Tema 1

Funciones de Variable Real

1.1. La Recta Real

Los números reales se pueden ordenar como los puntos de una recta.

Los enteros positivos $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ que surgen al contar, se llaman números <u>naturales</u> (el cero se puede considerar o no como un número natural, nosotros no lo haremos).

Las operaciones aritméticas de adición y multiplicación se pueden hacer dentro de los números naturales pero la resta y la división nos lleva a introducir los siguientes números:

cero: $3 - 3 = 0$,

negativos: $2 - 6 = -4$,

fracciones: $3 \div 5 = \dfrac{3}{5}$.

Por tanto, podemos clasificar los números de la manera siguiente:

- **Naturales:** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- **Enteros:** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
  el cero junto con los enteros positivos y negativos
- **Racionales:** $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$
- **Irracionales:** son los números reales que no son racionales, como por ejemplo $\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e}$
- **Reales:** $\mathbb{R} = \text{Irracionales} + \text{Racionales}$

Todos estos números aparecen como solución de ecuaciones:
$x - 1 = 0 \to x = 1$,
$x + 3 = 0 \to x = -3$,
$2x + 1 = 0 \to x = -\frac{1}{2}$,
$x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$,
$x^2 + 1 = 0 \to x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \to$ Son los **números Complejos:**
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$.

MÉTODOS DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

La definición de los números naturales es la siguiente:

$1 \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$, también pertenece $n + 1$

Veamos cómo funciona esta definición:
$3 \in \mathbb{N} \Rightarrow 3 + 1 = 4 \in \mathbb{N}$,
$3/2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow 3/2 + 1 = 5/2 \notin \mathbb{N}$.

Esta definición de los números naturales nos introduce el proceso de inducción:

Demostración por inducción

Es una técnica para probar una afirmación realizada sobre cada número natural:

- La afirmación es verdadera para $n = 1$
- Si la afirmación es verdadera para $n \in \mathbb{N}$, entonces también es verdadera para su sucesor: $n + 1 \in \mathbb{N}$

Esto implica que la afirmación es cierta para todo número natural n.

Como ejemplo, podemos probar por inducción que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Demostración Directa

La idea es probar la afirmación directamente

Por ejemplo, para demostrar que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$,
sólo tenemos que operar directamente $(a - b)(a + b) = a^2 - ba + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

Demostración por contradicción o Reductio ad absurdum

- Queremos probar una hipótesis
- Asumimos lo opuesto a la hipótesis y
- Terminamos con una contradicción
- Concluimos que la hipótesis es verdadera

Como ejemplo, mostraremos que $\sqrt{2}$ es irracional:
$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ fracción irreducible.
$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow a^2 = 2b^2 \rightarrow a^2$ es par $\rightarrow a$ par $\rightarrow a = 2r \rightarrow$
$a^2 = 4r = 2b^2 \rightarrow b^2$ par $\rightarrow b$ par.

Si a y b son pares, entonces $\frac{a}{b}$ no puede ser una fracción irreducible $\rightarrow$ contradicción!
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

DESIGUALDADES, VALOR ABSOLUTO

Propiedades de Orden de $\mathbb{R}$
$a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Sólo una de las siguientes afirmaciones se verifica: $a < b,\ a = b,\ a > b$
2. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$
3. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ para todo número real c
4. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$
   Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

Propiedad. Entre dos números reales distintos existen infinitos números racionales e irracionales.

Definición 1.1.1 *El* **Valor Absoluto** *de $x \in \mathbb{R}$ es:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Tenemos la definición alternativa: $|x| = \sqrt{x^2}$.

La idea geométrica del valor absoluto es la de distancia. Por ejemplo, ¿qué puntos están a distancia 3 del 0? La respuesta es $|x| = 3$, es decir $x = \pm 3$.

Definición 1.1.2 *Si $x, y \in \mathbb{R}$ la* **distancia** *entre x e y es*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Propiedades del valor absoluto
$x, y \in \mathbb{R}$

1. $|x| = 0 \iff x = 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$
5. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Intervalos en $\mathbb{R}$

Intervalo abierto: (a, b) son todos los valores de x tal que $a < x < b$.

Intervalo cerrado: $[a, b]$ son todos los valores de x tal que $a \leq x \leq b$.

Intervalo semi-abierto: $[a, b)$ son todos los valores de x tal que $a \leq x < b$.

