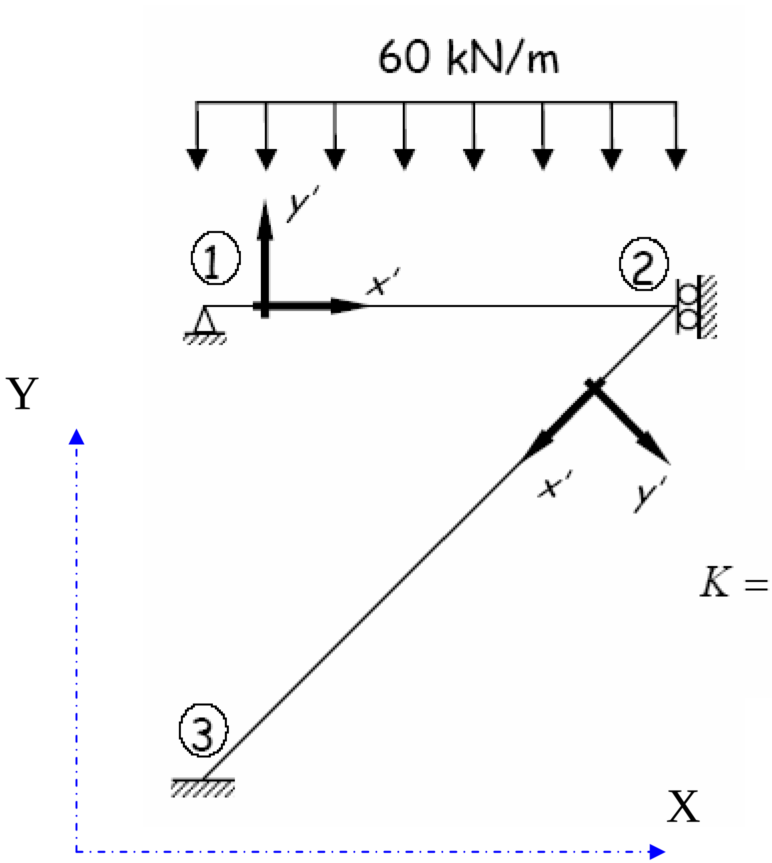
Utilizando técnicas matriciales, se pide obtener:

a) Expresión simbólica de la matriz de rigidez global de la estructura considerada indicando los términos ensamblados.
b) Movimientos del punto B.
c) Reacciones en los apoyos.
d) Esfuerzos en el punto A.




q=60 kN /m
A
C
1
4m
D
E
4 m
4 m

Dado que el problema es simétrico, resolvemos la mitad de la estructura: Para esta estructura (una vez aplicada la condición de simetría) la matriz ensamblada y el vector de movimientos resultarían ser:



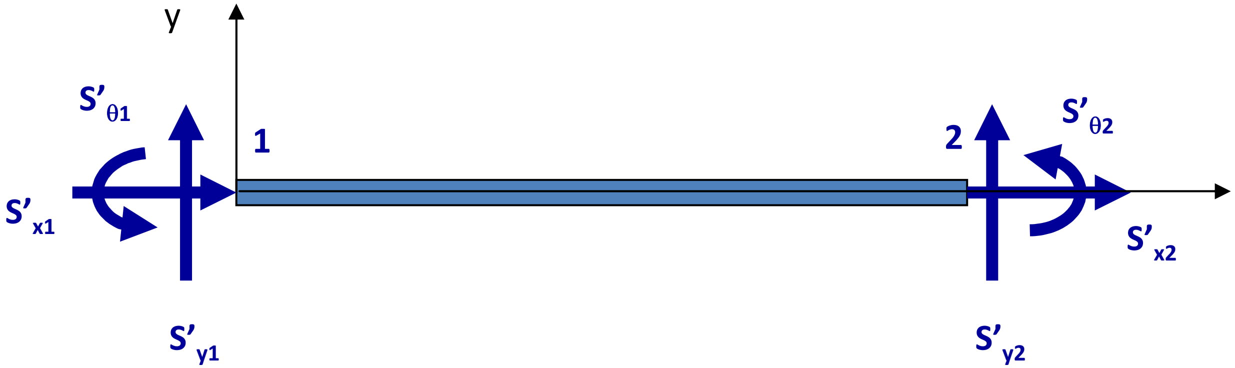

$$K = \begin{bmatrix} \boxed{(K_{11})_{12}} & (K_{12})_{12} & \Omega \\ (K_{21})_{12} & \boxed{(K_{22})_{12} + (K_{11})_{23}} & (K_{12})_{23} \\ \Omega & (K_{21})_{23} & (K_{22})_{23} \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\theta_1} \\ 0 \\ \boxed{v_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



