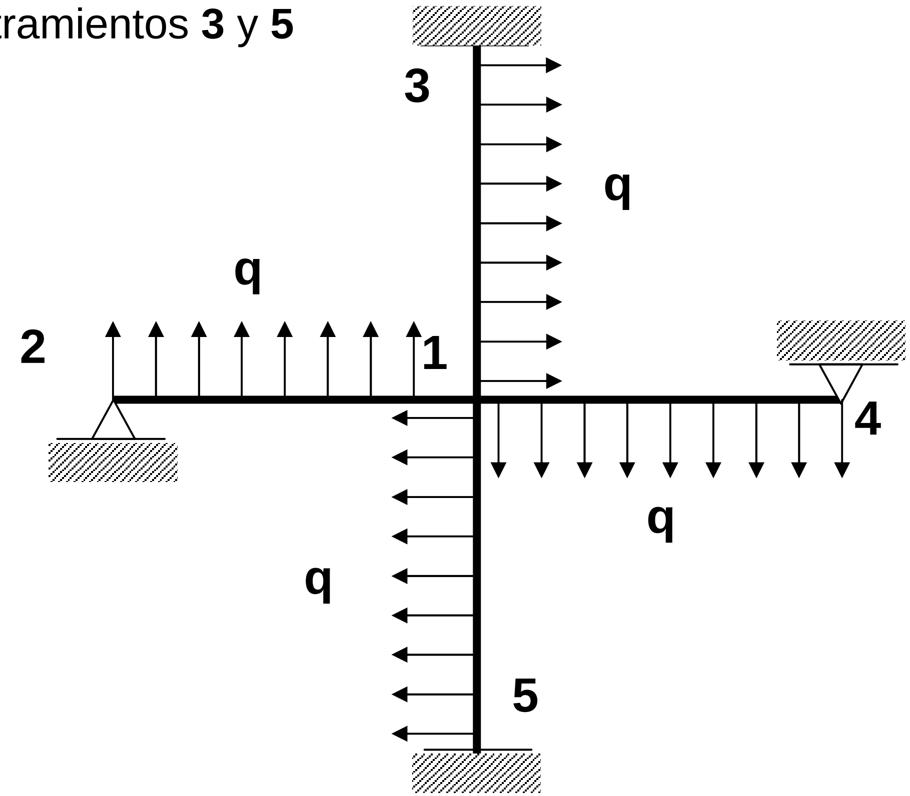
La estructura reticulada de la figura formada por cuatro barras idénticas de sección constante y de longitud, cada una de ellas, de **1 m**, se encuentra sometida a las acciones de unas sobrecargas uniformes de valor **q = 6 kN/m** que actúan a lo largo de toda la longitud de cada una de las barras y con las direcciones y sentidos que aparecen en la figura. La estructura se encuentra simplemente apoyada en sus secciones **2** y **4** y empotrada en sus secciones **3** y **5**. Suponiendo conocidos los productos **EI = 100 kN.m^2** y **EA = 10^5 kN**, determinar, **utilizando las técnicas del análisis matricial de estructuras**:

