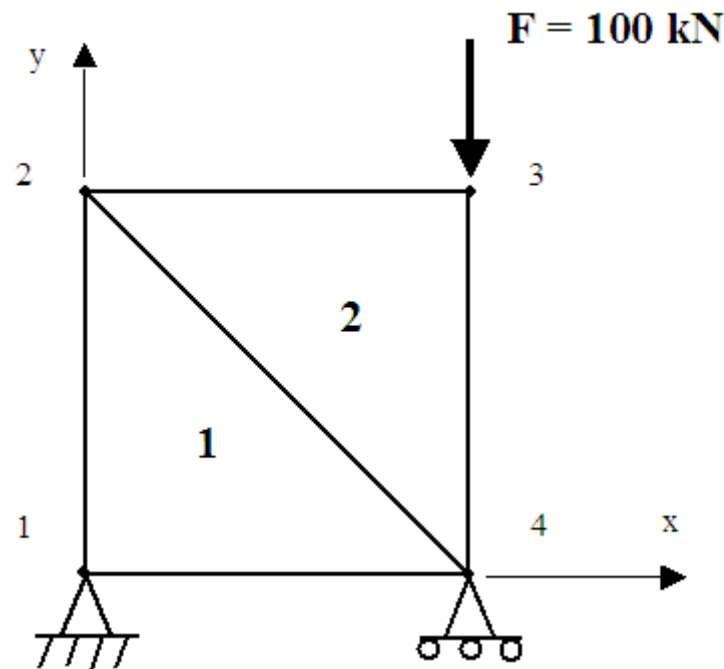
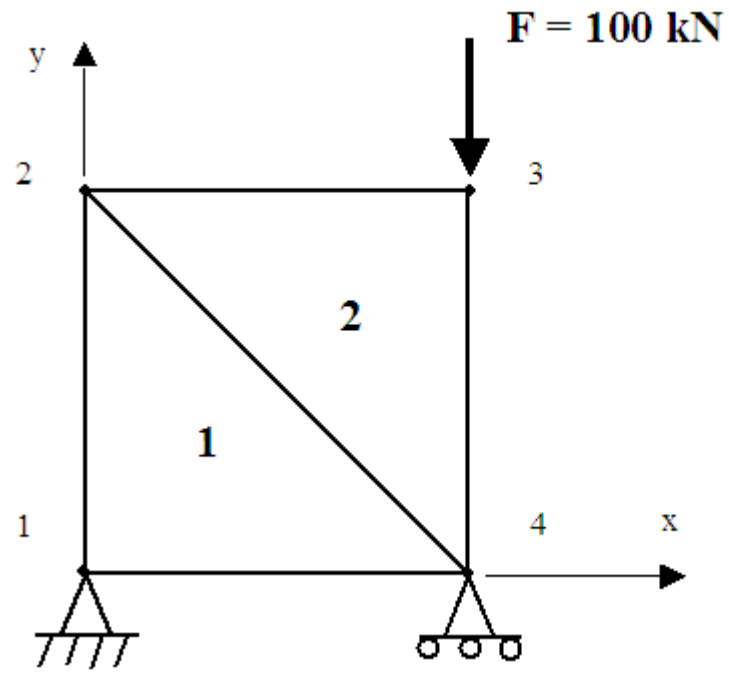


Una placa de aluminio ( $E=70$  GPa y  $\nu=0,3$ ) cuadrada de  $0,5$  m de lado y  $0,1$  mm de espesor, se encuentra sustentada como se indica en la figura. Cuando en el nudo 3 actúa una carga vertical hacia debajo de  $100$  kN, y la placa se modela mediante Cos elementos triangulares de Turner como los indicados, determinar:

- Los desplazamientos de las cuatro esquinas de la placa
- Las deformaciones y tensiones en cada uno de los dos elementos finitos que se consideran





Elemento	Nudo 1	Nudo 2	Nudo 3
1	1	4	2
2	4	3	2

MATRICES B DE CADA UNO DE LOS ELEMENTOS:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & \mathbf{b}_2 & 0 & \mathbf{b}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_1 & 0 & \mathbf{c}_2 & 0 & \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$b_2 = y_3 - y_1$$

$$b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

$$c_2 = x_1 - x_3$$

$$c_3 = x_2 - x_1$$

$$\mathbf{B}(1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} := \frac{\mathbf{E}}{1 - v^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}(1) = \begin{pmatrix} 7.692 \times 10^{10} & 2.308 \times 10^{10} & 0 \\ 2.308 \times 10^{10} & 7.692 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2.692 \times 10^{10} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}(2) = \begin{pmatrix} 7.692 \times 10^{10} & 2.308 \times 10^{10} & 0 \\ 2.308 \times 10^{10} & 7.692 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2.692 \times 10^{10} \end{pmatrix}$$

