Aplicaciones de la Integral

Áreas

- Área entre la **gráfica de una función** y el eje x, entre a y b:

$$A = \int_a^b |f| dx$$

- Área entre las **gráficas de dos funciones** f, g, entre a y b:

$$A = \int_a^b |f - g| dx$$

- Área en **ecuaciones paramétricas:** el área entre la gráfica de $x = x(t), \ y = y(t)$ y el eje x entre $t = t_0$ y $t = t_1$ es:

$$A = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt \right|$$

- Área en **coordenadas polares:** el área de la gráfica de $r = r(\theta)$ entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

- **Volumen por secciones paralelas:** si $A(x)$ es el área de las secciones paralelas a lo largo de toda la longitud de un sólido, el volumen del sólido así definido entre $x = a$ y $x = b$ es

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

- **El método de discos:** el volumen de un sólido de revolución obtenido al rotar $|f(x)|$ alrededor del eje x entre $x = a$ y $x = b$ es

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

- **El método de capas:** el volumen de un sólido de revolución obtenido al rotar $f(x) \geq 0$ alrededor del eje y es

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Longitudes

- La **longitud del arco de curva** $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

- Si la curva viene dada en **forma paramétrica**, la longitud es

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Def.

$$\int_a^\infty f(x) = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x).$$

Si el límite es finito decimos que la integral **converge.**
En otro caso, diremos que la integral diverge.

Teorema (Criterio integral para series)

Consideremos $f \geq 0$ una función monótona decreciente definida en $x \geq 1$. Sea $a_n = f(n)$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ y } \int_1^\infty f(x)\,dx,$$

tienen el mismo comportamiento, o ambas convergen o ambas divergen.