Series

Def. (Serie)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots .$$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n \to$ suma parcial de n términos
Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots .$$

Si no converge $\to$ la serie diverge

Propiedades

1. $\sum a_n$, $\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum(c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \sum a_n + c_2 \sum b_n$ conv
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ div
3. $\sum a_n$ conv $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Pero $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ conv)

Teorema (La suma geométrica)

Converge si $0 < |r| < 1 \to$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Teorema (Serie telescópica. $a_n = b_n - b_{n+1}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \cdots$$

$\to S_n = b_1 - b_{n+1}$.

Esta serie converge $\iff \lim_{n\to\infty} b_n < \infty$ *y* $S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$

Teorema (p-serie. $p = 1 \to$ serie armónica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

1. *converge si* $p > 1$
2. *diverge si* $0 < p \leq 1$

1. **Criterio de comparación directa:** $\{a_n\}$ y $\{b_n\} \to$ términos positivos

$$0 < a_n \leq b_n, \; \forall\, n \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \sum b_n \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv} \\ \sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum b_n \text{ div} \end{array}$$

2. **Criterio de comparación en el límite:** $\{a_n\}$ y $\{b_n\} \to$ términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad L \text{ finito y positivo}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ tienen el mismo comportamiento}$$

ambas convergen o ambas divergen

3. **Criterio de la raíz:** $\{a_n\} \to$ términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ div}$$
$$(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \text{ el criterio no concluye})$$

4. **Criterio del cociente:** $\{a_n\} \to$ términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ div}$$
$$(\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \text{ el criterio no concluye})$$

5. **Criterio de Leibniz para series alternadas:** $\{a_n\} \to$ términos positivos

$$\text{Si } a_{n+1} \leq a_n \text{ y } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\text{La serie alternada } \sum(-1)^n a_n \text{ converge condicionalmente}$$
$$\left(\sum(-1)^{n+1} a_n\right)$$

DEF.

AC. $\sum a_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum |a_n|$ es convergente

CC. $\sum a_n$ es convergente pero $\sum |a_n|$ div, entonces $\sum a_n$ **condicionalmente convergente**

Convergencia absoluta	$\Longrightarrow$	Convergencia condicional
No convergencia condicional	$\Longrightarrow$	No convergencia absoluta

Error. Serie alternada

$$S = S_N + R_N = \sum_{n=1}^{N} (-1^n) a_n + R_N \quad \Rightarrow \ |R_N| \leq a_{N+1}$$

Nota. Podemos derivar o integrar una serie infinita para obtener otra serie.

Series de potencias

Def.

Una series de potencias centrada en x_0 es una serie infinita de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots$$

Teorema (Convergencia de las series de potencias)

Una serie de potencias en x_0 verifica uno y sólo uno de los siguientes apartados:

1. *La serie converge sólo en x_0*
2. *Existe un número real $\rho > 0$, tal que la serie es*
   - *absolutamente convergente en $|x - c| < \rho$*
   - *divergente en $|x - c| > \rho$*
3. *La serie es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$*

Radio de convergencia: ρ ($\rho = 0$, $\rho < \infty$ ó $\rho = \infty$)

- $\dfrac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- $\dfrac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, si este límite existe

Intervalo de convergencia: El conjunto de todos los valores de x para los cuales la serie converge

TEOREMA

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *tiene* $\rho > 0 \Rightarrow$
$f(x)$ *es continua, derivable e integrable en* $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

La derivada y la integral $\longrightarrow$ *se calculan término a término.*
Mismo radio que f. *(El intervalo de convergencia puede ser diferente)*

Propiedades. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

1. $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$
2. $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{Nn}$
3. $c_1 f(x) + c_2 g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) x^n$

Def.

Si existen todas las derivadas de f en x_0, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se llama la **serie de Taylor** de f centrada en x_0
(para $x_0 = 0$ también se llama la serie de Mac Laurin de f)

Teorema

Si existen todas las derivadas de f en un intervalo abierto I que contiene a x_0 entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$\iff \exists \xi$ *entre x y x_0 tal que*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0, \quad \forall x \in I$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdots , \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots , \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdots , \quad -\infty < x < \infty$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdots , \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \cdots , \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \cdots , \quad -1 < x \leq 1$$