$$[K^e] = [B]^T [D] [B] \text{Volumen}$$

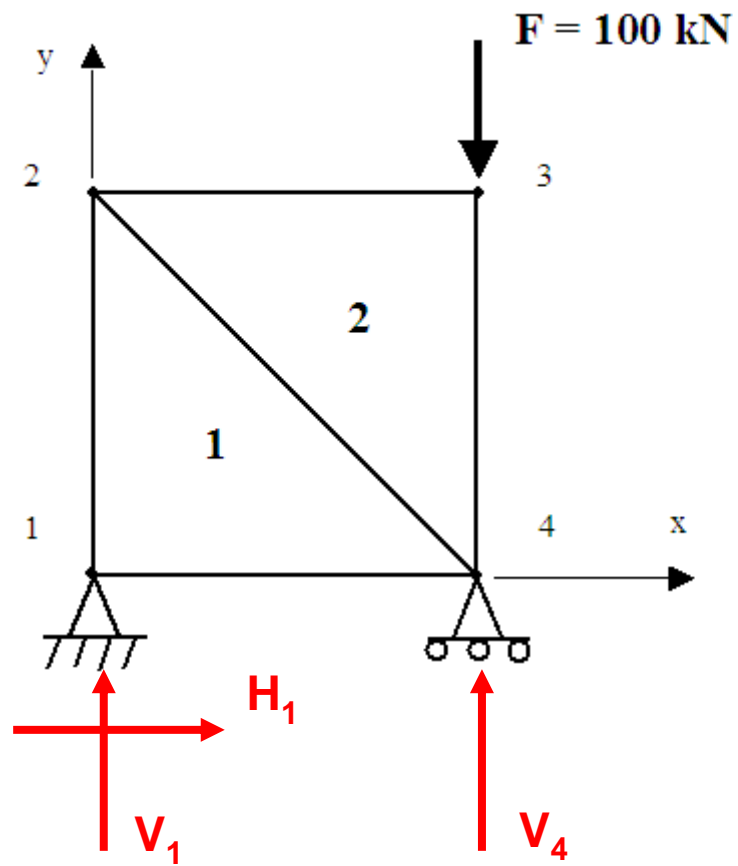
$$\text{Kelem(1)} = \begin{pmatrix} 5.192 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 \\ 2.5 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 \\ -3.846 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 & 3.846 \times 10^6 & 0 & 0 & 1.154 \times 10^6 \\ -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 0 & 1.346 \times 10^6 & 1.346 \times 10^6 & 0 \\ -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 0 & 1.346 \times 10^6 & 1.346 \times 10^6 & 0 \\ -1.154 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 & 1.154 \times 10^6 & 0 & 0 & 3.846 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kelem(2)} = \begin{pmatrix} 3.846 \times 10^6 & 0 & 0 & 1.154 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 \\ 0 & 1.346 \times 10^6 & 1.346 \times 10^6 & 0 & -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 \\ 0 & 1.346 \times 10^6 & 1.346 \times 10^6 & 0 & -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 \\ 1.154 \times 10^6 & 0 & 0 & 3.846 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 \\ -3.846 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 \\ -1.154 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

## Ensamblaje de la matriz de rigidez

$$\text{KGlob} = \begin{pmatrix} 5.192 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 & 0 & 0 & -3.846 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 \\ 2.5 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 & 0 & 0 & -1.154 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 \\ -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & 0 & -3.846 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 & 0 & 2.5 \times 10^6 \\ -1.154 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 & 0 & 5.192 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -3.846 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -1.154 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 \\ -3.846 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 & 0 & 2.5 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & 0 \\ -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & 0 & -1.154 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 & 0 & 5.192 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

# VECTOR DE CARGAS



$$\{f\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \cdot 10^3 \\ 0 \\ V_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \cdot 10^3 \\ 0 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 5.192 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 & 0 & 0 & -3.846 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 \\ 2.5 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 & 0 & 0 & -1.154 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 \\ -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & 0 & -3.846 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 & 0 & 2.5 \times 10^6 \\ -1.154 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 & 0 & 5.192 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -3.846 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -1.154 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 \\ -3.846 \times 10^6 & -1.154 \times 10^6 & 0 & 2.5 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 5.192 \times 10^6 & 0 \\ -1.346 \times 10^6 & -1.346 \times 10^6 & 2.5 \times 10^6 & 0 & -1.154 \times 10^6 & -3.846 \times 10^6 & 0 & 5.192 \times 10^6 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.5 \times 10^{-3} \\ -1.75 \times 10^{-3} \\ 0.017 \\ -0.027 \\ -1.75 \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \{u\}$$

$$\text{Strain(1)} = \begin{pmatrix} -3.5 \times 10^{-3} \\ -3.5 \times 10^{-3} \\ 0.013 \end{pmatrix}$$

