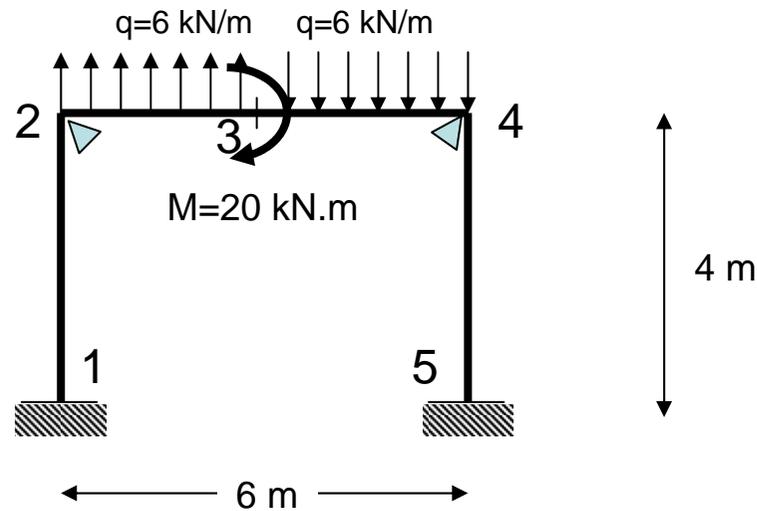
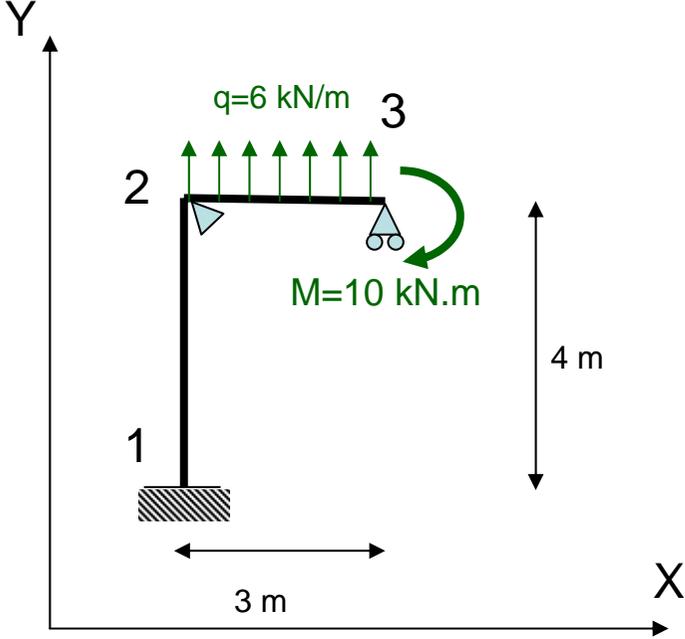
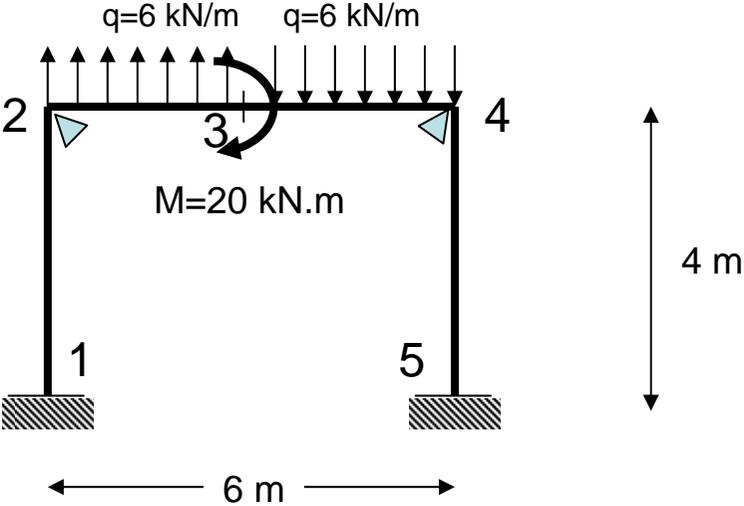