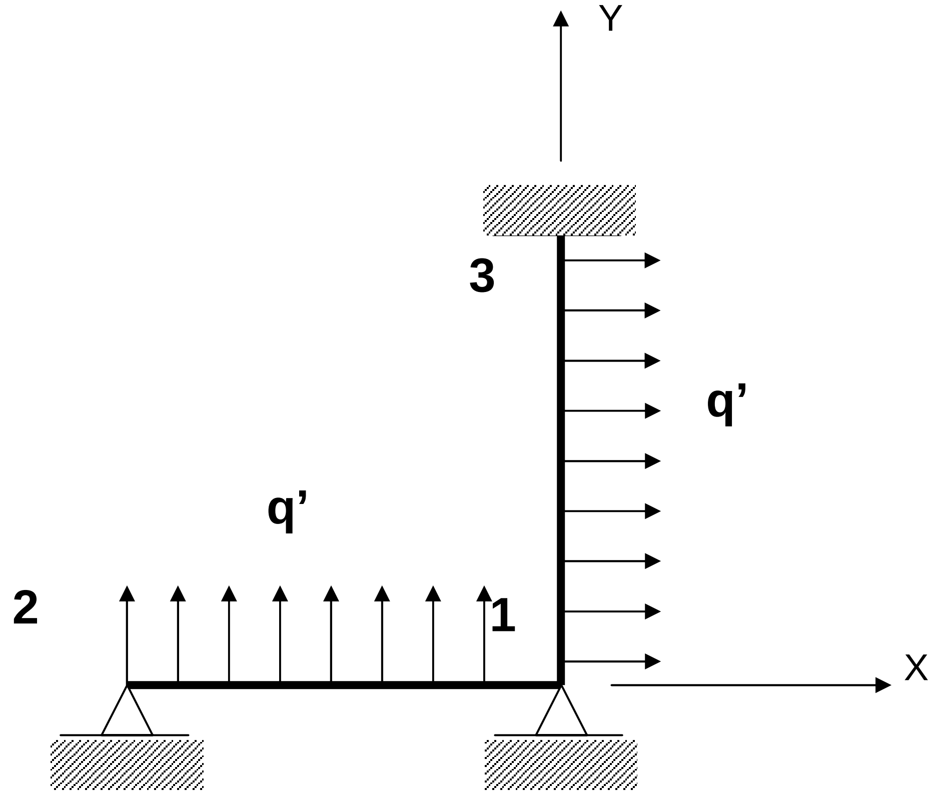
a) Movimientos que sufre el nudo **1**

b) Giros experimentados por las secciones **2** y **4**

c) Reacciones en los empotramientos **3** y **5**

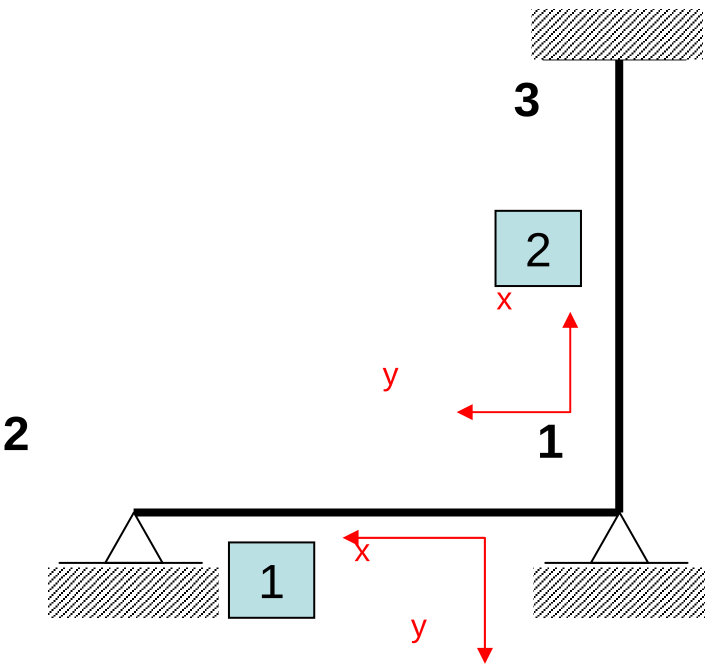


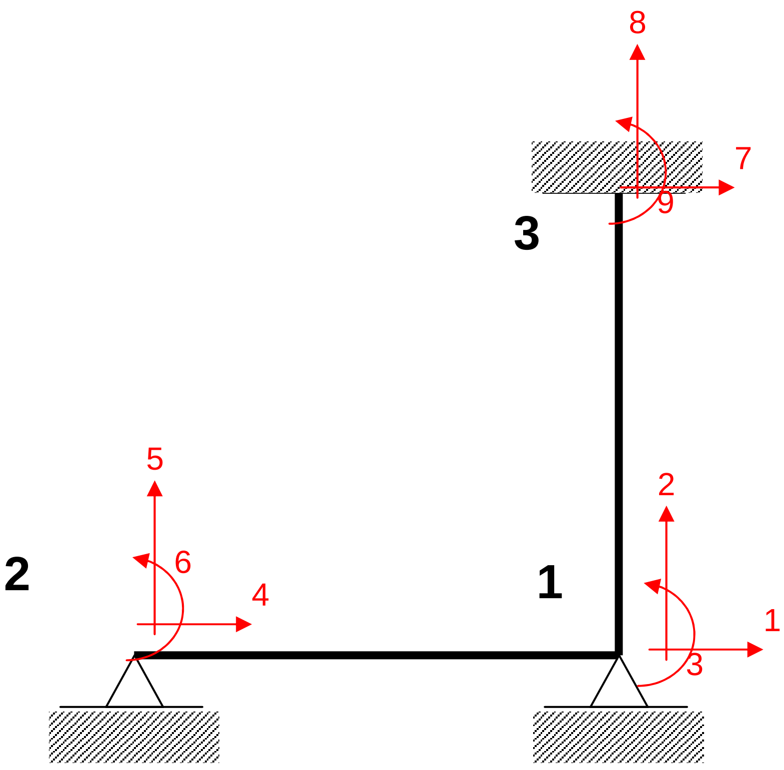
La estructura presenta dos ejes de antimetría, definidos por los nudos 2,1,4 y 5,1,3, por lo que el nudo 1 no podrá experimentar ningún tipo de desplazamientos (pero sí giro).
Por tanto, la estructura a calcular (los ejes globales que se consideran aparecen en la figura) es:



q’ toma un valor mitad del que fija el problema para **q** y tanto las rigidices a flexión (EI) y a axil (EA) que tenemos que considerar son la mitad de las proporcionadas en el enunciado.