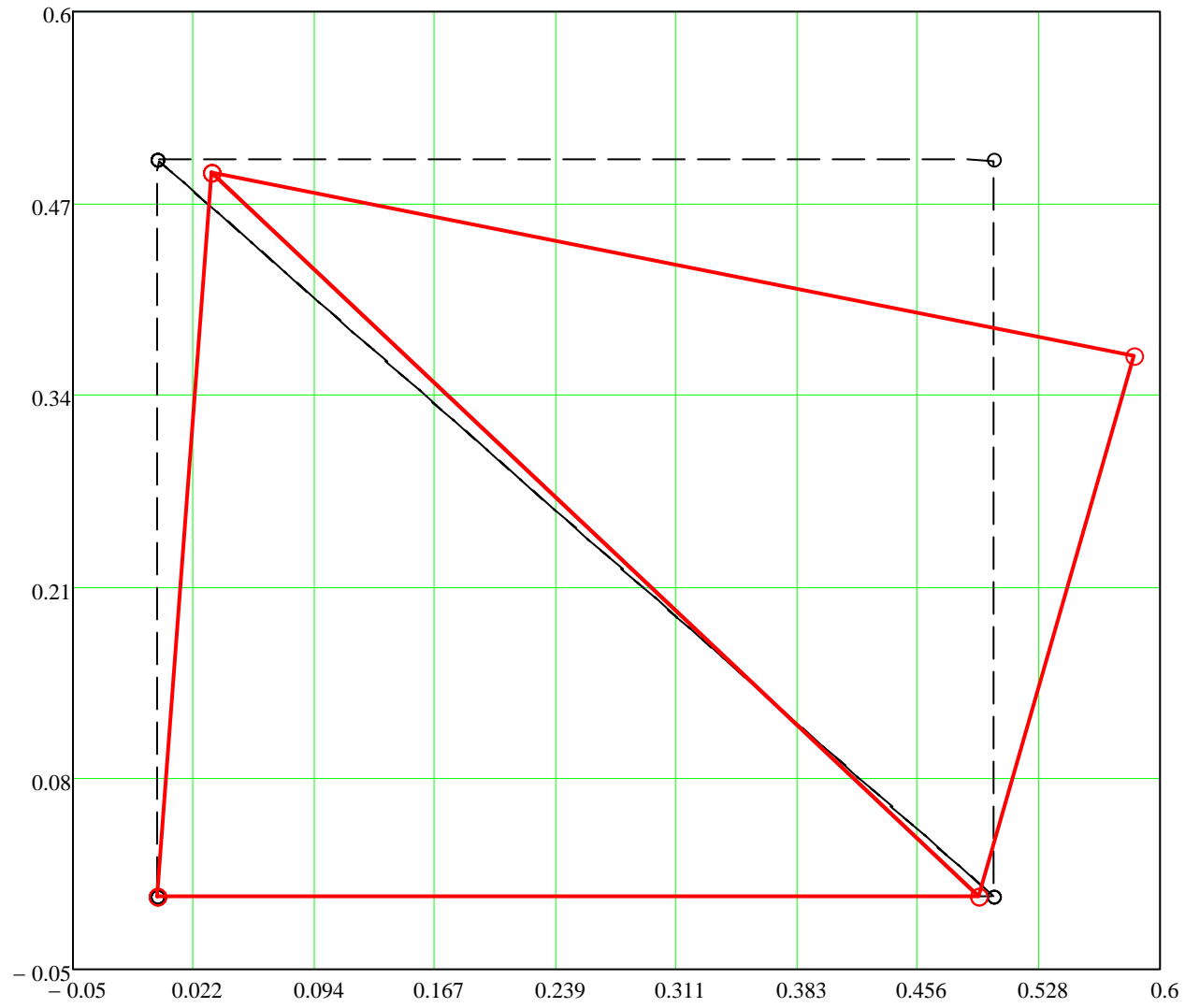
$$\text{Strain(2)} = \begin{pmatrix} 0.021 \\ -0.054 \\ -0.013 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Stress (1)} = \begin{pmatrix} -3.5 \times 10^8 \\ -3.5 \times 10^8 \\ 3.5 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

