Tema 2

Cálculo Diferencial en una variable

2.1. Derivadas

La derivada nos proporciona una manera de calcular la tasa de cambio de una función

Calculamos la velocidad media como la razón entre la distancia recorrida en un intervalo de tiempo h y la longitud del intervalo de tiempo.

$$v_{media} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

este valor es la pendiente m de la recta que pasa a través de los puntos $(t, x(t))$ y $(t+h, x(t+h))$. Si queremos calcular la velocidad en un tiempo t debemos tomar el límite

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{d}{dt} x(t)$$

Definición 2.1.1 *Una función f se dice* **derivable** *en x* $\iff$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe y es un número finito.

Si f es derivable, entonces $f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *es la* **derivada** *de f en x.*

Nota. La función f' existe en los puntos del dominio de f tal que el límite existe y es finito.

Definición 2.1.2 (Def. alternativa)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Recta tangente

La recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $m = f'(x_0)$ es la recta tangente a $f(x)$ en x_0: $y = m(x - x_0) + f(x_0)$.

Propiedades

1. $(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g', \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
2. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Teorema 2.1.3 (Regla de la Cadena) *Si g es derivable en x y f lo es en $g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en x, y verifica*

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)}$$

Nota. Con la regla de la cadena podemos demostrar que

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.}$$

Podemos utilizar esta identidad para calcular las derivadas $(\arctan x)'$ y $(\ln x)'$.

Derivadas básicas

1. $c' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x, \qquad (\log x)' = \dfrac{1}{x}$
4. $(\text{sen } x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\text{sen}\, x, \qquad (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
5. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad (\text{arcsen}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(x)' = \cosh, \qquad (\cosh x)' = \text{senh}\, x$

Teorema 2.1.4

$$\boxed{f \textit{ derivable} \Rightarrow f \textit{ continua}}$$

Teorema 2.1.5 (Teorema de Rolle) *Sea f be derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = 0.$$

Teorema 2.1.6 (Teorema del Valor Medio) *Sea f be derivable en (a,b) y continua en $[a,b]$, entonces existe al menos un número $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

o, equivalentemente $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Teorema 2.1.7 (Regla de L'Hôpital) *Sean f y g funciones derivables en (a,b), excepto posiblemente en el punto $x_0 \in (a,b)$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, entonces*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},}$$

siempre que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exista o sea infinito.

Extensiones

La regla de L'Hôpital se puede aplicar en los casos siguientes:

- Si la indeterminación es $\frac{\infty}{\infty}$ con todos los signos posibles.
- Si el límite es $x_0 \to \pm\infty$
- A los límites laterales

Derivación implícita

Si la ecuación viene dada de manera implícita, $F(x,y) = 0$, hay que derivarla respecto a x y a partir de ahí obtener $\dfrac{dy}{dx}$.

Derivadas de orden superior

Podemos hallar la derivada de una derivada:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x), \qquad \frac{d^3 f}{dx^3} = f'''(x), \cdots, \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

2.2. Extremos

Definición 2.2.1 *Sea f una función definida en un intervalo I:*

- $f(x_m)$ *es el* **mínimo global** *(o absoluto) de f en I si* $f(x_m) \leq f(x), \ \forall x \in I$
- $f(x_M)$ *es el* **máximo global** *(o absoluto) de f en I si* $f(x_M) \geq f(x), \ \forall x \in I$

Nota. Recordemos que si f es continua, en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, la función siempre alcanza su máximo y mínimo global .

Definición 2.2.2 *Sea f una función definida en un intervalo I, si tenemos un intervalo abierto I_1 conteniendo a x_0*

- $f(x_0)$ *es un* **mínimo local** *de f en I si* $f(x_0) \leq f(x), \ \forall x \in I_1$
- $f(x_0)$ *es un* **máximo local** *(o relativo) de f en I si* $f(x_0) \geq f(x), \ \forall x \in I_1$

Definición 2.2.3 *Sea f una función definida en x_0. f tiene un* **punto crítico** *en x_0 si*

$$f'(x_0) = 0 \text{ o } f'(x_0) \text{ no existe}$$

Teorema 2.2.4 *Si f tiene un máximo o mínimo local en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.*

Cálculo de extremos globales de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$

1. Halla los puntos críticos de f en (a, b): $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no exista
2. Evalúa f en cada punto crítico de (a, b)
3. Evalúa f en los extremos del intervalo: $f(a)$ y $f(b)$
4. El menor valor es el mínimo global y el mayor, el máximo global

Definición 2.2.5

- *f es una* **función creciente** *en un intervalo I si $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) < f(x_2)$.*
- *f es una* **función decreciente** *en un intervalo I si $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) > f(x_2)$.*

