Técnicas de integración

La Integral Definida

$$\int_a^b f(x)$$

Es el **área bajo la gráfica** de $f(x) \geq 0$ sobre el eje x en $[a, b]$.
Para calcular la integral definida $\rightarrow$ dividimos el intervalo en n subintervalos y aproximamos la función por una constante.
Entonces, calculamos el área de n rectángulos. Si aproximamos $f \simeq f(x_i)$ en el intervalo i-ésimo, con todos los intervalos de la misma longitud, Δx, tenemos que

$$\int_a^b f(x) \simeq f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

Derivación: dada $F(x)$, halla $f(x)$ $\leftrightarrow$ **Integración:** dada $f(x)$, halla $F(x)$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Una función $F(x)$ que resuelve el último problema es una **primitiva**, **antiderivada** o **integral indefinida** de $f(x)$.

1. $\int_a^b c_1 f + c_2 g = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g$
2. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. $\int_a^b f = -\int_b^a f$
4. $\int_a^a f = 0$
5. $\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g$
6. $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$
7. $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

   si $f \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f \leq 0$
8. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
9. $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$

Primitivas básicas

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \;\; n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\int \operatorname{sen} x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \operatorname{senh} x = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x = \operatorname{senh} x + c$$

INTEGRACIÓN MEDIANTE CAMBIO DE VARIABLES (CV)

- Integral definida: $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$
- Integral indefinida: $\displaystyle\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$

  $\longrightarrow$ al final, hay que deshacer el cambio

INTEGRACIÓN POR PARTES (IPP): $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$

- Integral definida: $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)'g(x)dx$
- Integral indefinida: $\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)'g(x)dx$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \;\rightarrow\; P,\ Q \text{ polinomios}$$

- Si grado$(P) \geq$ grado$(Q) \rightarrow$ **dividimos los polinomios:** $P(x) = Q(x)C(x) + R(x) \rightarrow$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx.$$

- $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ con grado$(R(x)) <$ grado$(Q(x))$:

  I) Primero, comprobamos que la integral no sea inmediata:

  Tipo ln $\rightarrow \displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+8}dx = \ln|x^2+3x+8| + c.$

  Tipo arctan $\rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8} = \frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\frac{x}{\sqrt{8}} + c.$

  II) Si no lo es $\rightarrow$ **Haremos descomposición en fracciones simples.**

Funciones racionales: descomposición en fracciones simples

Factor en el denominador	Término en la descomposición en fracciones simples
$x-b$	$\dfrac{A}{x-b}$
$(x-b)^k$	$\dfrac{A_1}{x-b}+\dfrac{A_2}{(x-b)^2}+\cdots\dfrac{A_k}{(x-b)^k}, \quad k=1,2,3,\cdots$
$(x-a)^2+b^2$	$\dfrac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$
$\left((x-a)^2+b^2\right)^k$	$\dfrac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2}+\cdots+\dfrac{A_kx+B_k}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}, \quad k=1,2,3,\cdots$

Para cada factor en el denominador añadimos el término de la tabla y calculamos las incógnitas $(A,\ B, A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2,\cdots)$ igualando los denominadores. Después hay que hallar la integral de cada término.

Haremos un cambio de variables para eliminar las raíces.

$$\int R\left[\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1},\cdots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_r/q_r}\right]\rightarrow$$

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d},\ m=\mathrm{mcm}(q_1,\cdots,q_r).$$

$R=\dfrac{P}{Q}$ función racional en sus argumentos , P, Q son polinomios.

mcm$\rightarrow$ mínimo común múltiplo.

- $\int \operatorname{sen}^{2n} x$, $\int \cos^{2n} x \to$
  fórmulas de ángulo doble: $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
- $\int \operatorname{sen}^{2n+1} x = \int \operatorname{sen}^{2n} x \operatorname{sen} x = \int (1-\cos^2 x)^n \operatorname{sen} x$
- $\int \cos^{2n+1} x = \int \cos^{2n} x \cos x = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^n \cos x$
- $\int \operatorname{sen} mx \cos nx \to$ fórmulas trigonométricas
- $\displaystyle\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \to$

  R impar en $\operatorname{sen} x \to t = \cos x$
  R impar en $\cos x \to t = \operatorname{sen} x$
  R par en $\cos x$ y $\operatorname{sen} x \to t = \tan x$
  Resto de problemas $\to t = \tan x/2$,

  $$\left(\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt\right)$$

1. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \to x = a \tan t$
2. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \to x = \frac{a}{\cos t}$
3. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \to x = a \operatorname{sen} t$