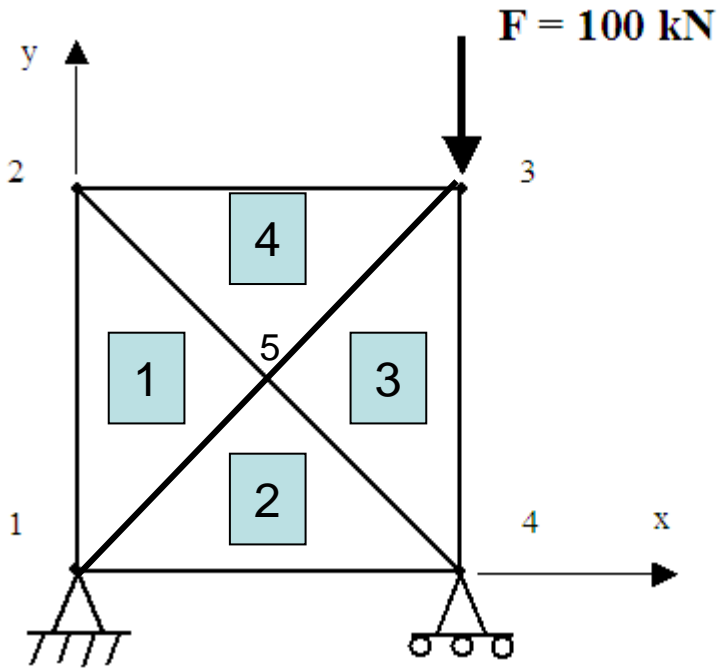
$$\text{Stress (2)} = \begin{pmatrix} 3.5 \times 10^8 \\ -3.65 \times 10^9 \\ -3.5 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

Malla de elementos finitos sin deformar y deformada



○-○ Malla sin deformar

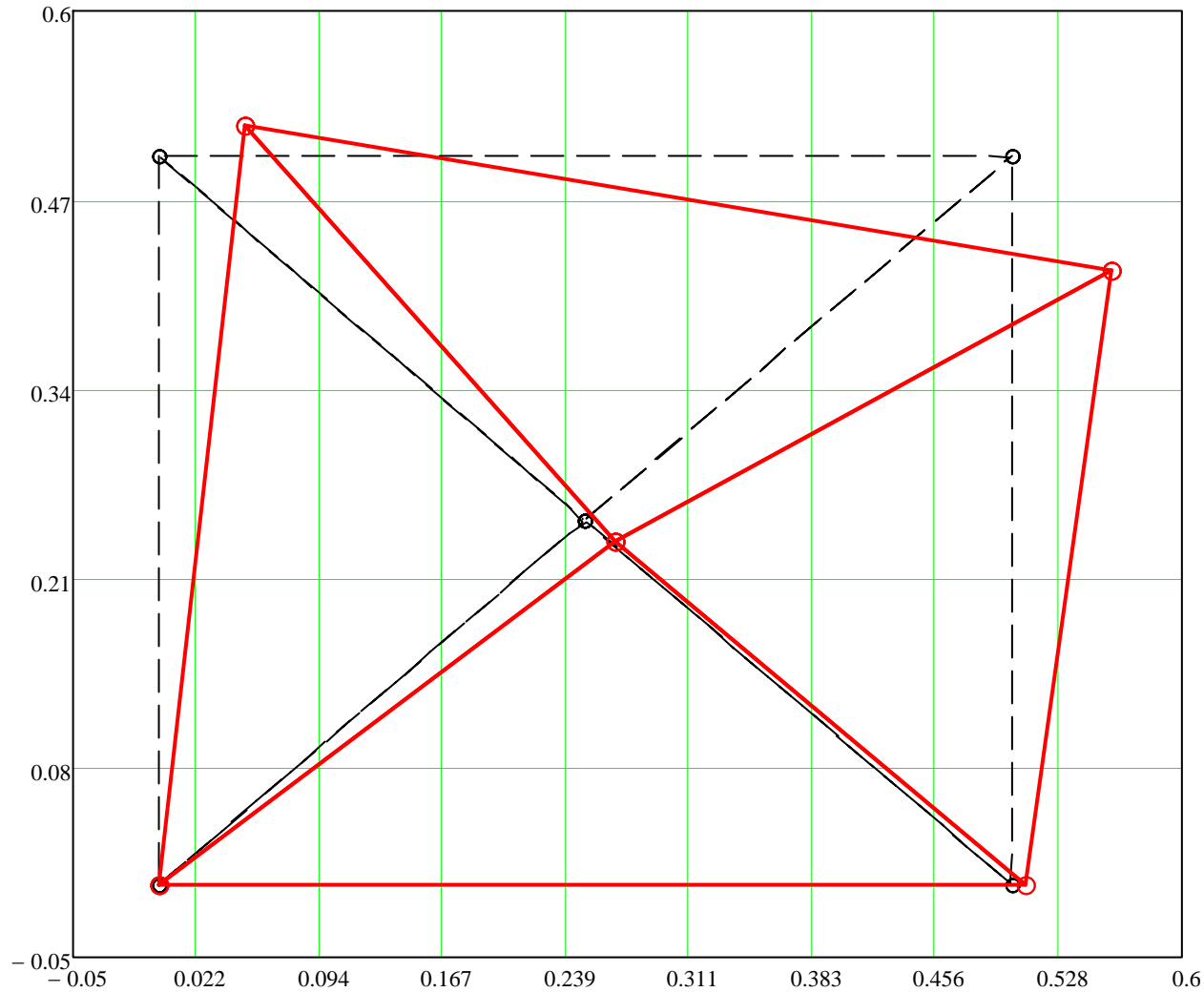
○-○ Malla deformada



Coordenadas de los nudos		
Num.	Coordenadas	
	x [m]	y [m]
1	0	0
2	0	0,5
3	0,5	0,5
4	0,5	0
5	0,25	0,25