Teorema 2.2.6 *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b)*

1. *Si $f'(x) > 0, \ \forall x \in (a, b)$ entonces f es creciente en $[a, b]$.*
2. *Si $f'(x) < 0, \ \forall x \in (a, b)$ entonces f es decreciente en $[a, b]$.*
3. *Si $f'(x) = 0, \ \forall x \in (a, b)$ entonces f es constante en $[a, b]$.*

Criterio de la primera derivada

	$x < x_0$	$x > x_0$	x_0 (punto crítico)
$f'(x)$	$-$	$+$	mínimo local
	$+$	$-$	máximo local
	$-$	$-$	no extremo local
	$+$	$+$	no extremo local

Definición 2.2.7 *Sea f derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f es*

- **convexa** *(cóncava hacia arriba) en I si f' es creciente.*
- **cóncava** *(cóncava hacia abajo) en I si f' es decreciente.*

Teorema 2.2.8 *Sea f una función derivable dos veces en un intervalo abierto I*

- *Si $f''(x) > 0,\ \forall x \in I$, entonces la gráfica de f es convexa en I.*
- *Si $f''(x) < 0,\ \forall x \in I$, entonces la gráfica de f es cóncava en I.*

Definición 2.2.9 *Sea f una función continua en un intervalo abierto I y sea $x_0 \in I$. f tiene un* **punto de inflexión** *en x_0 si la concavidad cambia en x_0 (convexa $\leftrightarrow$ cóncava).*

Teorema 2.2.10 *Si x_0 es un punto de inflexión de f, entonces $f''(x_0) = 0$ o $f''(x_0)$ no existe.*

Teorema 2.2.11 *Sea f una función tal que $f'(x_0) = 0$ y derivable dos veces en un intervalo abierto conteniendo a x_0*

- *si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en x_0.*
- *si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en x_0.*

Si $f''(x_0) = 0$ el criterio no funciona, puede ser cualquier cosa.

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	gráfica
$+$	$-$	creciente, cóncava
$-$	$-$	decreciente, cóncava
$+$	$+$	creciente, convexa
$-$	$+$	decreciente, convexa
0	$+$	mínimo local
0	$-$	máximo local
0	0	?

2.3. Gráficas

1. Dominio

2. Intersección con el eje $x \to f(x) = 0$
   Intersección con el eje $y \to f(0) = y$

3. Simetrías

   $f(-x) = +f(x) \to$ par
   $f(-x) = -f(x) \to$ impar

   Periodicidad $\to f(x + T) = f(x)$

4. Asíntotas:

   Vertical $\to \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
   Horizontal $\to \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = H$
   Oblicua $\to \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (mx + b) = 0 \to m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$

5. Continuidad: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

6. Derivada: monotonía y puntos críticos

   $f'(x) > 0 \to$ creciente
   $f'(x) < 0 \to$ decreciente
   $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no exista $\to$ **puntos críticos**

7. Máximos y mínimos locales: $x_0 \to$ punto crítico

   $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \quad \to$ mínimo local
   $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0 \quad \to$ máximo local
   $f'(x) : - \mapsto + \quad \to$ mínimo local
   $f'(x) : + \mapsto - \quad \to$ máximo local

8. Concavidad

   $f''(x) > 0 \to$ convexa
   $f''(x) < 0 \to$ cóncava

9. Puntos de inflexión. La concavidad cambia. $f''(x_0) = 0$ o $\nexists f''(x_0)$

10. Máximos y mínimos globales

2.4. Polinomio de Taylor

La idea es aproximar una función $f(x)$ por un polinomio $P(x)$. El polinomio de Taylor es el polinomio que mejor aproxima a una función en un punto x_0

Si aproximamos $f(x)$ por $\begin{cases} \text{una constante} & \rightarrow P(x) = f(x_0) \\ \text{una recta} & \rightarrow P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{cases}$

Definición 2.4.1 *Si f es derivable n veces en x_0, entonces el polinomio*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

es el **polinomio de Taylor** *de grado n de f centrado en x_0.*

Nota. Para $x_0 = 0$ el polinomio también se llama **Polinomio de Mac Laurin.**

ERROR

El polinomio es una aproximación de $f(x)$, por lo que se comete un **error** $|R_n(x)| = |f(x) - P(x)|$. Existen muchas fórmulas para este error, pero la idea es que todas ellas verifican

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

$\rightarrow$ $R_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big).$ Notación: $f(x) = o\big(g(x)\big)$ cuando $x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$

En el siguiente teorema tenemos una fórmula para el error $|R_n(x)|$:

Teorema 2.4.2 *Sea $f(x)$ una función derivable $n+1$ veces en un intervalo abierto I, entonces $\forall x_0, x \in I$ tenemos que*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$, ξ es un punto en el intervalo abierto definido por x_0 y x.