Intervalo semi-abierto: $(a, b]$ son todos los valores de x tal que $a < x \leq b$.

Intervalo semi-abierto: $[a, \infty)$ son todos los valores de x tal que $a \leq x < \infty$.

Intervalo abierto: (a, ∞) son todos los valores de x tal que $a < x$.

Intervalo semi-abierto: $(-\infty, b]$ son todos los valores de x tal que $x \leq b$.

Intervalo abierto: $(-\infty, b)$ son todos los valores de x tal que $x < b$.

Intervalo abierto: $(-\infty, \infty)$ son todos los valores de x tal que $x \in \mathbb{R}$.

Nota. ∞ no es un número real, indica que el intervalo se extiende sin límite.

Definición 1.1.3 *Sea A un conjunto de números*

- *El* **supremo** *de A es el menor elemento de $\mathbb{R}$ mayor o igual a todos los elementos de A. Es la menor de las cotas superiores.*
- *El* **ínfimo** *de A es el mayor elemento $\mathbb{R}$ menor o igual a todos los elementos de A. Es la mayor de las cotas inferiores.*
- *Si el supremo pertenece a A es también el* **máximo** *de A.*
- *Si el ínfimo pertenece a A es también el* **mínimo** *de A.*

1.2. Funciones elementales

Una función f en los reales es una regla que asigna a cada número x un único número real $f(x)$:

$$x \to y = f(x)$$

x: variable independiente, argumento o entrada.
y: variable dependiente, valor de la función o salida.

Definición 1.2.1 *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto. Una* **función** *f con* **dominio** *D es una regla que asigna un único número real $f(x)$ a cada número x en D.*
D es el **dominio** *de f: $\mathrm{Dom}(f) = D$.*
El conjunto de todos los valores de f forman el **rango** *o la* **imagen** *de f:*
$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in D, f(x) = y\}$.

Notación: $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Para visualizar una función es muy útil dibujar su gráfica:

Definición 1.2.2 *Sea f una función con dominio D, el conjunto de puntos $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ con $x \in D$ forman la* **gráfica** *de f.*

¿Cómo podemos reconocer la gráfica de una función? Podemos dibujar líneas verticales, una curva que corta cada línea vertical como mucho una vez, es la gráfica de una función.

Por ejemplo, $y^2 = x$ tiene dos soluciones $y = \pm\sqrt{x}$, por lo que hay dos cortes con cada línea vertical para $x > 0$, por lo tanto no es la gráfica de una función.

Si dibujamos líneas verticales, podemos observar que el dominio de una función es el conjunto de x_0 que verifican que la línea vertical $x = x_0$ corta la gráfica. De la misma forma, si dibujamos líneas horizontales, podemos visualizar la imagen como el conjunto de y_0 que verifican que la línea horizontal $y = y_0$ corta la gráfica.

Una función se puede definir mediante una fórmula, una gráfica o una descripción.

Definición 1.2.3 *Sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función:*

1. *f es una función* **inyectiva** *si $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$,*
   o, de manera equivalente, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$,
   esto es, si asigna argumentos distintos a valores distintos.
2. *$f\colon D \to \mathbb{R}$ se dice* **sobreyectiva** *si $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.*
   $f\colon D \to D$ se dice **sobreyectiva** *si $\mathrm{Im}(f) = D$.*
3. *f es una función* **biyectiva** *o* **uno-a-uno** *si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.*

1.3. Límites

Sea $f(x)$ una función definida para todo x cerca de x_0, pero no necesariamente en el propio $x = x_0$, si el valor $f(x)$ de f se aproxima al número L cuando x se aproxima al número x_0, decimos que L **es el límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** x_0.

Veamos el comportamiento de la siguiente función en las proximidades de $x = 5$:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}$$

x	2.9	2.9999	2.999999	$\rightarrow 3 \leftarrow$	3.000001	3.0001	3.1
$f(x)$	4.8	4.9998	4.999998	$\rightarrow 5 \leftarrow$	5.000002	5.0002	5.2

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 5$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3} = \frac{(2x-1)(x-3)}{x-3} \underset{x\neq 3}{=} 2x - 1.$$

Definición 1.3.1 (Weierstrass, definición $\epsilon - \delta$) *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a x_0 (excepto posiblemente en x_0) y sea L un número real, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

$$\textit{si } \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nota. Podemos utilizar la definición $\varepsilon - \delta$ para probar que $\lim_{x\to 3}(2x - 1) = 5$.