Propiedades de los elementos								
Num.	Nudo i	Nudo j	Nudo k	E [N/m <sup>2</sup> ]	Coef. Poisson	espesor (m)	alfa (°C)-1	Variación T (°C)
1	2	1	5	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
2	1	4	5	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
3	3	5	4	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
4	5	3	2	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00

Malla de elementos finitos sin deformar y deformada

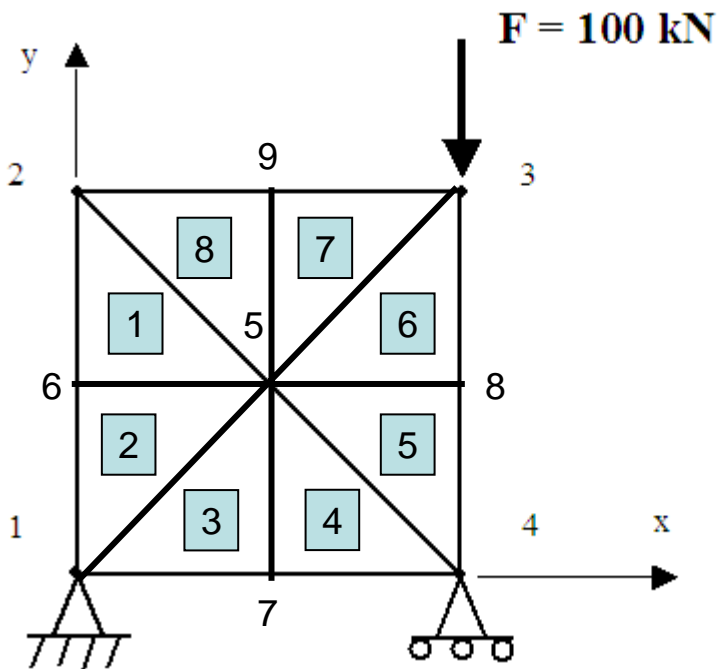


○ Malla sin deformar

○ Malla deformada

u =

	1
1	0
2	0
3	0.025
4	0.011
5	0.029
6	-0.039
7	$4.286 \cdot 10^{-3}$
8	0
9	$8.643 \cdot 10^{-3}$
10	$-7.143 \cdot 10^{-3}$



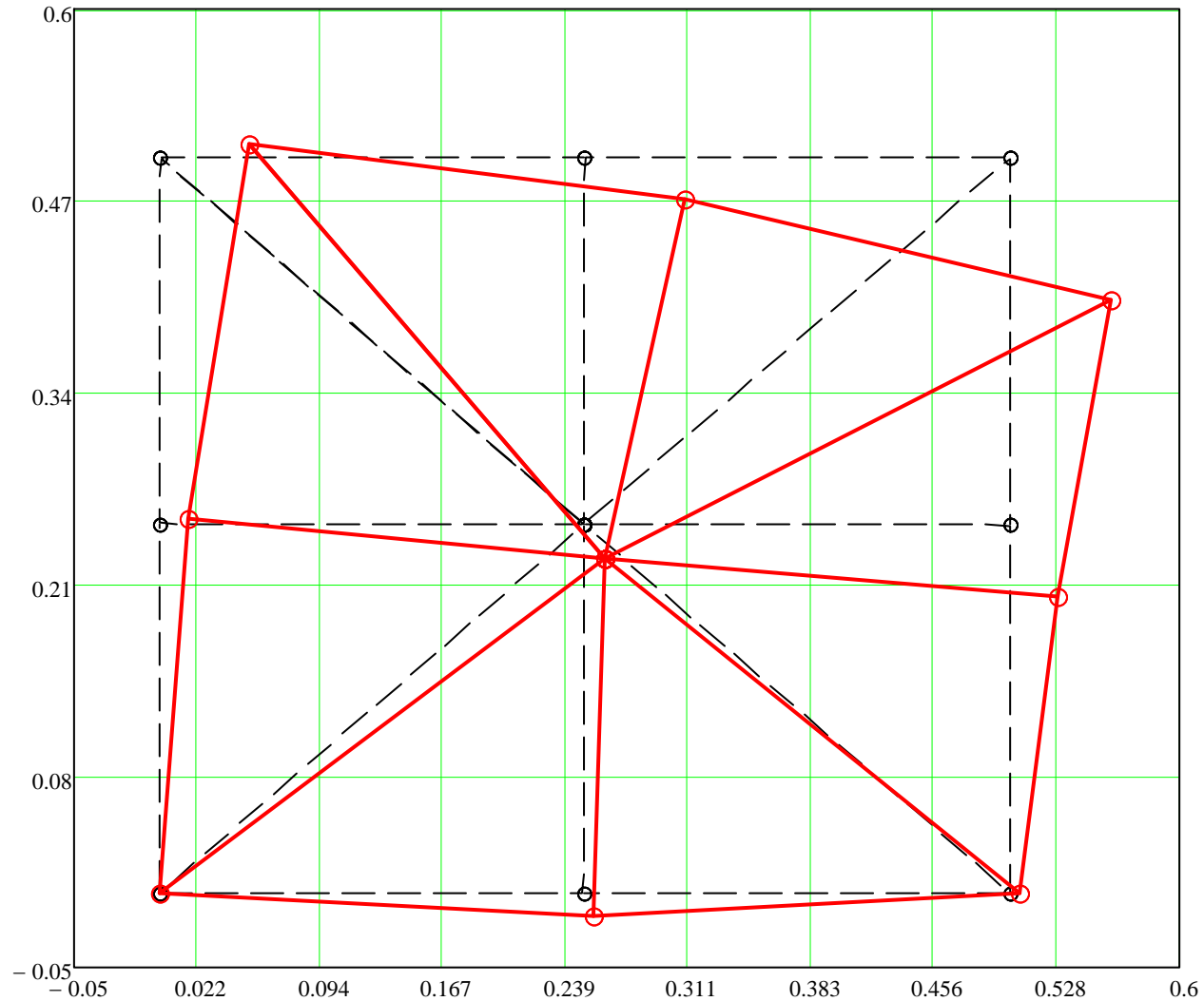
Coordenadas de los nudos		
Num.	Coordenadas	
	x [m]	y [m]