A la hora de calcular los desplazamientos, sólo nos interesan las filas y columnas 3 y 5 de la matriz global, luego empiezo calculándome esas matrices primero

Matriz de rigidez de una barra biempotrada en coordenadas locales




$$[K']=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
E\frac{A}{L} & 0 & 0 & -E\frac{A}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12 E I}{L^3} & \frac{6 E I}{L^2} & 0 & \frac{-12 E I}{L^3} & \frac{6 E I}{L^2} \\
0 & \frac{6 E I}{L^2} & \frac{4 E I}{L} & 0 & \frac{-6 E I}{L^2} & \frac{2 E I}{L} \\
\hline
-E\frac{A}{L} & 0 & 0 & E\frac{A}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{-12 E I}{L^3} & \frac{-6 E I}{L^2} & 0 & \frac{12 E I}{L^3} & \frac{-6 E I}{L^2} \\
0 & \frac{6 E I}{L^2} & \frac{2 E I}{L} & 0 & \frac{-6 E I}{L^2} & \frac{4 E I}{L}
\end{array}\right]$$

$$K = \begin{bmatrix} \boxed{(K_{11})_{12}} & (K_{12})_{12} & \Omega \\ (K_{21})_{12} & \boxed{(K_{22})_{12}} + \boxed{(K_{11})_{23}} & (K_{12})_{23} \\ \Omega & (K_{21})_{23} & (K_{22})_{23} \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = K'_{12} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}7 & 5{,}4 \\ 0 & 5{,}4 & 14{,}4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -120 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}7 & 5{,}4 \\ 0 & -5{,}4 & 7{,}2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -120 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}7 & -5{,}4 \\ 0 & 5{,}4 & 7{,}2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}7 & -5{,}4 \\ 0 & -5{,}4 & 14{,}4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

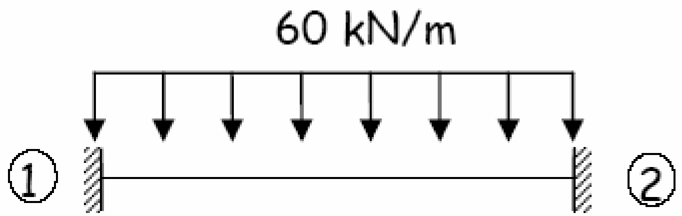
$$(K'_{11})_{23} = \begin{bmatrix} \frac{120}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1{,}35}{\sqrt{2}} & 2{,}7 \\ 0 & 2{,}7 & \frac{14{,}4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot 10^4 \qquad T_{23} = \begin{bmatrix} \cos\left(5\pi/4\right) & -\sin\left(5\pi/4\right) & 0 \\ \sin\left(5\pi/4\right) & \cos\left(5\pi/4\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

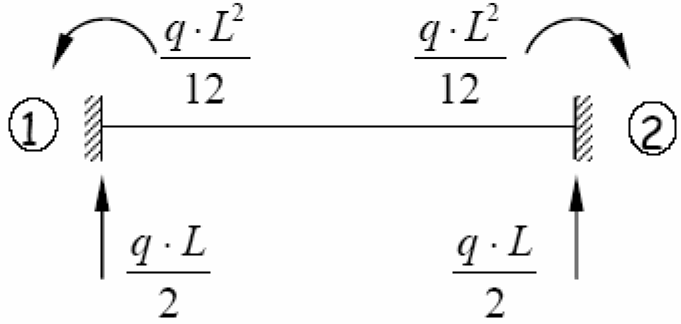
$$(K_{11})_{23} = T \cdot (K'_{11})_{23} \cdot T^{T} \qquad (K_{11})_{23} = \begin{bmatrix} 42{,}9 & 41{,}95 & 1{,}91 \\ 41{,}95 & 42{,}9 & -1{,}91 \\ 1{,}91 & -1{,}91 & 10{,}1 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