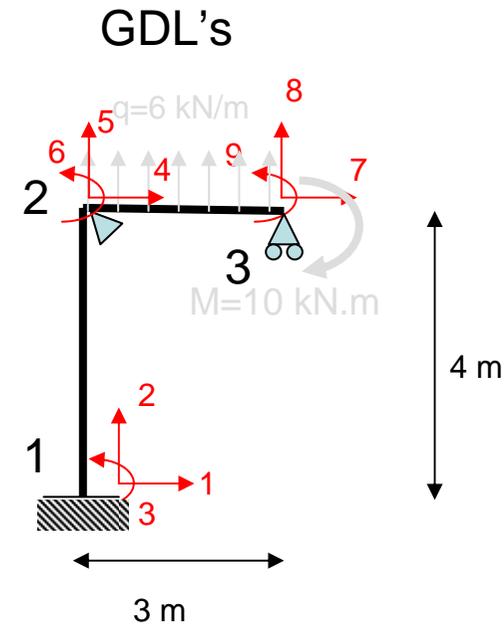
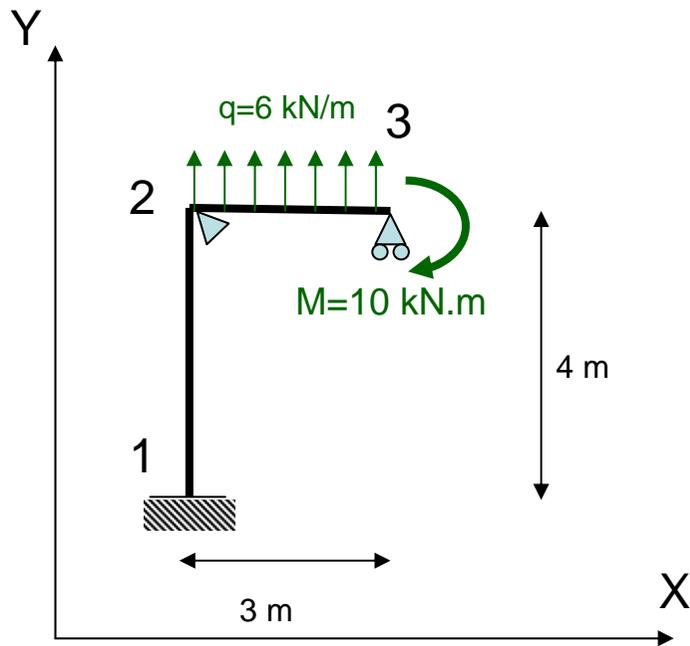
El pórtico de la figura se encuentra formado por tres barras de idéntica sección y de las longitudes indicadas en la figura, y sufre las acciones de unas sobrecargas uniformes verticales de valor $q = 6 \text{ kN/m}$ hacia arriba entre los nudos **2** y **3**, y hacia abajo entre los nudos **3** y **4**, y a un momento externo de $M=20 \text{ kN.m}$ que actúa en la sección media de su dintel (sección correspondiente al nudo **3** de la figura). La estructura se encuentra empotrada en sus secciones **1** y **5**, y simplemente apoyada en sus nudos **2** y **4**. Suponiendo conocidos los productos $EI = 4000 \text{ kN.m}^2$ y $EA = 32 \times 10^5 \text{ kN}$ de las barras, y utilizando las técnicas del análisis matricial de estructuras y las posibles simplificaciones estructurales debidas a las antimetrías existentes, determinar:

- Movimientos que sufre la sección **3** y giros experimentados por las secciones **2** y **4**.
- Reacciones en los empotramientos **1** y **5** y valor del esfuerzo cortante en la sección **3**.



La estructura es antimétrica respecto de un eje vertical que pasa por la sección 3:





Barra 1: nudo 1 al nudo 2
 Barra 2: nudo 2 al nudo 3

Matriz de rigidez simbólica de la estructura:

$$K := \begin{pmatrix} K11_{12} & K12_{12} & \Omega \\ K21_{12} & K22_{12} + K11_{23} & K12_{23} \\ \Omega & K21_{23} & K22_{23} \end{pmatrix}^{\blacksquare}$$

Sólo tenemos como gdl's "activos" a 6, 7 y 9

Matrices de rigidez, en ejes locales, de la Barra 1-2

$$K_{\text{prim}11_{12}} := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{EI}{L^3} & 6 \cdot \frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6 \cdot \frac{EI}{L^2} & 4 \cdot \frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$

$$K_{\text{prim}11_{12}} = \begin{pmatrix} 8 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 750 & 1.5 \times 10^3 \\ 0 & 1.5 \times 10^3 & 4 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{\text{prim}12_{12}} := \begin{pmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{EI}{L^3} & 6 \cdot \frac{EI}{L^2} \\ 0 & -6 \cdot \frac{EI}{L^2} & 2 \cdot \frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$