1	0	0
2	0	0,5
3	0,5	0,5
4	0,5	0
5	0,25	0,25
6	0	0,25
7	0,25	0
8	0,5	0,25
9	0,25	0,5

Propiedades de los elementos

Num.	Nudo i	Nudo j	Nudo k	E [N/m <sup>2</sup> ]	Coef. Poisson	espesor (m)	alfa (°C)-1	Variación T (°C)
1	5	2	6	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
2	5	6	1	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
3	5	1	7	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
4	5	7	4	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
5	5	4	8	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
6	5	8	3	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
7	5	3	9	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
8	5	9	2	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00

Malla de elementos finitos sin deformar y deformada

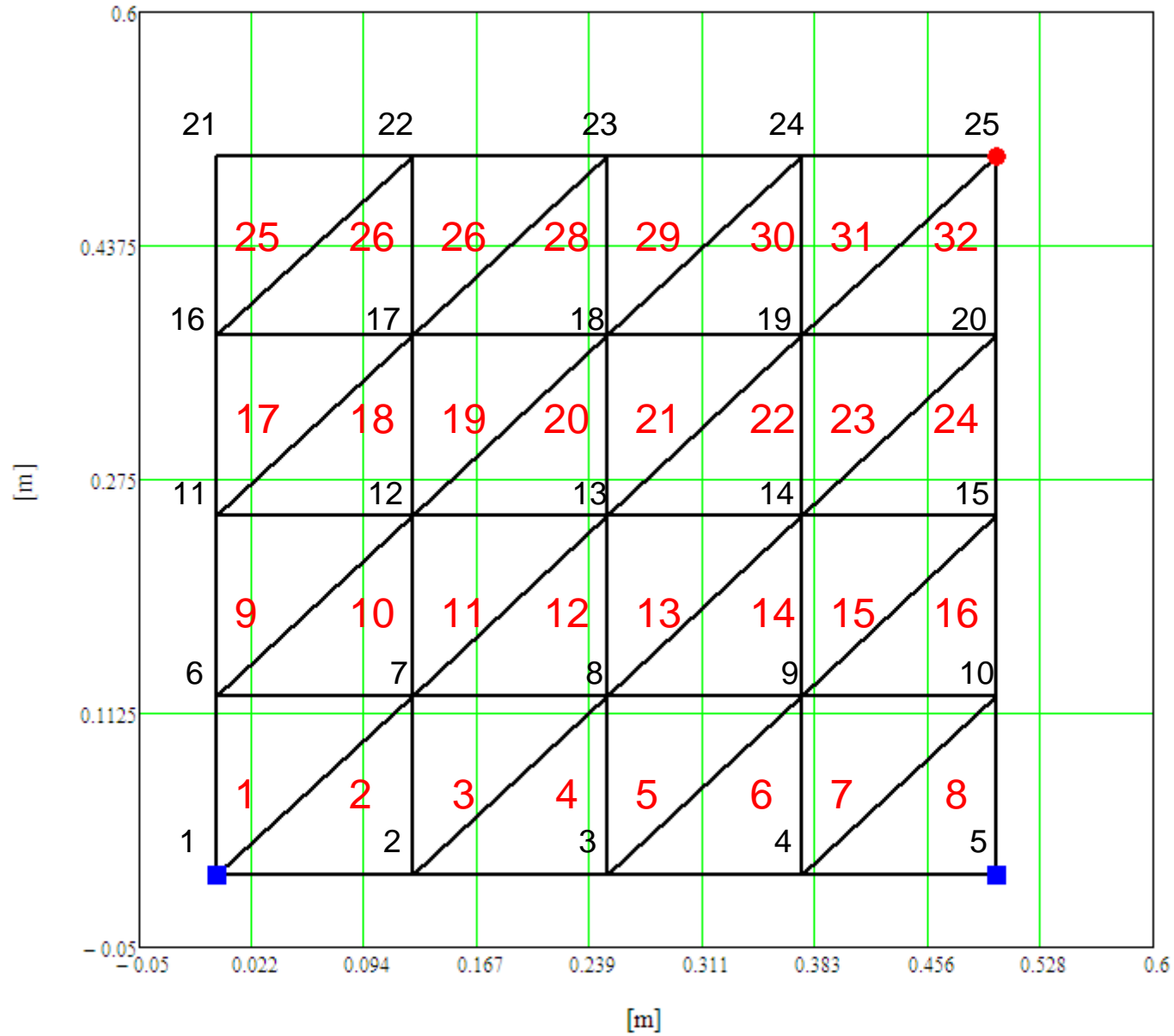


