Continuidad

f **cont.:** pequeños cambios en entrada $\longrightarrow$ pequeños cambios en salida

DEF.

Sea f una función definida en $(x_0 - p, x_0 + p)$, $p > 0$

$$\text{se dice } \textbf{continua} \text{ en } x_0 \iff \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

f TIENE QUE estar definida en x_0.

Si f no es continua $\longrightarrow$ **discontinua** en x_0:

- $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ no existe, o
- el límite existe pero es distinto a $f(x_0)$

- Una función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ si es continua $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x)$ es continua en (a, b) si es continua en cada punto de (a, b)
- $f(x)$ es continua en $[a, b]$ si es continua en (a, b) y

$$f(a) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x), \ f(b) = \lim_{x \longrightarrow b^-} f(x)$$

Propiedades básicas

Sean f, g continuas en x_0, entonces las siguientes funciones son continuas en x_0

- $\alpha f + \beta g$
- fg
- $1/f$, si $f(x_0) \neq 0$
- Función compuesta: si g es continua en x_0 y f continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0.

Algunas funciones continuas

Las siguientes funciones son continuas en sus <u>dominios</u>

- polinomios: $p(x)$
- funciones racionales: $p(x)/q(x)$
- funciones trigonométricas: $\mathrm{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\mathrm{arcsen}(x), \ldots$
- funciones hiperbólicas: $\mathrm{senh}(x)$, $\cosh(x), \ldots$
- $\exp(x)$, $\ln(x)$ y $\sqrt[n]{x}$

TEOREMA (TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO)

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a, b]$ que verifica $f(c) = K$

TEOREMA (TEOREMA DE BOLZANO)

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe un valor $c \in (a, b)$ que verifica $f(c) = 0$

Una función f se dice **acotada** si el conjunto de sus valores está acotado, es decir, si existe un número $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo x en su dominio.

Teorema (Teorema del Valor Extremo)

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo. Es decir, existen unos valores x_m y x_M en $[a, b]$ tal que:

$$f(x_M) \geq f(x) \geq f(x_m) \quad \textit{para todo } x \in [a, b]$$