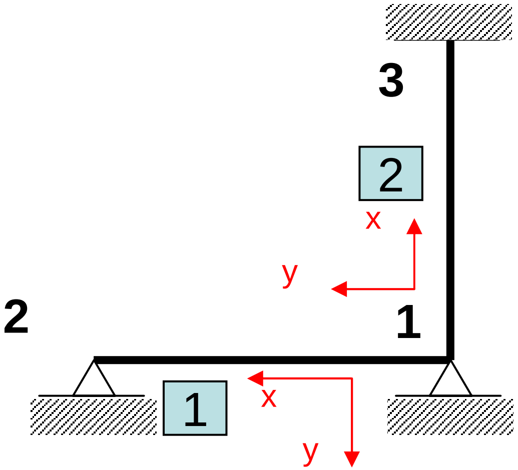
La numeración y los sentidos de las barras (ejes locales) y los gdl y se proporcionan en las dos figuras siguientes:





Sentidos de las barras:
Barra 1: del nudo 1 al 2
Barra 2: del nudo 1 al 3

La matriz ensamblada de la estructura (una vez teniendo en cuenta las antimetrías del problema), representada en forma simbólica, es:



$$K := \begin{pmatrix} K11_{12} + K11_{13} & K12_{12} & K12_{13} \\ K21_{12} & K22_{12} & \Omega \\ K21_{13} & \Omega & K22_{13} \end{pmatrix}$$

de la que sólo precisamos conocer $K11_{12}+K11_{13}$, $K12_{12}$, $K21_{12}$ y $K22_{12}$, que involucran a los dos únicos gdl (3 y 6) que, realmente, tiene el problema.

Estas matrices son (expresadas ya en ejes globales):

$$K11_{12} = \begin{pmatrix} 50000 & -0 & -0 \\ -0 & 600 & -300 \\ -0 & -300 & \boxed{200} \end{pmatrix}$$

$$+$$

$$K11_{13} = \begin{pmatrix} 600 & 0 & -300 \\ 0 & 50000 & 0 \\ -300 & 0 & \boxed{200} \end{pmatrix}$$

$$K12_{12} = \begin{pmatrix} -5 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & -300 \\ 0 & 300 & \boxed{100} \end{pmatrix}$$

$$K21_{12} = \begin{pmatrix} -5 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 300 \\ 0 & -300 & \boxed{100} \end{pmatrix}$$

$$K22_{12} = \begin{pmatrix} 50000 & -0 & 0 \\ -0 & 600 & 300 \\ 0 & 300 & \boxed{200} \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez reducida (una vez eliminadas filas y columnas de los gdl restringidos) resulta ser:

$$Kred := \begin{pmatrix} K_{3,3} & K_{3,6} \\ K_{6,3} & K_{6,6} \end{pmatrix} \Longrightarrow Kred = \begin{pmatrix} 400 & 100 \\ 100 & 200 \end{pmatrix}$$

El vector de fuerzas reducido es:

$$f := \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Por tanto, los giros de los nudos 1 y 2 son (expresados en radianes):

$$d_1 = -1.786 \times 10^{-3} \qquad d_2 = 2.143 \times 10^{-3}$$

Respuesta al Apartado a): El nudo 1 no sufre ningún tipo de desplazamiento por tener la estructura dos ejes de antimetría ortogonales entré sí que se cruzan en dicho nudo, y sólo experimenta un giro de valor 1,786x10^{-3} radianes en sentido horario.

Respuesta del apartado b): El nudo 2 experimenta un giro de valor $2{,}143 \times 10^{-3}$ radianes en sentido antihorario. El nudo 4 experimenta un giro idéntico al anterior por la antimetría del problema en relación con el eje vertical.

Las reacciones en el nudo 3 se calculan utilizando la expresión:

$$\{\boldsymbol{S'}_2\} = [\boldsymbol{K'}_{21}] \cdot [\boldsymbol{T}]^{\boldsymbol{T}} \{\boldsymbol{d}_1\} + [\boldsymbol{K'}_{22}] \cdot [\boldsymbol{T}]^{\boldsymbol{T}} \{\boldsymbol{d}_2\} + \left\{\boldsymbol{r'}^{\boldsymbol{e}}_2\right\}$$

por lo que resulta (en ejes locales):

$$S3_{13} := Kprim21_{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.036 \\ -0.429 \end{pmatrix}$$

siendo:

$$Kprim21_{13} = \begin{pmatrix} -5 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & -300 \\ 0 & 300 & 100 \end{pmatrix}$$

Respuesta del apartado c) (Nótese que el valor de las reacciones deben ser el doble que las calculadas en el problema):

Para el nudo 3:

Reacción según el eje X global: -4,072 kN

Reacción según el eje Y global nula

Momento de empotramiento horario de valor 0,858 kN.m

Para el nudo 5:

Reacción según el eje X global: 4,072 kN

Reacción según el eje Y global nula

Momento de empotramiento horario de valor 0,858 kN.m