○ ○ Malla sin deformar  
 ○ ○ Malla deformada

u =

	1
1	0
2	0
3	0.027
4	$4.529 \cdot 10^{-3}$
5	0.03
6	-0.049
7	$2.893 \cdot 10^{-3}$
8	0
9	$6.12 \cdot 10^{-3}$
10	-0.011
11	$8.499 \cdot 10^{-3}$
12	$2.264 \cdot 10^{-3}$
13	$2.658 \cdot 10^{-3}$
14	$-7.893 \cdot 10^{-3}$
15	0.014
16	-0.024
17	0.029
18	-0.014

Malla del modelo de elementos finitos sin deformar



- Malla del modelo
- Nodos cargados
- Nodos con restricciones

Coordenadas de los nudos		
Num.	Coordenadas	
	x [m]	y [m]

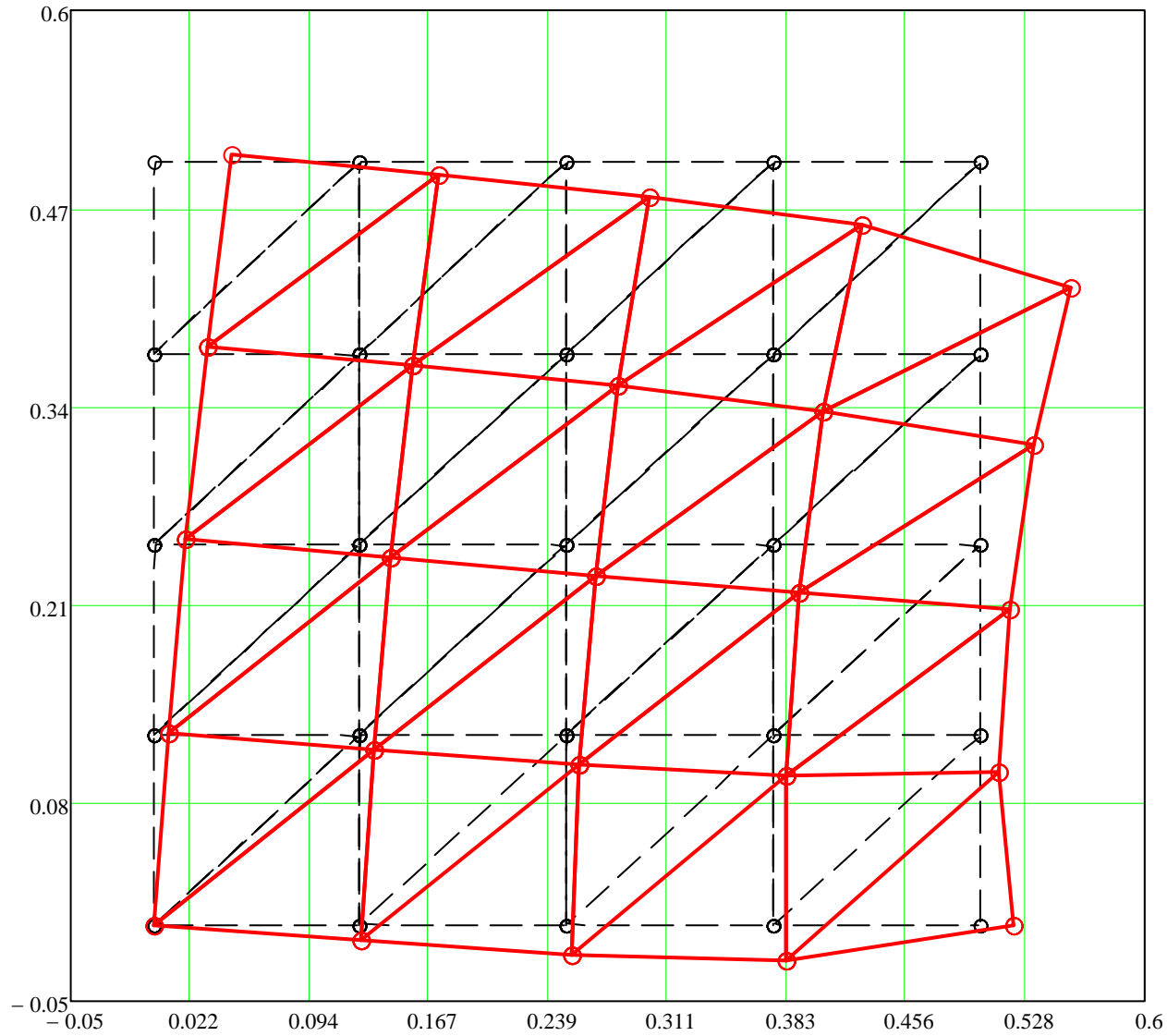
1	0	0
2	0,125	0
3	0,25	0
4	0,375	0
5	0,5	0
6	0	0,125
7	0,125	0,125
8	0,25	0,125
9	0,375	0,125
10	0,5	0,125
11	0	0,25
12	0,125	0,25
13	0,25	0,25
14	0,375	0,25
15	0,5	0,25
16	0	0,375
17	0,125	0,375
18	0,25	0,375
19	0,375	0,375
20	0,5	0,375
21	0	0,5
22	0,125	0,5
23	0,25	0,5
24	0,375	0,5
25	0,5	0,5