## Matriz de rigidez de la estructura:

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
120 & 0 & 0 & -120 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 2{,}7 & 5{,}4 & 0 & -2{,}7 & 5{,}4 & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 5{,}4 & 14{,}4 & 0 & -5{,}4 & 7{,}2 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
-120 & 0 & 0 & 162{,}9 & 41{,}95 & 1{,}91 & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & -2{,}7 & -5{,}4 & 41{,}95 & 45{,}6 & -7{,}31 & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 5{,}4 & 7{,}2 & 1{,}91 & -7{,}31 & 24{,}5 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right]$$

Sólo existen fuerzas en la barra *12*, que serían las siguientes:




$$r'^{e}_{12} = r^{e}_{12} = \{0,120,80,0,120,-80\}$$

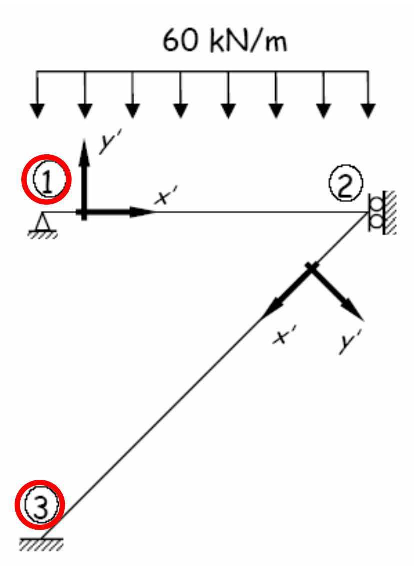
**Vector de cargas:**

$$f = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} - 120 \\ -80 \\ R_{x2} \\ -120 \\ R_{\theta 2} + 80 \\ R_{x3} \\ R_{y3} \\ R_{\theta 3} \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema formado por las filas y columnas 3 y 5, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} -80 \\ -120 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}4 \cdot 10^{-4} & -5{,}4 \cdot 10^{-4} \\ -5{,}4 \cdot 10^{-4} & 45{,}6 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \theta_1 = -6{,}85 \cdot 10^{-4} \ rad \\ v_2 = -3{,}44 \cdot 10^{-4} \ m \end{cases}}$$

## Reacciones:




$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1}-120 \\ -80 \\ R_{x2} \\ -120 \\ R_{\theta 2}+80 \\ R_{x3} \\ R_{y3} \\ R_{\theta 3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{11})_{12} & (K_{12})_{12} & \Omega \\ (K_{21})_{12} & (K_{22})_{12}+(K_{11})_{23} & (K_{12})_{23} \\ \Omega & (K_{21})_{23} & (K_{22})_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nudo 1: Basta con resolver las ecuaciones 1 y 2 del sistema:

$$R_{x1} = 120 * 0 - 120 * 0 = 0\,kN$$

$$R_{y1} = 120 + 5{,}4 \cdot 10^4 \theta_1 - 2{,}7 \cdot 10^4 v_2 = \text{92,30 kN}$$

Nudo3: Necesitamos obtener la matriz $(K_{21})_{23}$

$$(K'_{21})_{23} = \begin{bmatrix} -\frac{120}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1{,}35}{\sqrt{2}} & -2{,}7 \\ 0 & 2{,}7 & \frac{7{,}2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot 10^4; \quad (K_{21})_{23} = T \cdot (K'_{21})_{23} \cdot T^t$$

