La Derivada

Def.

Una función f se dice **derivable** en x $\iff$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

existe y es un número finito.
Si f es derivable, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ $\longrightarrow$ **derivada** de f en x.

f' $\longrightarrow$ nueva función.

Def. (alternativa)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Recta tangente de $f(x)$ en x_0: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Propiedades

1. $(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g', \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
2. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Teorema (Regla de la Cadena)

Si g es derivable en x y f lo es en $g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en x, y su derivada es

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Derivadas básicas

1. $c' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x, \qquad (\log x)' = \frac{1}{x}$
4. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
5. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(\operatorname{senh} x)' = \cosh, \qquad (\cosh x) = \operatorname{senh} x$

Teorema

f derivable $\Rightarrow$ f continua

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea f be derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0$$

Teorema (Teorema del Valor Medio)

Sea f be derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

o, equivalentemente $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Teorema (Regla de L'Hôpital)

Sean f y g funciones derivables en (a, b), excepto posiblemente en $x_0 \in (a, b)$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exista o sea infinito.

Extensiones. La regla de L'Hôpital se puede aplicar si:

- la indeterminación es $\frac{\infty}{\infty}$ con todos los signos posibles
- el límite es $x_0 \to \pm\infty$
- son límites laterales

- **Derivación implícita:**

  $F(x, y) = 0,$

  $\dfrac{d}{dx}$ ambas lados de la ecuación $\rightarrow$ despejar $\dfrac{dy}{dx}$

- **Derivadas de orden superior:**

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x), \qquad \frac{d^3 f}{dx^3} = f'''(x), \cdots, \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$