$$K_{\text{prim}12_{12}} = \begin{pmatrix} -8 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -750 & 1.5 \times 10^3 \\ 0 & -1.5 \times 10^3 & 2 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{\text{prim}21_{12}} := \begin{pmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{EI}{L^3} & -6 \cdot \frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6 \cdot \frac{EI}{L^2} & 2 \cdot \frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$

$$K_{\text{prim}21_{12}} = \begin{pmatrix} -8 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -750 & -1.5 \times 10^3 \\ 0 & 1.5 \times 10^3 & 2 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{\text{prim}22_{12}} := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{EI}{L^3} & -6 \cdot \frac{EI}{L^2} \\ 0 & -6 \cdot \frac{EI}{L^2} & 4 \cdot \frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$

$$K_{\text{prim}22_{12}} = \begin{pmatrix} 8 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 750 & -1.5 \times 10^3 \\ 0 & -1.5 \times 10^3 & 4 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Paso a ejes globales:

$$\alpha := \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad \cos(\alpha) = 0 \quad \sin(\alpha) = 1$$

$$\underset{\text{MM}}{c} := \cos(\alpha) \quad \underset{\text{MM}}{s} := \sin(\alpha) \quad c = 0$$

Matriz de cambio de ejes:

$$T_{12} := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices de rigidez, en ejes globales, de la Barra 1-2

$$K11_{12} := T12 \cdot K_{\text{prim}11}_{12} \cdot T12^T$$

$$K11_{12} = \begin{pmatrix} 750 & 0 & -1500 \\ 0 & 800000 & 0 \\ -1500 & 0 & 4000 \end{pmatrix}$$

$$K12_{12} := T12 \cdot K_{\text{prim}12}_{12} \cdot T12^T$$

$$K12_{12} = \begin{pmatrix} -750 & -0 & -1500 \\ -0 & -800000 & 0 \\ 1500 & -0 & 2000 \end{pmatrix}$$

$$K21_{12} := T12 \cdot K_{\text{prim}21}_{12} \cdot T12^T$$

$$K21_{12} = \begin{pmatrix} -750 & -0 & 1500 \\ -0 & -800000 & -0 \\ -1500 & 0 & 2000 \end{pmatrix}$$

$$K22_{12} := T12 \cdot K_{\text{prim}22}_{12} \cdot T12^T$$

$$K22_{12} = \begin{pmatrix} 750 & 0 & 1500 \\ 0 & 800000 & -0 \\ 1500 & -0 & 4000 \end{pmatrix}$$

Matrices de rigidez, en ejes locales y globales, de la Barra 2-3

$$\mathbf{K}_{\text{prim}11_{23}} := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{EI}{L^3} & 6 \cdot \frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6 \cdot \frac{EI}{L^2} & 4 \cdot \frac{EI}{L} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_{\text{prim}11_{23}} = \begin{pmatrix} 1.067 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1.778 \times 10^3 & 2.667 \times 10^3 \\ 0 & 2.667 \times 10^3 & 5.333 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{prim}12_{23}} := \begin{pmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{EI}{L^3} & 6 \cdot \frac{EI}{L^2} \\ 0 & -6 \cdot \frac{EI}{L^2} & 2 \cdot \frac{EI}{L} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_{\text{prim}12_{23}} = \begin{pmatrix} -1.067 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & -1.778 \times 10^3 & 2.667 \times 10^3 \\ 0 & -2.667 \times 10^3 & 2.667 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{prim}21_{23}} := \begin{pmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{EI}{L^3} & -6 \cdot \frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6 \cdot \frac{EI}{L^2} & 2 \cdot \frac{EI}{L} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_{\text{prim}21_{23}} = \begin{pmatrix} -1.067 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & -1.778 \times 10^3 & -2.667 \times 10^3 \\ 0 & 2.667 \times 10^3 & 2.667 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{prim}22_{23}} := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{EI}{L^3} & -6 \cdot \frac{EI}{L^2} \\ 0 & -6 \cdot \frac{EI}{L^2} & 4 \cdot \frac{EI}{L} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_{\text{prim}22_{23}} = \begin{pmatrix} 1.067 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1.778 \times 10^3 & -2.667 \times 10^3 \\ 0 & -2.667 \times 10^3 & 5.333 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura en ejes globales:

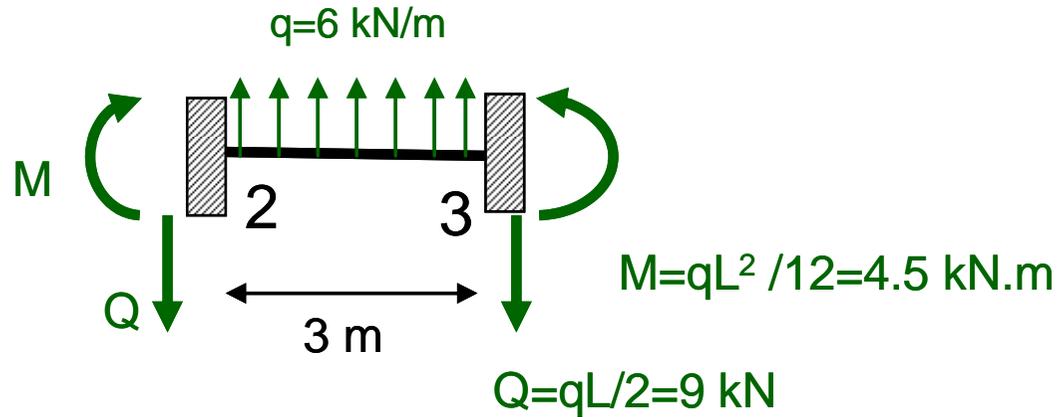
$$K = \begin{pmatrix} 750 & 0 & -1500 & -750 & -0 & -1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 800000 & 0 & -0 & -800000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1500 & 0 & 4000 & 1500 & -0 & 2000 & 0 & 0 & 0 \\ -750 & -0 & 1500 & 1067416.667 & 0 & 1500 & -1066666.667 & 0 & 0 \\ -0 & -800000 & -0 & 0 & 801777.778 & 2666.667 & 0 & -1777.778 & 2666.667 \\ -1500 & 0 & 2000 & 1500 & 2666.667 & 9333.333 & 0 & -2666.667 & 2666.667 \\ 0 & 0 & 0 & -1066666.667 & 0 & 0 & 1066666.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1777.778 & -2666.667 & 0 & 1777.778 & -2666.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2666.667 & 2666.667 & 0 & -2666.667 & 5333.333 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez reducida (eliminando filas y columnas correspondientes a los gdl's cuyo movimiento se encuentra impedido):

$$K = \begin{pmatrix} 750 & 0 & 1500 & 750 & 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 800000 & 0 & 0 & -800000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1500 & 0 & 4000 & 1500 & 0 & 2000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -750 & 0 & 1500 & 1067416.667 & 0 & 1500 & -1066666.667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -800000 & 0 & 0 & 801777.778 & 2666.667 & 0 & -1777.778 & 2666.667 & 0 \\ -1500 & 0 & 2000 & 1500 & 2666.667 & 9333.333 & 0 & -2666.667 & 2666.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1066666.667 & 0 & 0 & 1066666.667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1777.778 & -2666.667 & 0 & 1777.778 & -2666.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2666.667 & 2666.667 & 0 & -2666.667 & 5333.333 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{red} = \begin{pmatrix} 9.333 \times 10^3 & 0 & 2.667 \times 10^3 \\ 0 & 1.067 \times 10^6 & 0 \\ 2.667 \times 10^3 & 0 & 5.333 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Vector de cargas de empotramiento, expresada en ejes globales (sólo la barra 2-3 tiene cargas actuando sobre su vano):



$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -4,5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas que actúa sobre la estructura en los gdl que nos interesan (6, 7 y 9) es:

$$\text{Cargas} := \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \\ -10 - 4.5 \end{pmatrix}$$

Vector de movimientos de la estructura (en ejes globales):

$$u := K_{red}^{-1} \cdot \text{Cargas} = \begin{pmatrix} 1.469 \times 10^{-3} \\ 0 \\ -3.453 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Es decir:

Giro en la sección 2: $1,469 \times 10^{-3}$ radianes en sentido antihorario

Giro en la sección 3: $3,453 \times 10^{-3}$ radianes en sentido horario

La sección 3 no sufre ni desplazamiento vertical (por antimetría) ni horizontal.

Reacciones en 1 y 5 y esfuerzo cortante en 3:

Sección 1:

$$R1 := K11_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + K12_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.469 \times 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.204 \\ 0 \\ 2.938 \end{pmatrix}$$

es decir, reacción horizontal de 2,204 kN en sentido negativo del eje X global, reacción según Y nula y momento de empotramiento de 2,938 con sentido antihorario. En el empotramiento de la sección 5 tenemos exactamente (por antimetría) las mismas reacciones.

Sección 3:

$$R3 := K21_{23} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.469 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} + K22_{23} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.453 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3.709 \\ -9.999 \end{pmatrix}$$

por lo que el esfuerzo cortante en esta sección será de 3,709 kN