Propiedades de los elementos

Num.	Nudo i	Nudo j	Nudo k	E [N/m <sup>2</sup> ]	Coef. Poisson	espesor (m)	alfa (°C)-1	Variación T (°C)
1	1	7	6	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
2	2	7	1	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
3	2	8	7	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
4	3	8	2	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
5	3	9	8	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
6	4	9	3	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
7	4	10	9	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
8	5	10	4	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
9	6	12	11	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
10	6	7	12	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
11	7	13	12	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
12	7	8	13	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
13	8	14	13	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
14	8	9	14	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
15	9	15	14	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
16	9	10	15	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
17	11	17	16	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
18	11	12	17	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
19	12	18	17	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
20	12	13	18	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
21	13	19	18	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
22	13	14	19	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
23	14	20	19	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
24	14	15	20	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
25	16	22	21	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
26	16	17	22	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
27	17	23	22	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
28	17	18	23	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
29	18	24	23	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
30	18	19	24	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
31	19	25	24	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00
32	19	20	25	7,00E+10	0,30	0,00010	0,00000	0,00



Malla de elementos finitos sin deformar y deformada



○ Malla sin deformar  
 ○ Malla deformada

	1
1	0
2	0
3	$5.407 \cdot 10^{-4}$
4	-0.01
5	$2.955 \cdot 10^{-3}$
6	-0.02
7	$8.445 \cdot 10^{-3}$
8	-0.023
9	0.021
10	0
11	$8.865 \cdot 10^{-3}$
12	$8.523 \cdot 10^{-4}$
13	$8.553 \cdot 10^{-3}$
14	$-9.845 \cdot 10^{-3}$
15	$8.211 \cdot 10^{-3}$
16	-0.02
17	$8.415 \cdot 10^{-3}$
18	-0.027
19	0.011
20	-0.025
21	0.019
22	$2.748 \cdot 10^{-3}$
23	0.018
24	$-9.035 \cdot 10^{-3}$
25	0.017
26	-0.021
27	0.016
28	-0.032
29	0.019
30	-0.043
31	0.032
32	$4.483 \cdot 10^{-3}$
33	0.032
34	$-8.285 \cdot 10^{-3}$
35	0.031
36	-0.021
37	0.03
38	-0.038
39	0.033
40	-0.06
41	0.047
42	$4.867 \cdot 10^{-3}$
43	0.047
44	$-8.474 \cdot 10^{-3}$
45	0.05
46	-0.022
47	0.054
48	-0.041
49	0.055
50	-0.081

2-elementos

$$u_3 = 0,017m \quad v_3 = -0,027m$$

4-elementos

$$u_3 = 0,029m \quad v_3 = -0,039m$$

8-elementos

$$u_3 = 0,030m \quad v_3 = -0,049m$$

32-elementos

$$u_{25} = 0,055m \quad v_{25} = -0,081m$$