# Sucesiones de números reales

**Def.**

**Una sucesión de números reales** $\{a_n\}$, es una aplicación

$$a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$a_1, a_2, a_3 \ldots \longrightarrow$ términos de la sucesión.
$a_n \longrightarrow$ término general.
También puede empezar en $n = 0$: $a_0, a_1, a_2 \ldots$.

**Def.**

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice **convergente** si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, para $L$ finito.

El **límite** de una sucesión $\{a_n\}$ es $L$ si para todo $\epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. (Hay una definición alternativa para $L$ infinito)

Si la sucesión no es convergente, decimos que es **divergente.**
Las propiedades de los límites de sucesiones son las mismas que las propiedades de los límites de funciones.

## Para hallar el límite

- Podemos usar el concepto de **límite de una función**

> Sea $f(x)$ una función y $\{a_n\}$ la sucesión $f(n) = a_n$.
>
> Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$

$\longrightarrow$ Podemos utilizar todas las herramientas para calcular el límite de una función, como, por ejemplo, la regla de L'Hôpital

- El **lema del Sandwich** para sucesiones:

> Si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ (finita o infinita) y $\{c_n\}$ verifica que $a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$,
>
> entonces $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

**Def.**

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice:

1. acotada superiormente si $\exists\, C \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \leq C$
2. acotada inferiormente si $\exists\, C \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \geq C$
3. **acotada** si es acotada superiormente e inferiormente, $(\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, t. q. $C_1 \leq a_n \leq C_2)$

**Def.**

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice

1. monótona creciente si $a_n < a_{n+1}$ (no decreciente si $a_n \leq a_{n+1}$)
2. monótona decreciente si $a_n > a_{n+1}$ (no creciente si $a_n \geq a_{n+1}$)
3. **monótona**, si es uno de los casos previos

### Teorema

*$\{a_n\}$ monótona y acotada $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ convergente*

### Teorema (Criterio de Stolz)

*Si $\{a_n\}$y $\{b_n\}$ verifican uno de los siguientes apartados:*

1. *$\{b_n\}$ es monótona creciente con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$*
2. *$\{b_n\}$ es monótona decreciente, con $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$*

*Siempre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$, exista parar $L$ finito o infinito, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

### Teorema (Fórmula de Stirling)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$