Nota. Una regla general muy útil es escribir $f(x) = L$ y expresarlo en términos de $x - x_0$ todo lo que podamos, mediante la igualdad $x = (x - x_0) + x_0$.

Nota. En la definición $\varepsilon - \delta$, L y x_0 son números finitos. Tenemos definiciones similares para $x \to \pm\infty$ y también si el valor del límite no es un número finito. También podemos definir **límites laterales:** por la derecha de x_0: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y por la izquierda de x_0: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

Formas Indeterminadas

$$\infty - \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty \cdot 0,\ \frac{0}{0},\ \infty^0,\ 1^\infty,\ 0^0.$$

A menos que lleguemos a una indeterminación, tenemos las siguientes propiedades.

Propiedades

Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existen, para x_0 finito o $\pm\infty$

1. $\lim_{x\to x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \lim_{x\to x_0} f(x) + c_2 \lim_{x\to x_0} g(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, si $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$
4. Regla del reemplazo: si f y g coinciden para todo x cerca de x_0 (no necesariamente incluyendo a x_0), entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$
5. Regla de la función compuesta: si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to L} h(x) = h(L)$, entonces $\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = h(\lim_{x\to x_0} f(x))$

Límites básicos. Sea x_0 finito

a) $\lim_{x\to x_0} c = c, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} c = c$

b) $\lim_{x\to x_0} x = x_0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

c) $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $n \in \mathbb{N}$

d) $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$, ($\forall x_0$ en su dominio)

e) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \to$ funciones trigonométricas en su dominio

Lema 1.3.2 (Lema del Sandwich) *Sea I un intervalo tal que $x_0 \in I$. Sean f, g y h funciones definidas en I, excepto posiblemente en el propio x_0. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$ y, $\forall x \in I$, $x \neq x_0$, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Nota. Podemos utilizar el lema del Sandwich para probar que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

1.4. Continuidad

Una función continua es una función para la que, intuitivamente, pequeños cambios en la entrada producen pequeños cambios en la salida

Definición 1.4.1 *Sea f una función definida en $(x_0 - p, x_0 + p)$, $p > 0$*

$$f \text{ se dice } \textbf{continua} \text{ en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nótese que la función debe estar definida en x_0 para poder ser continua en ese punto. Si la función no es continua en x_0 decimos entonces que es **discontinua** en dicho punto:

- $f(x)$ es <u>discontinua</u> en x_0 si $\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ no existe, o} \\ \text{el límite existe pero no es igual a } f(x_0) \end{cases}$

Definición 1.4.2 *Una función $f(x)$ es continua en*

- $\mathbb{R}$, *si es continua en cada punto*
- (a, b), *si es continua en cada punto del intervalo*
- $[a, b]$, *si es continua en (a, b) y*

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x), \ f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Propiedades básicas
Sean f, g continuas en x_0, entonces las siguientes funciones son continuas en x_0

1. $c_1 f + c_2 g, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
2. fg
3. $\dfrac{1}{f}$, si $f(x_0) \neq 0$
4. Función compuesta: si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0

Algunas funciones continuas
Las siguientes funciones son continuas en sus <u>dominios</u>

a) $p(x)$ polinomios, $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ funciones racionales, $\sqrt[n]{x}$

b) funciones trigonométricas: $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\operatorname{arcsen}(x), \ldots$

c) funciones hiperbólicas: $\operatorname{senh}(x)$, $\cosh(x), \ldots$

d) $\exp(x)$ y $\ln(x)$

Teorema 1.4.3 (Teorema del Valor Intermedio) *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a, b]$ que verifica $f(c) = K$.*

Teorema 1.4.4 (Teorema de Bolzano) *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe un valor $c \in (a, b)$ que verifica $f(c) = 0$.*

Definición 1.4.5 *Una función f se dice* ***acotada*** *si el conjunto de sus valores está acotado. Esto es, si existe un número $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo x en su dominio.*

Teorema 1.4.6 (Teorema del Valor Extremo) *Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo. Es decir, existen unos valores x_m y x_M en $[a, b]$ tal que:*

$$f(x_M) \geq f(x) \geq f(x_m) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$