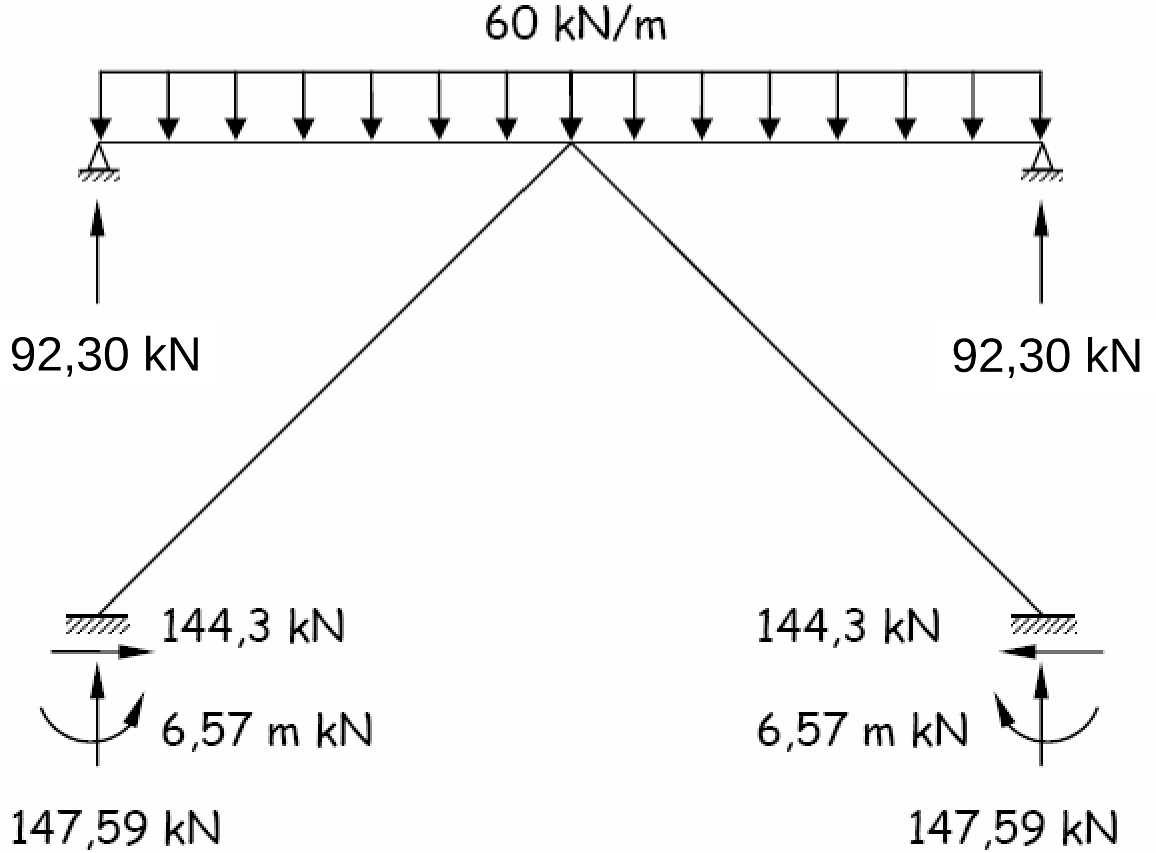
$$(K_{21})_{23} = \begin{bmatrix} -42{,}9 & -41{,}95 & 1{,}91 \\ -41{,}95 & -42{,}9 & -1{,}91 \\ 1{,}91 & -1{,}91 & 10{,}1 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Por tanto, resolviendo las tres últimas filas de nuestro sistema, se obtiene:

$$R_{x3} = -41{,}95 \cdot v_2 = 144{,}3\,kN$$

$$R_{y3} = -42{,}9 \cdot v_2 = 147{,}59\,kN$$

$$R_{\theta 3} = -1{,}91 \cdot v_2 = 6{,}57\,mkN$$



**Apartado d).-**

Para determinar los esfuerzos en la sección *a*, se puede aplicar los métodos que aparecen en la teoría, o basta con observar que al ser una sección extrema, coinciden con las reacciones en dicho punto:

$$N = 0 \text{ kN}$$
$$Q = 92{,}30 \text{ kN}$$
$$M = 0 \text{ kN}$$

d) Reacciones en los apoyos y esfuerzos en barra:

De la expresión 1

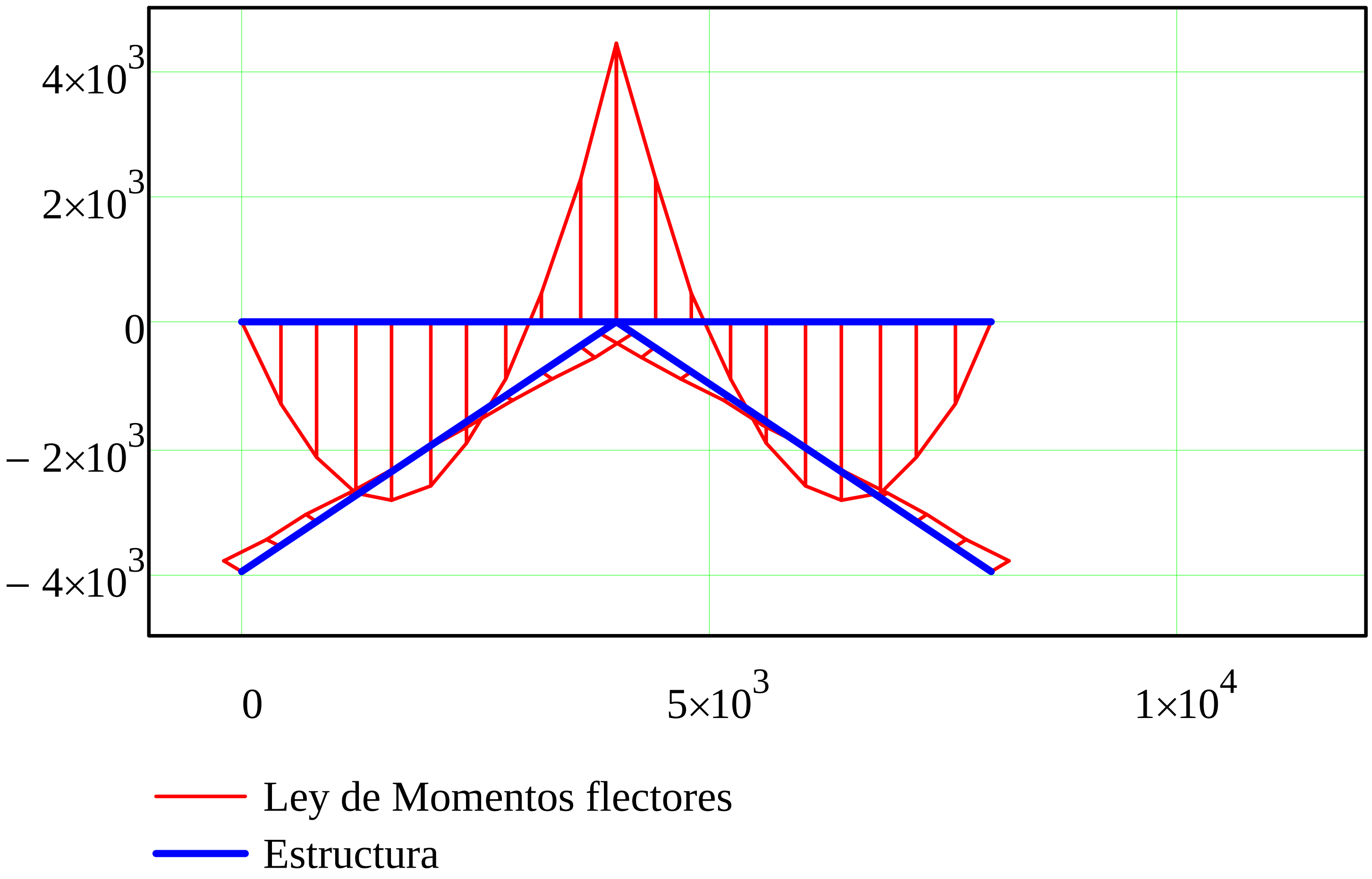
$$\begin{Bmatrix} R1x \\ R1y \end{Bmatrix} = \left[(K_{12})_{12}\right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{-500 \cdot 10^3}{\sqrt{50}} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} -2.57 \\ 6.21 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12.87kN \\ -12.87kN \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R3x \\ R3y \end{Bmatrix} = \left[(K_{21})_{23}\right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0kN \\ -62.1kN \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R4x \\ R4y \end{Bmatrix} = \left[(K_{21})_{24}\right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31.04kN \\ -31.04kN \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R5x \\ R5y \end{Bmatrix} = \left[(K_{21})_{25}\right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25.7kN \\ 0kN \end{Bmatrix}$$

En las barras 3-2 y 2-5 coinciden las reacciones en los apoyos y los esfuerzos en barras.



4×10^3
2×10^3
0
– 2×10^3
– 4×10^3
0
5×10^3
1×10^4
Ley de Momentos flectores
Estructura